Püf Noktalarıyla

STATİK

(Ders Notları)

(20-24 punto)

(Son Güncelleme: 30.10.2023)

Prof. Dr. Mehmet Zor
Dokuz Eylül Üniversitesi Müh. Fak. Makine Mühendisliği Bölümü

Önsöz

Sevgili Öğrenci , Mühendis ve Araştırmacı Arkadaşlarım;

Günlük hayatımızda, İş hayatımızda ve farklı ortamlarda dış yüklerin etkisine maruz ve durağan halde olan birçok katı cisim ve sistemlerle aslında iç içe yaşarız. Evimizdeki askıdan, avizeden, dolap ve sandalyelerden tutun, binalarımızdaki kolonlara, çatı sistemlerine, el aleti, makine ve taşıtlara kadar karşılaştığımız ve kullandığımız birçok farklı ürünün çalışma şartlarındaki yüklere dayanabilmesi için imal edilmeden önce doğru olarak tasarlanması son derece gereklidir. Bu ise statik ve mukavemet hesaplarının doğru yapılabilmesiyle ancak mümkün olur ki , bu hesaplamalar mühendisler ve teknik elemanlar olarak bizlerden beklenen bir yetkinliktir. İşte bu notlarımız sizlere çok iyi bir statik hesaplama bilgi ve becerisi kazandıracaktır.

Ders notlarını hazırlarken kendi tecrübelerime dayanarak şu noktalara dikkat etmeye çalıştım:

- Öncelikle notlarımda dostane bir hava oluşturmak istedim. Bir zaman çalışmaya çalıştığım bir kitaptaki sert ve resmi üslubun, çok itici geldiğini, kitaptan beni soğuttuğunu ve çalışma şevkimi kırdığını görmüştüm. Dolayısıyla bir kitabın üslubunun, öğrenmeyi etkileyen çok önemli bir faktör olduğunu göze alarak, notlarımla dost olmanızı sağlayacak bir üslubu kullanmaya gayret ettim.
- Bazen espriler, figürler, karikatürler ve değerli bazı sözlerle samimiyeti arttırmayı ve ders çalışmaktan yorulan zihninize bir teneffüs verip toparlanmasını sağlamayı hedefledim.
- Konuların içinde, öğrenmeyi kolaylaştıran ve hızlandıran bazı anahtar püf noktaları özellikle vurgulamaya çalıştım.
- İlk örnek problemleri en zayıf anlayıştaki bir kişinin anlayabileceği tarzda açıklamaya çalıştım.Diğer örneklerde ise çok fazla detaylı açıklamalara girmedim.
- Sadece cevabı belli olan bazı soruları konuların sonuna ekleyerek, kendi gayretinizle, hata yapa yapa, düşe kalka doğru sonucu bulmanızı, bu şekilde konuları daha fazla pekiştirmenizi; ayrıca insanı geliştiren en önemli hadiselerin yenilgiler ve başarısızlıklar olduğunu hissetmenizi hedefledim.

Sizlerden gelen öneri ve eleştirilerinizi de dikkate alarak, bu notları zaman içerisinde güncelledim, daha bol örnekli bir kaynak haline getirdim ve mehmetzor.com sitesindeki ders anlatım videolarıyla, örnekleri ilişkilendirdim. İleri de mümkün olursa notlarımı kitap halinde bastırmayı amaçlıyorum. Tüm öğrencilere ve statik konusuyla ilgili tüm araştırmacılara faydası olması dileğiyle…

01.01.2023-İzmir

Prof.Dr. Mehmet Zor

Bu ders notlarını kendi dersinde takip etmek isteyen

Öğretim Üyeleri ile Sunum Dosyaları Paylaşılmaktadır.

1. **edu.tr** uzantılı **Kurumsal** mail adresinizden mehmet.zor@deu.edu.tr adresine isteğinizi bildiren bir mail atınız.
2. Mailinizde ayrıca gmail hesabınızı belirtiniz. Bu durumda;

Sunum Dosyaları ve Notlardaki (*) ile işaretli soruların çözümleri sizinle paylaşılacaktır.

Bu paylaşılacak dosyalar animasyon içermektedir (yani herbir yazı ve resim sırayla çıkmaktadır).

Güncelleme Farkları

17.09.2023 tarihli ders notlarında, sadece cevabi bulunan sorulardan 3.12, 5.12, 5.13 ve 6b.5 nolu soruların cevapları düzeltilmiştir. Ayrıca 13.10.2023 tarihli ders notlarında yer alan çözümlü örnekler kontrol edilmiş ve birkaçının çözümünde küçük düzeltmeler yapılmıştır. Tüm bu düzeltmeler bu notlarda kırmızı ile yazılarak belirgin hale getirilmiştir. Ayrıca video linkleri güncellenmiştir.

İletişim

Tüm soru, görüş ve önerileriniz için: **e-posta: mehmet.zor@deu.edu.tr , mehmetzor66@gmail.com**

Öğretim Üyesi WEB SİTESİ : mehmetzor.com

a - Ders Eğitim Videoları (Herbir konunun örneklerle anlatıldığı videolardır.)
b- Ders Notları.pdf (bu notlar ve diğer derslere ait notlar)
c- Sınav soruları ve çözümleri

Kaynaklar

1- Ders Referans Kitabı: **Engineering Mechanics: Statics,** James L. Meriam, L. G. Kraige, J. N. Bolton

2- **Vector Mechanics For Engineers**: Statics, Ferdinand P. Beer E. Russell Johnston, Jr

3- **Engineering Mechanics: Statics,** by Russell Hibbeler

4- **Statik Problemleri** – Prof.Dr. Seçil Erim (tmmob yayınları)

5- https://avys.omu.edu.tr › public ›

6- **Statitics,** Jerry H. Ginsberg

- ✓ Bu ders notlardaki örneklerin bir kısmı yukarıdaki kaynaklardan alınmış veya biraz farklılık katılarak uyarlanmıştır.
- ✓ Bazı örnekler ise tarafımdan düşünülmüş orijinal örneklerdir.
- ✓ Notlardaki tüm açıklamalar orijinal olup hiçbir kaynaktan alınmamıştır.

İşlenecek Konular ve Önemli Alt Başlıklar

İşlenecek Konular ve Önemli Alt Başlıklar

A- Motivasyon

[Giriş ve Motivasyon Videosu]

A1- BU DERS GERÇEK HAYATTA NE İŞE YARAYACAK?

Bu sorunun cevabını bir örnekle anlamaya çalışalım:

- Çalıştığınız işletme şekildeki gibi bir portatif hamak seti imal etmek istemektedir.
- Ar-ge mühendisi olarak sizden hamakta kullanılacak iplerin en uygun çapını (d) belirlemenizi istemiştir. Zira ipler çok ince olursa kopar, çok kalın olursa kopmaz ama pahalı olur.
- Bu sebeple bir mühendis olarak iplerin insan ağırlığına dayanabileceği minimum kalınlığını (çapını) belirleyebilirseniz, işletmemize en faydalı şekilde bir öneri de bulunabiliriz.

- Şimdi birlikte düşünüyoruz: Hamak maksimum 120 kg lık kişiyi taşısın. Ancak 2 katı emniyetli olsun. Yani durağan halde hamak maksimum 240kg (yaklaşık 2400N) luk bir yükü taşıması gerekir.

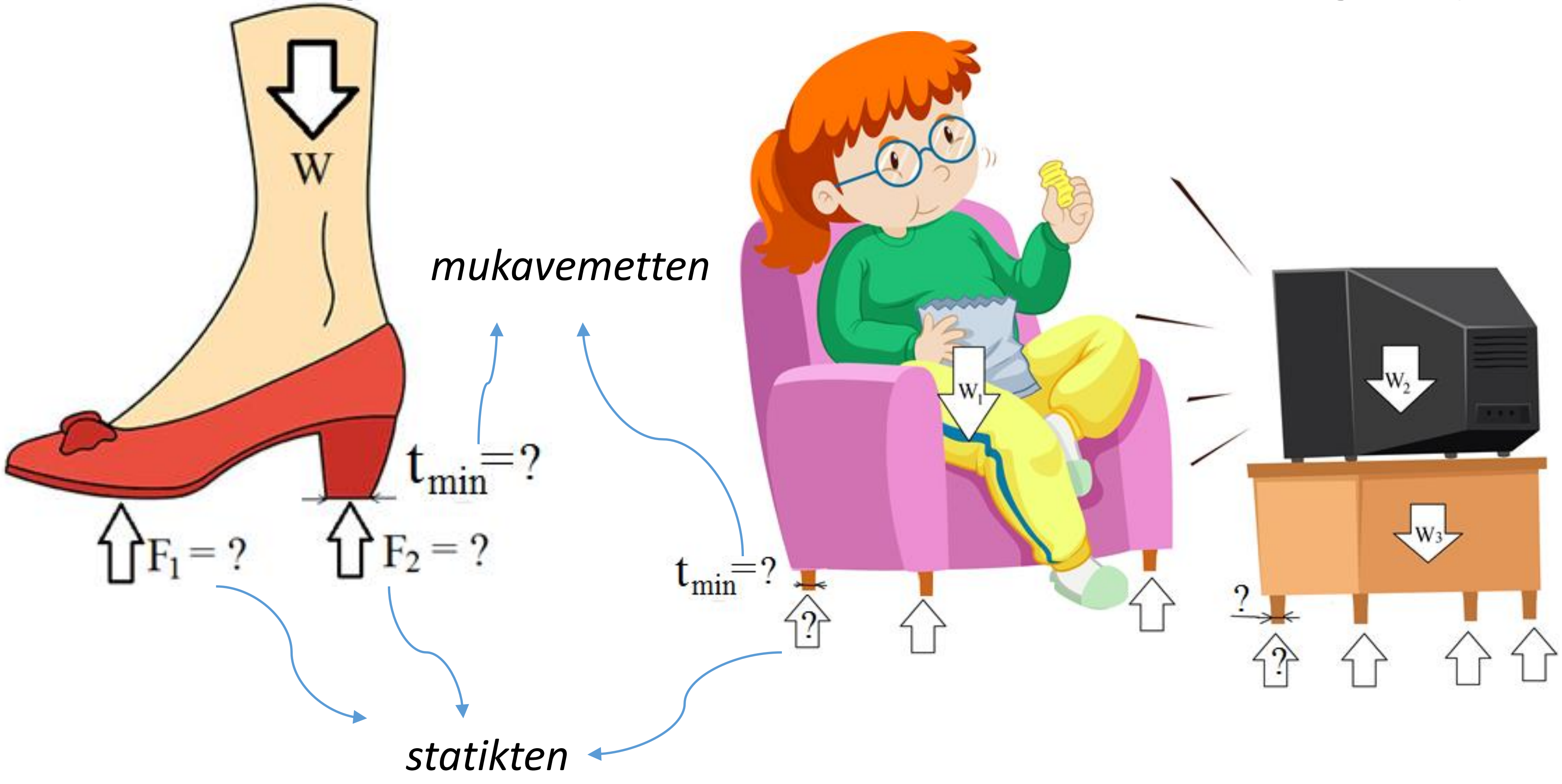
Şunu unutmayın: ip kuvvetleri (T_1, T_2) bilinmeden minimum çap (d) hesaplanamaz. O halde;

İlk adım iplere düşen kuvvetleri (T_1, T_2) bulmaktır. → Statik hesaplardan

2.Adım ise ipin emniyetli çapını (d) hesaplamaktır. → Mukavemet hesaplarından

- *Görüldüğü gibi statik ve mukavemet birbirlerini tamamlayan iki derstir.*
- *Mukavemet dersinde doğrudan gerçek hayata uygulanabilen boyut hesaplamaları (d çapının belirlenmesi gibi) yapılır ki bu hesaplamalar mühendislerden beklenir.*
- *Ancak boyutu hesaplamadan önce kuvvetlerin bilinmesi gerekir. Bu ise Statik dersinin temel konusudur.*
- *O halde bir mühendis olarak öncelikle statik hesaplarını iyi öğrenmemiz son derece önemlidir.*

- Şimdi Çevrenizdeki dış yüklerin etkisine maruz kalan katı cisimlere bir göz atınız. Örneğin, sandalye, masa, sehpa, yatak, dolap, asansör, kitaplık, merdiven, ayakkabılarınız.. Her birisinde, ince olduğu taktirde kırılması, kopması muhtemel parçaları görmeye çalışınız.



- Bu parçaları ince tutarak, malzemeden kazanabilir ekonomik açıdan işletmenize fayda sağlayabileceğinizi düşünebilirsiniz. Ancak bu durumda dayanımı riske ettiğinizin farkında olmalısınız. Olayı tam tersi düşünürsek, parçaları kalınlaştırıp dayanım riskini azaltabilirsiniz fakat bu durumda da daha fazla malzeme kullanmanız gerektiğinden imalatı daha pahalıya getirirsiniz.
- İşte bir mühendis olarak sizden beklenen şey, bu dayanım ve ekonomiklik şartlarını en iyi şekilde sağlayacak hesaplamaları yapabilmenizdir ki, bu faaliyete optimizasyon, sonucuna ise optimum çözüm denir.
- Aslında nihai hedefimiz dayanım açısından minimum boyutların tespit edilmesidir. Bu ise mukavemet hesaplarıyla mümkündür. Fakat dediğimiz gibi Statik hesaplar yapılmadan, Mukavemet hesapları yapılamaz. Bu sebeple Statik dersi Mukavemet dersinin temelini oluşturur. Statikte ana hedef durağan haldeki katı cisimlere etki eden kuvvetlerin belirlenmesidir.

- Şunu da belirtmekte fayda var ki, boyutların değiştirmekle dayanım ve ekonomiklik açısından en iyi çözüm bulunabilir ancak bu sırada sistemin işlevselliğinin ve kullanılabilirliğinin de kaybedilmemesi gereklidir. Bu da karşımıza üçüncü bir şart olarak çıkmaktadır.

Yüklere dayanabilmiş ancak aşırı şekil değiştirmekle işlevselliğini yitirmiş bir köprü

Sonuç olarak, yeni bir ürünün tasarım aşamasında veya mevcut bir ürünü iyileştirme faaliyetlerinde, şu 3 şartı en iyi seviyede sağlamak gerekir ki, optimum çözüm elde edilebilsin:

1- Dayanım

2- Ekonomiklik

3- İşlevsellik

İmalatta kullanılan malzeme israfının önlenerek, işletmelerin giderlerinin azaltılması ve dolayısıyla daha fazla kâr yapabilmesi, ancak statik ve mukavemet konularına yeterince hâkim olan ve bu sayede doğru optimizasyon hesaplamaları yapabilen mühendislerle mümkündür.


Sizi niçin işe alalım? Bize ne gibi faydanız olabilir?
Ürünlerinizin dayanım açısından optimizasyonunu yaparak, en az malzeme maliyeti ile imal etmenizde yardımcı olabileceğimi düşünüyorum.

A2- Newton Kanunları

- **1. Kanun:** Başlangıçta durağan halde olan veya sabit hızla bir doğru boyunca hareket eden bir cisim üzerine dengelenmemiş bir kuvvet etki etmedikçe (net kuvvet ve moment sıfır ise) bu hareket durumunu korur.

  (Bu kanun **Statik** biliminin temelini oluşturur.)

- **2. Kanun:** Bir parçacığın ivmesi, üzerine etki eden bileşke kuvvetle doğru orantılı ve kuvvet doğrultusundadır. **F=ma**

  (Bu kanun **Dinamik** Dersinin Temelini oluşturur**.)**

- **3. Kanun:** İki parçacık arasındaki etki ve tepki kuvvetleri eşit, aynı doğrultu üzerinde ve zıt yönlerdedir.

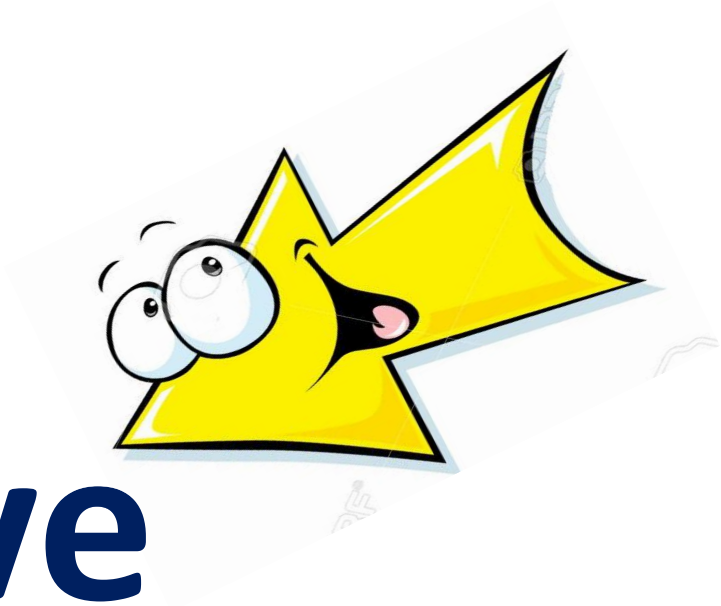
  (Bu kanun **Mukavemet** Dersinin temelidir.)

A3-SI Birim Sistemi

Birim	SI
Kütle	kilogram (kg)
Uzunluk	metre (m)
Zaman	saniye (s)
Kuvvet	Newton (N)

1 Newton'luk kuvvet: 1 kilogramlık kütleyi 1 m/s^2 ivmelendiren kuvvet değeridir.

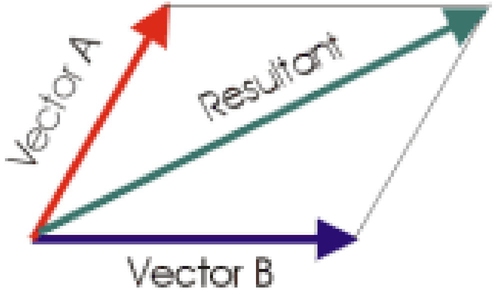
***Püf Noktası** (PN) – 1.1: Statik denge denklemlerinin sağ tarafı sıfır olduğundan birim dönüşümü çok önemli değildir. . Ancak tabi ki hesaplamalarda büyüklükler aynı cins birimden yazılmalıdır. (Mesela tüm kuvvetler kN veya Newton alınmalıdır.)*



1. Vektörler ve Vektörel İşlemler

Video 1a Video 1b

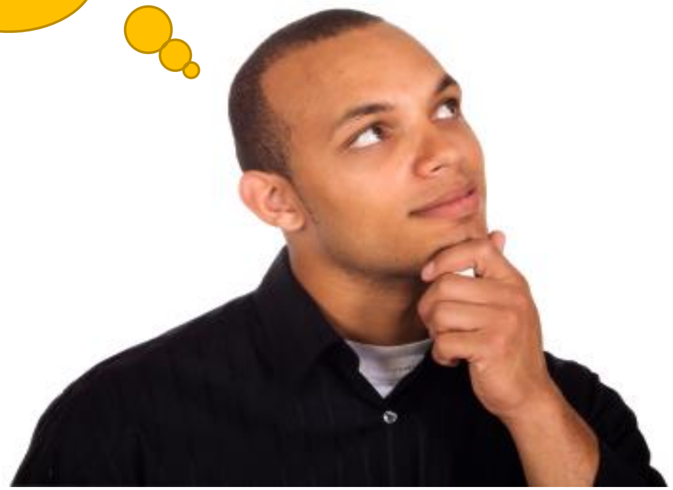
1.1 Konunun önemi



Soru: Bu konuyu öğrenmek bize ne kazandıracak?

Cevap: Bu konuyu iyice anlayabilirsek;

Statik'in temel konusu olan kuvvet hesaplamalarını yapabilecek ve özellikle üç boyutlu denge problemlerini, daha kolay ve pratik olarak çözebileceğiz.

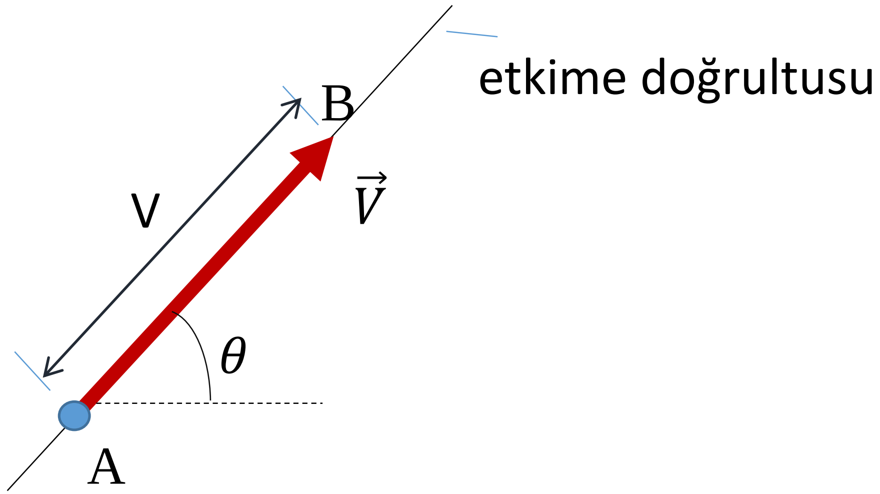


Hatırlayın : Kuvvetleri hesaplamanın ne önemi vardı?

- ✓ *Kuvvetleri bilmeden mukavemet hesapları yapılamaz.*
- ✓ *İncelenen parçanın, kuvvete dayanması için gerekli minimum boyutları mukavemet hesaplamalarıyla belirlenir.*
- ✓ *Bu minimum boyutlar ise günlük hayatımıza uygulanabilir bir veri elde etmemizi sağlar. Zira boyutlar bu değerlerden büyük olmalıdır.*

Şimdi vektörlerle ilgili tanım ve işlemleri sırasıyla işleyip, son kısımda çeşitli örneklerle konuyu pekiştirmeye çalışacağız.

- **1.2 Skaler büyüklük:** Sadece şiddeti bulunan büyüklükler (örn: uzunluk, zaman, kütle, hacim, enerji, yoğunluk) Bir harf ile sembolize edilebilir. (örn: kütle: m)
- **1.3 Vektörel büyüklük**: Şiddeti ile birlikte yönü olan büyüklüklerdir. (örn: hız, ivme, kuvvet)
- **1.4 Bir vektörün gösterimi**: Bir okla gösterilir. Sembolize edilirken harfin üzerinde bir ok koyulur.



Vektörel Gösterimi: $\vec{V}$

Şiddeti : V veya $|\vec{V}|$

Doğrultusu : AB

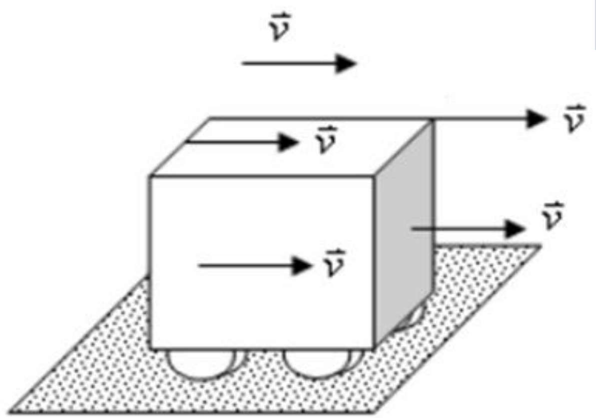
Yönü : A'dan B'ye doğru

Uygulama noktası : A

Yatayla yaptığı açı : θ

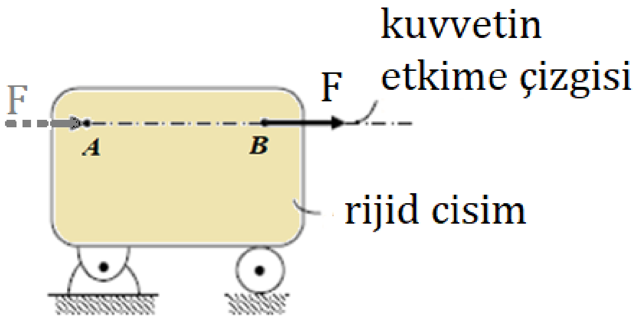
1.5 Vektörlerin Sınıflandırılması

Püf Noktası (P.N) 1.1 : Sınıflandırmada esas olan vektörün etkisinin korunmasıdır.



1-Serbest vektör (Free vector): *Belirli bir şiddeti, doğrultusu ve yönü vardır ama etkime doğrultusu uzayda tek bir noktadan geçmez.*

Sabit bir hızla doğrusal hareket yapan bir aracın hız vektörü buna bir örnektir.



2- Kayan vektör (Sliding vector): *Belirli bir şiddeti, doğrultusu ve yönü vardır.*

Uygulama noktası etkime doğrultusu üzerinde herhangi bir nokta olabilir.

Rijit bir cisme etki eden kuvvet, aynı etkiyi etkime çizgisi üzerinde herhangi bir noktadan uygulandığında da gösterir ki bu kuvvet kayan vektöre bir örnektir.

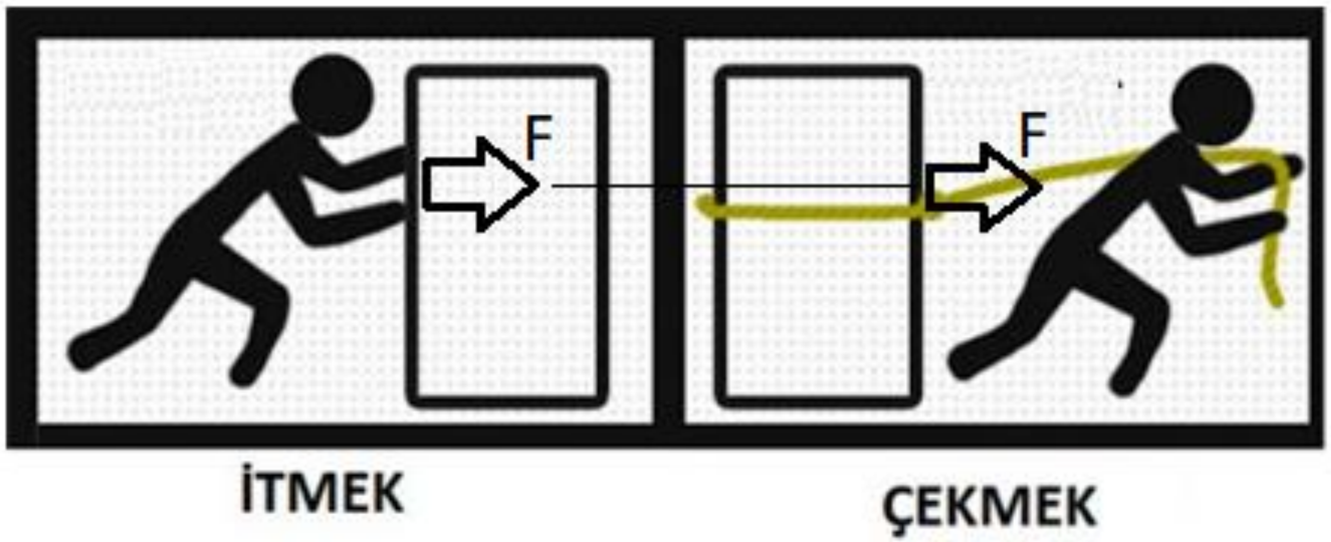
3- Sabit vektör (Fixed vector): *Belirli bir şiddeti, doğrultusu ve yönü vardır.*

Etkime doğrultusu uzayda tek bir noktadan geçer.

Elastik bir çubuğa uygulanan çekme kuvvetleri buna bir misaldir. Kuvvetlerin aynı etkiyi koruması için etkime doğrultusu ve noktası sabit olmalıdır.

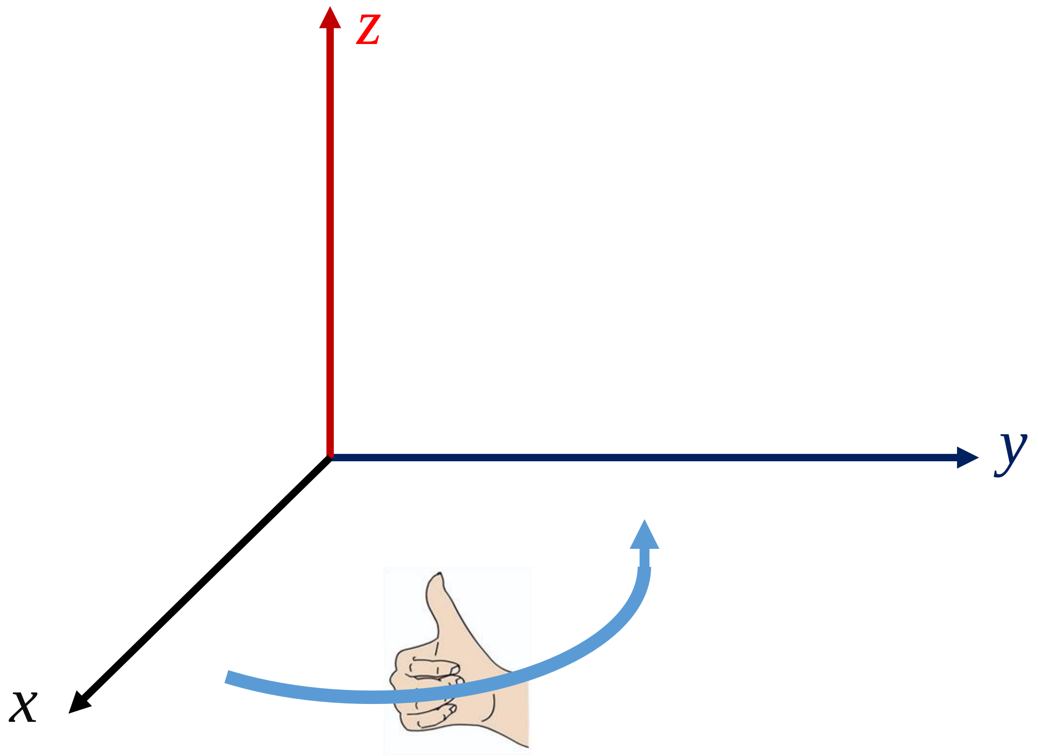
1.6 Kaydırılabilme İlkesi (Principle of transmissibility):

Rijit cisim üzerine etkiyen kuvvetin şiddeti, doğrultusu ve yönü aynı kalmak koşuluyla uygulama noktası, doğrultusu üzerinde herhangi bir noktaya taşınabilir ve bu işlem sonucu cisme etkisi değişmez.



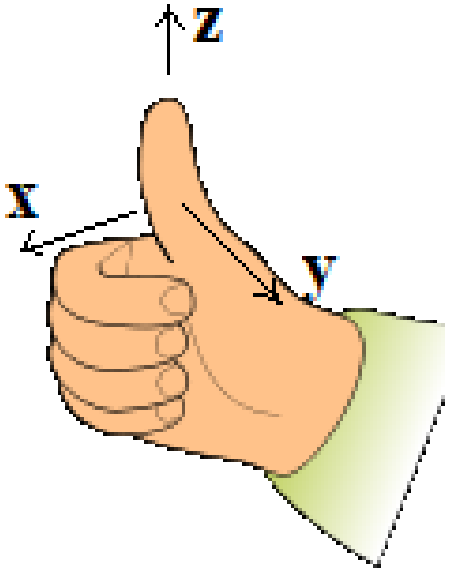
Bir cismi arkadan itsek veya önden aynı doğrultuda aynı kuvvetle çeksek, teorik olarak bu kuvvetlerin mekanik etkisi aynıdır.

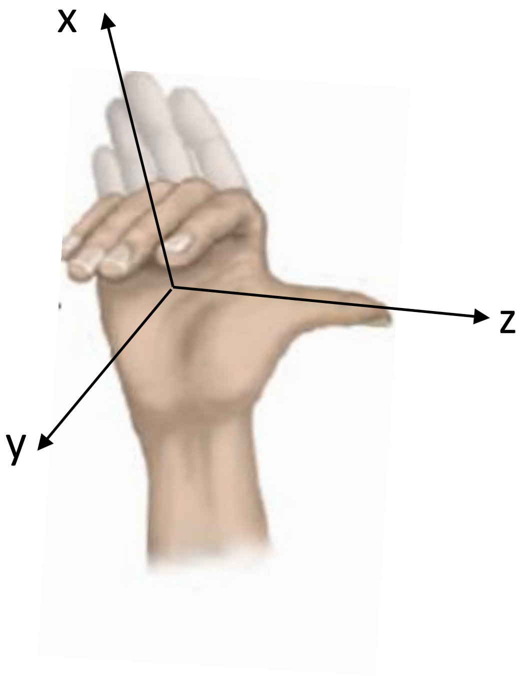
1.7.1 Kartezyen Koordinatlar : Birbirine dik (ortogonal) eksenlerden oluşan eksen takımıdır. İki boyutlu (düzlemsel) durumda x ve y eksenlerini, üç boyutlu (uzaysal) durumda x, y ve z eksenlerini içerir. Eksenlerin 2si keyfi, diğeri onlara bağlı (sağ el kaidesine göre) yerleştirilir.



1.7.2 Eksenlerin yerleştirilmesi nasıl yapılır?

- x ve y eksenleri keyfi olarak yerleştirilir; ancak z ekseninin yönü artık keyfi olamaz.
- z ekseni sağ el kaidesiyle yerleştirilir.
- Yani x ekseni sağ elimizin 4 parmağıyla tutup, y ekseni üzerine kaparsak baş parmağımızın yönü + z eksenini gösterir.





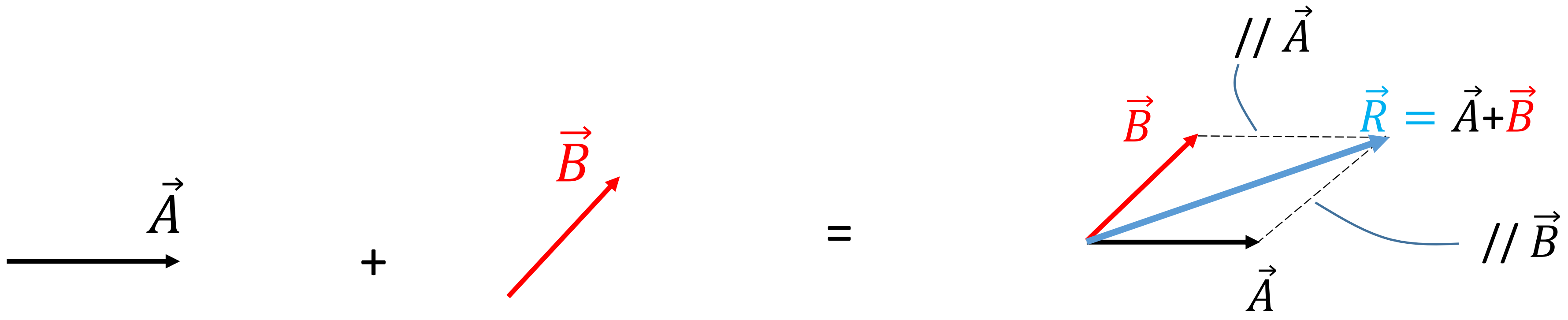
1.8 Vektörelerin Toplanması ve Çıkarılması

Vektörlerin toplama ve çıkarma işleminde 2 yöntem vardır:

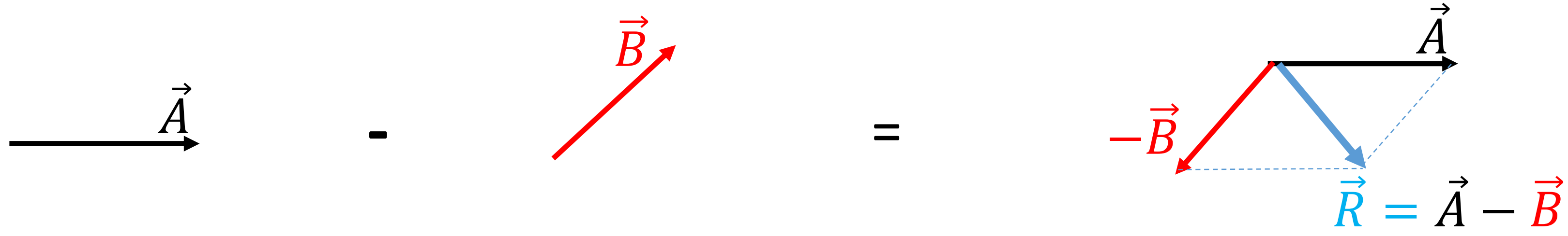
a-) **Paralelkenar yöntemi:**

Toplama: Vektörlerin başlangıç noktaları birleştirilir ve bir paralel kenar oluşturulur.

Bu paralel kenarın diyogonali ($\vec{R}$) iki vektörün toplamına eşittir.

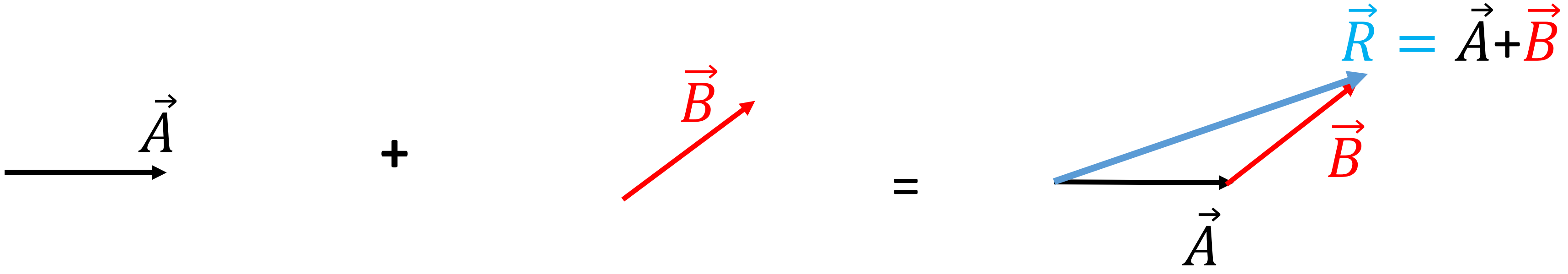


Çıkarma: Çıkarılan 2nci vektör 180 derece çevrilip toplama işlemi aynen yapılır.

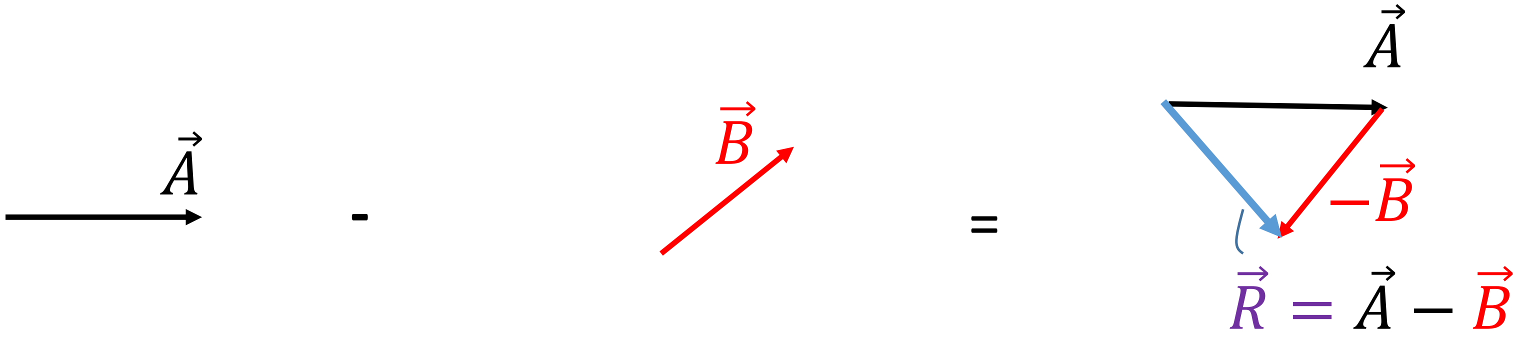


b-) **Üçgen Yöntemi** (uç uca ekleme yöntemi):

Toplama: 2nci vektör 1nci vektörün ucuna (bitim noktasına) eklenir. 1nci vektörün başlangıcından , 2nci vektörün bitiş noktasına çizilen vektör toplam (bileşke) vektörü ($\vec{R}$) verir.



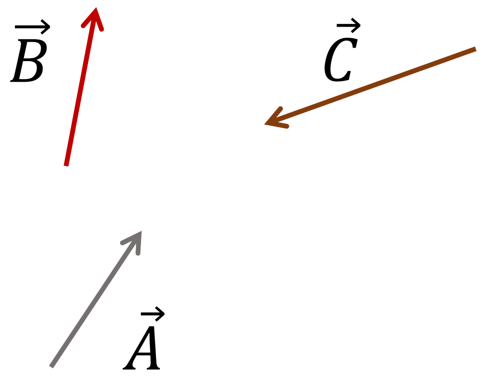
Çıkarma: 2nci vektör 180 derece çevrilip toplama işlemi aynen uygulanır.



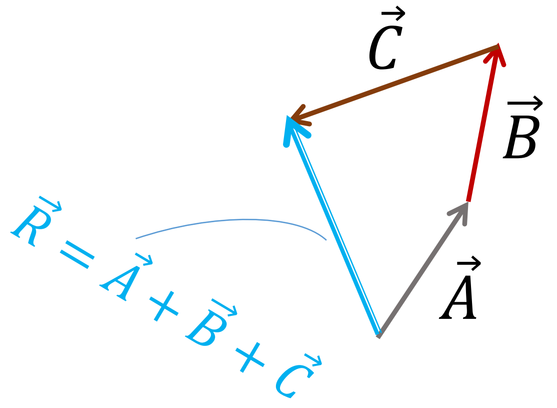
c-) Birden Fazla vektörün toplanması veya çıkarılması:

Bu durumda üçgen yöntemi daha pratiktir. Vektörler uç uca eklenir ve ilk vektörün başlangıcından son vektörün ucuna çizilen vektör bileşkeyi verir.

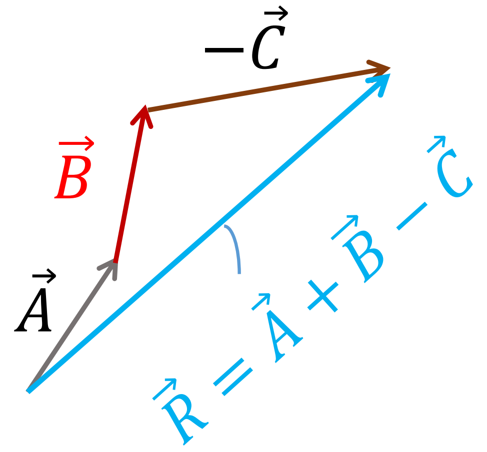
Vektörlerin sırasının önemi yoktur. Çıkarılacak vektörleri varsa yine 180 derece çevrilir.



$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = ?$

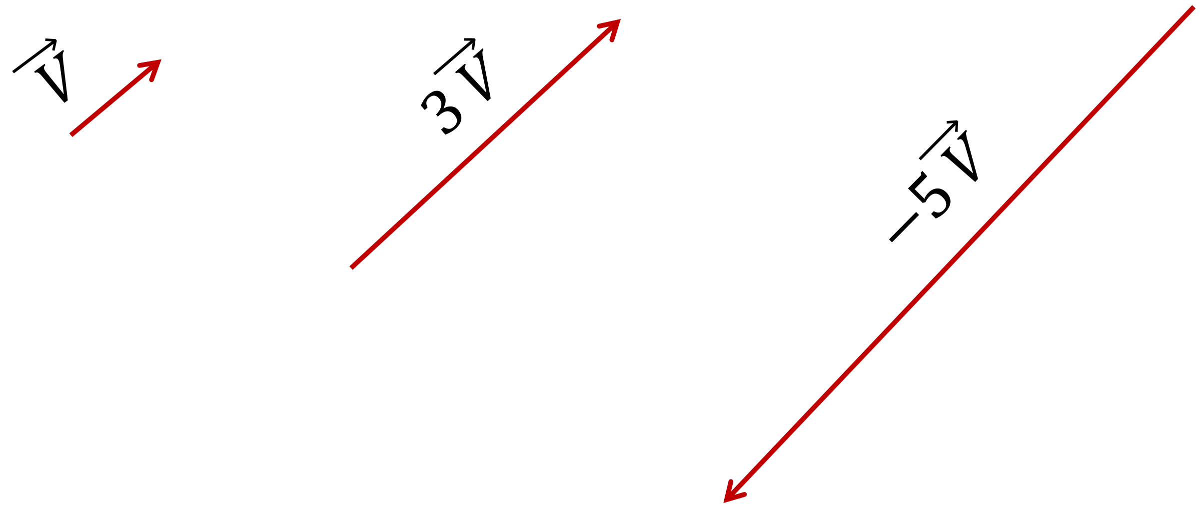


$\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = ?$



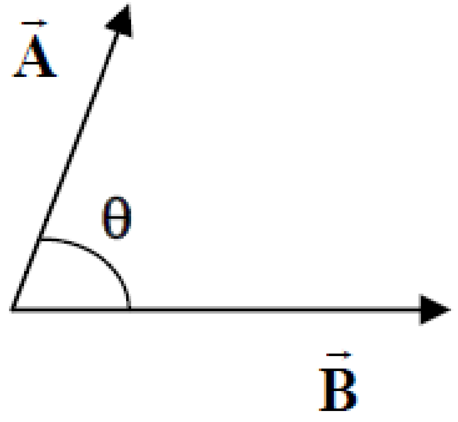
1.9 Bir vektörün bir skalerle (bir katsayı ile) çarpımı:

- Sonuç, başka bir vektördür.
- Sonuç vektörün şiddeti = (çarpılan vektörün şiddeti) x (katsayı)
- Sonuç vektörü, ilk vektöre paraleldir ancak yönü değişebilir.
- Eğer çarpım katsayısı pozitif ise sonuç vektörü aynı yönde, katsayı negatif ise zıt yönde (180 derece ters yönde) olur.



1.10 İki Vektörün Birbirleriyle Skaler Çarpımı (.) :

- Sonuç bir skalerdir (bir sayıdır).
- Bu sayı; her iki vektörün şiddetleri ve aralarındaki açının cosinüsünün çarpılmasıyla bulunur.
- Skaler çarpımda arada **.** (nokta) kullanılır.



$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\cos\theta \qquad \text{(D 1.1)}$$

Örneğin; Şiddetler : A = 5, B = 4 ve $\theta = 60^o$ $\Longrightarrow$ $\vec{A}.\vec{B}$ = 5.4.Cos60^o = 10

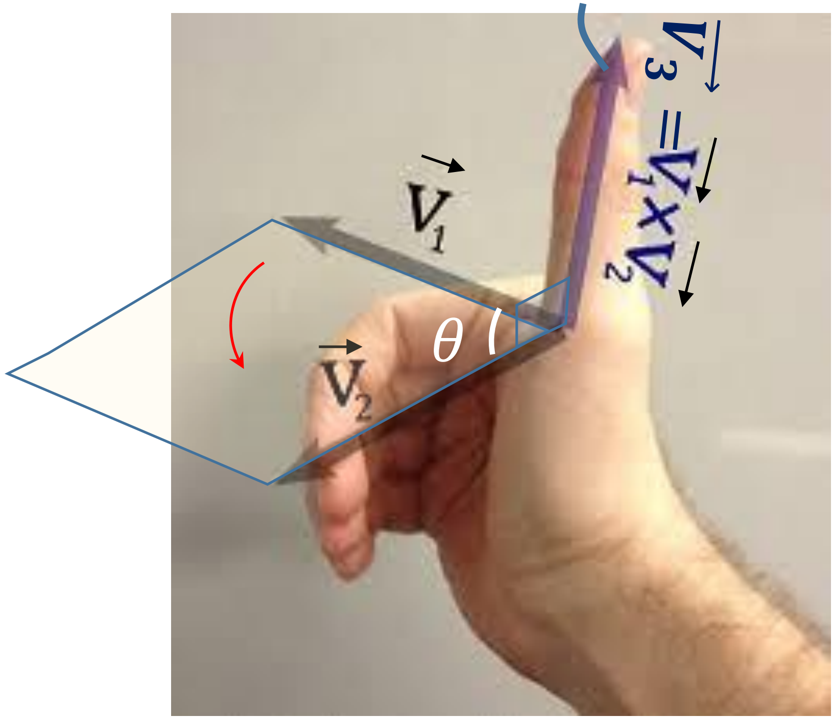
Hatırlatma: bir vektörün üzerinde ok yoksa bu «şiddeti» anlamına gelir.

*Örneğin $\vec{A}$ vektörünün şiddeti **A** ile gösterilir. Şiddetin gösterimi için bir başka alternatif ise $|\vec{A}|$ dır.*

1.11 İki Vektörün Birbiriyle Vektörel Çarpımı (x):

- **Sonuç** başka bir vektördür.
- **Sonuç vektörünün şiddeti** :her iki vektörün şiddetleri ve aralarındaki açının sinüsünün çarpılmasıyla bulunur.
- **Sonuç vektörünün yönü**: çarpılan vektörlerin bulunduğu ortak düzleme diktir ve sağ el kaidesiyle bulunur.
- **Sağ el kaidesi** : Çarpılan ilk vektör sağ elimizin 4 parmağıyla tutulur ve ikinci vektör üzerine kapatılır. Bu durumda baş parmağımızın yönü sonuç vektörünün yönünü verir.
- Vektörel çarpımda arada ' x ' veya '^' kullanılır.

Yönü:



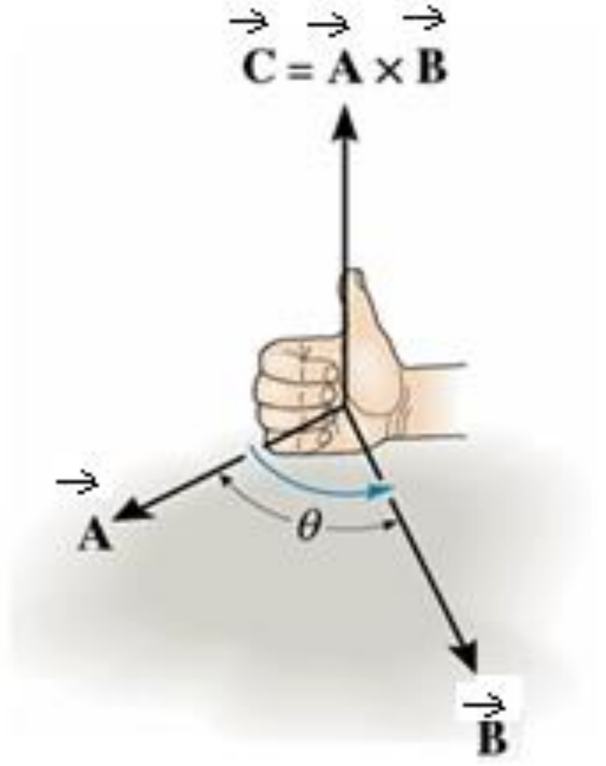
$$\overrightarrow{V_1} \text{ x } \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3}$$

Şiddeti: $V_3 = V_1 . V_2 . Sin\theta$ (D1.2)

1.12 Sağ el kaidesini tekrar edelim:

İlk çarpılan vektörü$(\vec{A})$, 2nci vektörün $(\vec{B})$ üzerine sağ elimizle dört parmağımızla kapatırız. Başparmağımızın yönü sonuç vektörünün $(\vec{C})$yönünü verir. Bu yön çarpılan vektörlerin düzlemine dik yöndür.

Vektörel çarpımda vektörlerin çarpım sırası önemlidir.



$$\vec{A}\,x\,\vec{B} \neq \vec{B}\,x\,\vec{A}$$

$$\vec{A}\,x\,\vec{B} = -(\vec{B}\,x\,\vec{A})$$

1.13 Vektörel Çapımda Dağılma Özelliği :

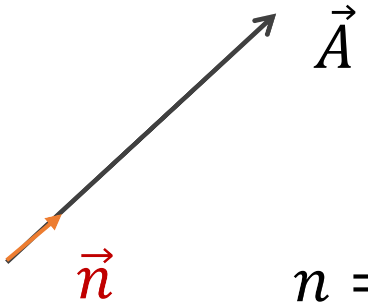
Reel sayılardaki bu özellik vektörler için de geçerlidir. Yani:

$$\vec{A}\,x\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\,x\,\vec{B} + \vec{A}\,x\,\vec{C} \qquad \text{(D1.3)}$$

Yapraksız kaldın diye gövdeni kestirme. Zira bu işin baharı da var. (Mevlana)

1.14 Birim Vektör ($\vec{n}$):

Herhangi bir doğrultuda, şiddeti 1 birim olan vektördür.



$n = 1$

Birim vektör nasıl bulunur? : Birim vektör; kendisiyle aynı yönde olan bir vektörün kendi şiddetine bölünmesiyle bulunur.

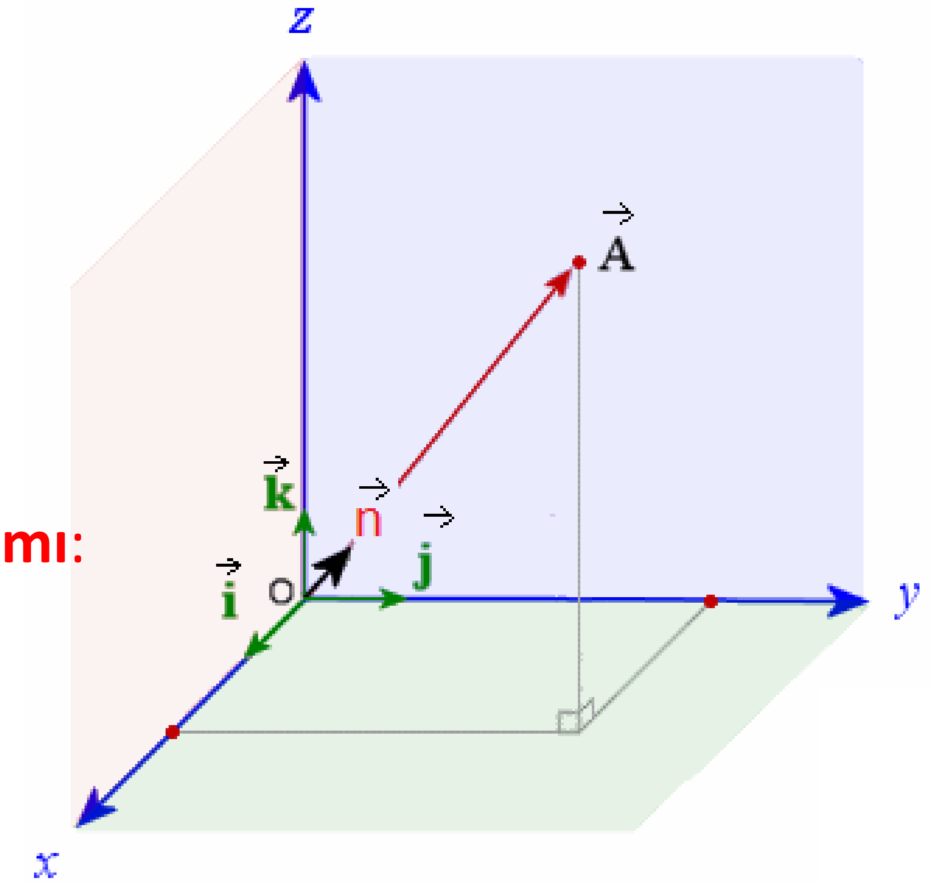
$$\vec{n} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad \text{(D1.4)}$$

Bu tanıma göre; $$\vec{A} = A.\vec{n} \qquad \text{(D1.5)}$$

D1.5 denklemi bize der ki: Bir vektörün şiddeti belli iken, vektörel ifadesini bulmak istiyorsan; vektörün şiddeti ile vektörle aynı yöndeki birim vektörü çarp.

Not: Birim vektör ise aynı yönde başka bir vektörün yardımıyla D1.4 denklemi ile bulunur. Bununla ilgili örnekler ileride verilecektir.

1.15 Kartezyen birim vektörler ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)



Kartezyen koordinatlarda eksenler (x,y,z) doğrultularındaki birim vektörler, özel olarak $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ile sembolize edilir. Bunlar birbirlerine dik birim vektörlerdir.

1.16 Kartezyen birim vektörlerin birbirleriyle vektörel çarpımı:

Örneğin $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ vektörlerini birbiriyle vektörel çarpımının sonucunu arıyoruz. $(\vec{i})x(\vec{j})$ =?

Vektörel çarpım gereği sonuç başka bir vektördür.

Çıkan sonuç vektörünün şiddeti:

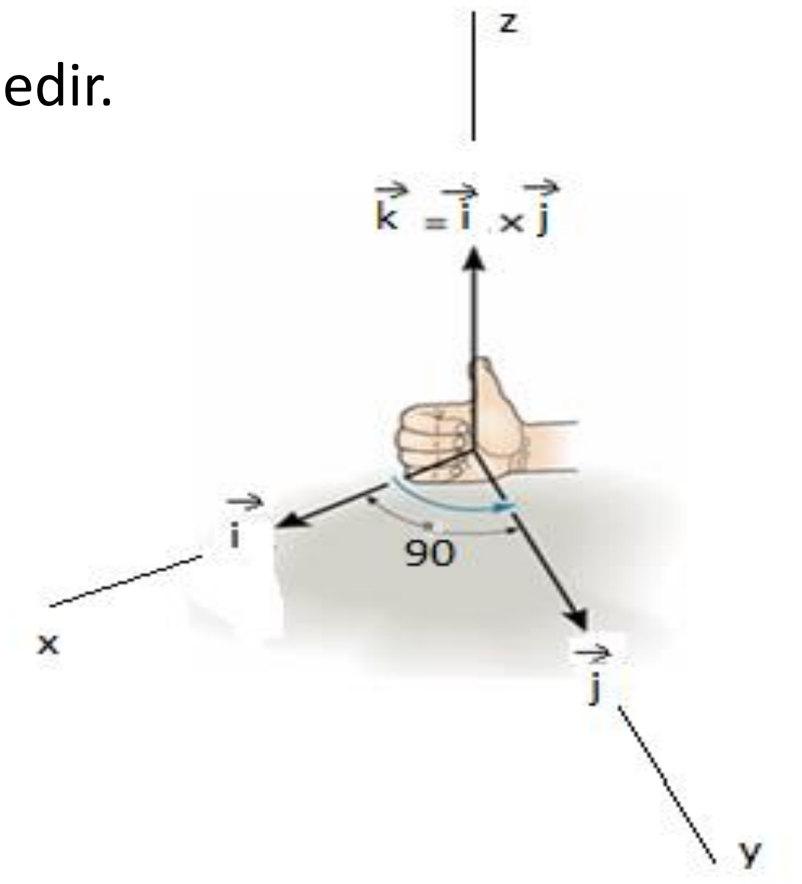
Çarpılan vektörlerin şiddeti ile aralarındaki açının sinüsünün çarpılır. $|\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^0 = 1.1.1 = 1$

Çıkan sonuç vektörünün yönü: Sağ el kaidesiyle +z yönündedir.

Sağ elimizin dört parmağıyla çarpılan 1. vektörü (i) tutup,

2.vektör (j) üzerine kapayınca, baş parmağımızın yönü

sonuç vektörünün yönünü gösterir.



Sonuç vektörü, +z doğrultusunda 1 birim şiddetinde

çıkmıştır. Bu ise $\vec{k}$ vektörüdür.

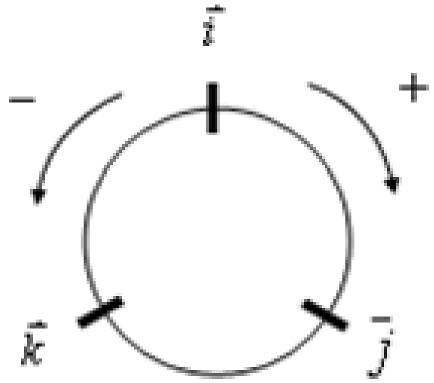
O halde; $\vec{\imath} x \vec{\jmath} = \vec{k}$

Benzer şekilde: $\vec{k} x \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$ ve $\vec{k} x \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ olduğunu görmeye çalışınız.

O halde, Kartezyen birim vektörlerin ikisinin birbiriyle çarpımı diğer kartezyen birim vektöre eşittir. İşareti ise sağ el kaidesiyle tespit edilir.

1.17 Şema yardımı ile Kartezyen birim vektörlerin vektörel çarpımı:

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ vektörlerinde herhangi ikisinin çarpımı diğer 3ncü vektörü verir. İşareti ise yandaki şema yardımıyla bulunur. Çarpılan ilk vektörden, çarpılan ikinci vektöre gidiş yolu saat ibresi yönünde ise sonuç pozitif, aksi halde negatiftir.



Örn-1: $\vec{\jmath} x \vec{k} = \vec{\imath}$ Şemada $\vec{\jmath}$ den $\vec{k}$ ya gidiş saat ibresi yönünde olduğundan çıkan sonuç + $\vec{\imath}$ dir.

Örn-2: $\vec{\imath} x \vec{k} = \overrightarrow{-\jmath}$ Şemada $\vec{\imath}$ den $\vec{k}$ ya gidiş saat ibresi tersi yönünde olduğundan çıkan sonuç - $\vec{\jmath}$ dir.

$\vec{\jmath} x \vec{\imath} = \overrightarrow{-k}$ olduğunu görmeye çalışın.

Kartezyen Birim vektörlerin kendisi ile vektörel çarpımı sıfırdır. Çünkü aralarındaki açı 0° dir.

Örneğin; $\vec{\imath} x \vec{\imath} = ?$ ⟶ Şiddeti : $|\vec{\imath}||\vec{\imath}| \sin 0^0 = 1.1.0 = 0$ ⟶ $\vec{\imath} x \vec{\imath} = 0$

Benzer şekilde: $\vec{\jmath} x \vec{\jmath} = \vec{k} x \vec{k} = 0$

1.18 Kartezyen birim vektörlerin skaler çarpımı:

1.10 maddesinden biliyoruz ki, skaler çarpımda, sonuç bir sayıdır ve çarpılan vektörlerin şiddeti ile aralarındaki açının cosinüsü çarpılır. Kendi aralarındaki açı 0^o, diğerleriyle aralarındaki açı 90^o dir. Buna göre;

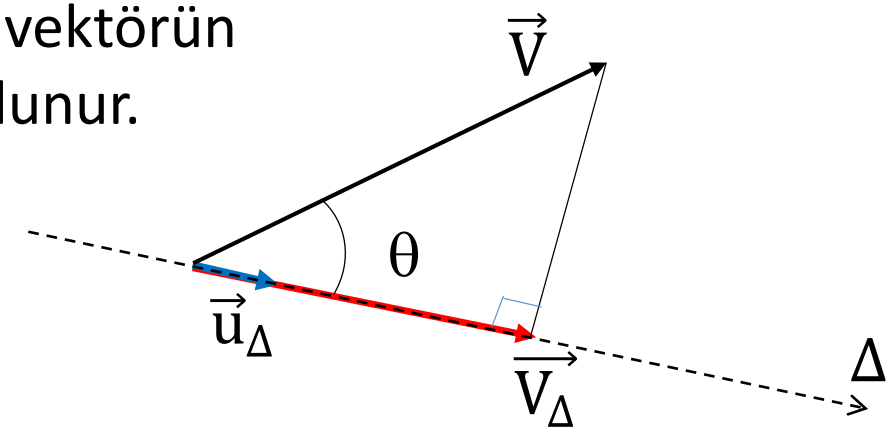
Kartezyen birim vektörlerin kendisiyle skaler çarpımı sonucu 1 dir.

Örneğin: $\vec{\imath}.\vec{\imath} = |\vec{\imath}|.\,|\vec{\imath}|$.Cos 0^o=1.1.1 =1

Kartezyen birim vektörlerin birbirleriyle skaler çarpımı sonucu 0 (sıfır) dır.

Örneğin: $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = |\vec{\imath}|.\,|\vec{\jmath}|$.Cos 90^o=1.1.0 =0

1.19 İzdüşüm : Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü vektörün bitim noktasından o eksene inilen dik ile bulunur.



$\vec{V}_\Delta$: $\vec{V}$ vektörünün Δ eksenindeki izdüşümüdür.

$\vec{u}_\Delta$: Δ eksenindeki birim vektör

a- İzdüşümün şiddetini nasıl buluruz? (V_Δ=?)

$$V_\Delta = |\vec{V}| cos\theta \qquad \text{veya} \qquad V_\Delta = \vec{V} \,.\, \vec{u}_\Delta \qquad \text{(D1.6)}$$

D1.6 denklemi der ki: Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümünün şiddeti o vektörün o eksendeki birim vektörle skaler çarpımına eşittir.

b- İzdüşümün vektörel ifadesini nasıl buluruz? ($\vec{V}_\Delta$=?)

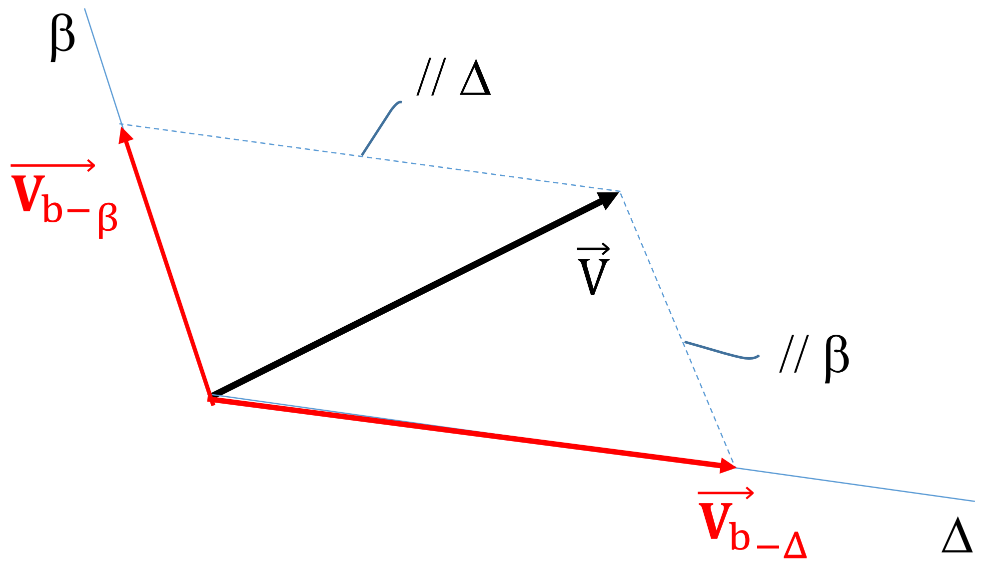
D1.5 denklemini önce hatırlamakta fayda var: Bir vektör, kendi şiddeti ile kendisiyle aynı yöndeki birim vektörün skaler çarpımına eşittir.

Buna göre : $$\vec{V}_\Delta = V_\Delta . \vec{u}_\Delta \qquad \text{(D1.7a)}$$

D1.6 denklemini de düşünürsek izdüşüm vektörü : $$\boxed{\vec{V}_\Delta = (\vec{V} \,.\, \vec{u}_\Delta) . \vec{u}_\Delta} \qquad \text{(D1.7b)}$$

1.20 Bileşen:

Bir vektörün 2 farklı eksen üzerindeki bileşenlerini bulmak için, vektörün ucundan (bitim noktasından) her bir eksene paralel çizgiler çizeriz. Bu çizgilerin eksenleri kestiği noktalar vektörün bileşenlerini verir.

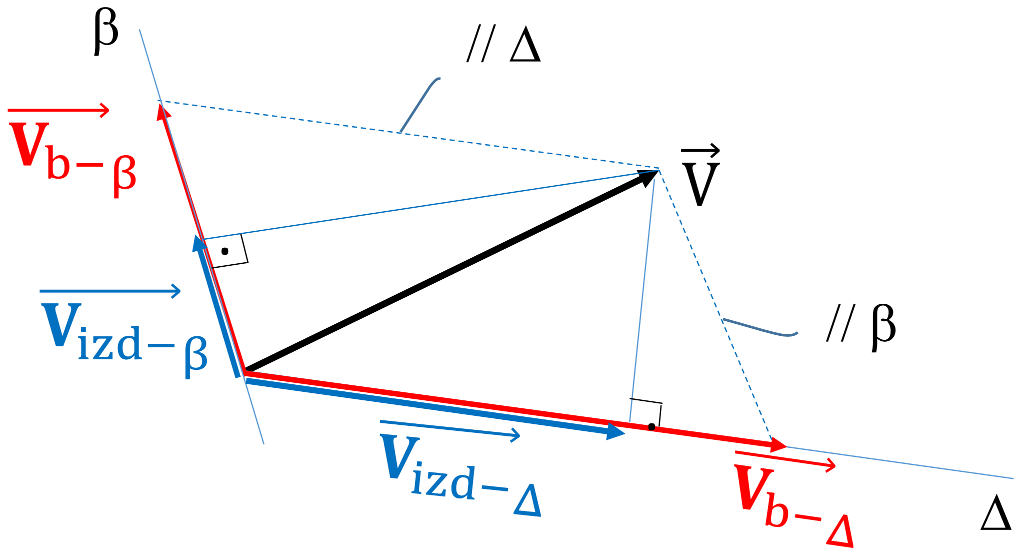


$\overrightarrow{\mathbf{V}_{b-\beta}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{V}_{b-\Delta}}$: β ve Δ eksenlerindeki bileşenleridir.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathbf{V}_{b-\beta}} + \overrightarrow{\mathbf{V}_{b-\Delta}} \qquad \text{(D1.8)}$$

P.N 1.2 : İki vektörün toplama işleminde (bk: 2.8), toplanan vektörlerin aslında bileşenler olduğuna dikkat ediniz.

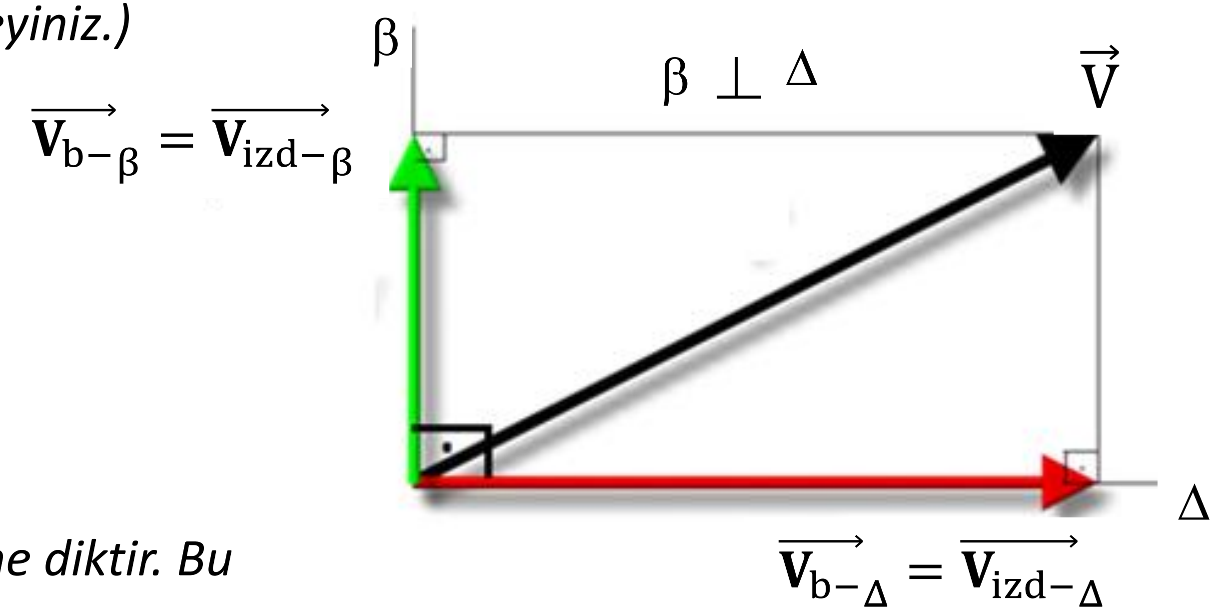
1.21 Bileşen ile İzdüşüm Arasındaki Fark:



- Yandaki şekilde bu fark net olarak görülmektedir.
- İzdüşüm için tek, bileşen için iki eksenin varlığı gerekli olduğuna dikkat ediniz.

(Anlamadı iseniz 1.19 ve 1.20 maddelerini tekrar inceleyiniz.)

1.22 Bileşenle İzdüşüm Ne zaman çakışır?



Eksenler birbirine dik olduğunda bileşen ve izdüşümler üst üste çakışır ve aynı olur.

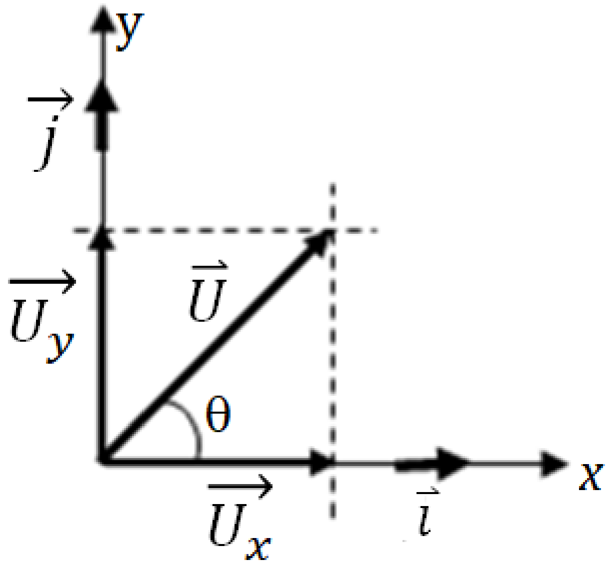
Dikkat: Kartezyen koordinat eksenleri (x,y,z) birbirlerine diktir. Bu sebeple bu eksenlerdeki izdüşümler, aynı zamanda bileşenlerdir.

1.23 Bir Vektörün Kartezyen Bileşenleri

Düzlemde (iki boyutlu halde)

Bir $\vec{U}$ vektörünü x ve y eksenlerinde bileşenlerine ($\overrightarrow{U_x}$, $\overrightarrow{U_y}$) ayırıyoruz.

Bu bileşenler aynı zamanda izdüşümlerdir. Çünkü eksenler diktir. (bk:1.22)



$$\vec{U} = \overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}$$

D1.5 denklemine göre bir vektör, şiddeti ile birim vektörün çarpımına eşit idi. O halde :

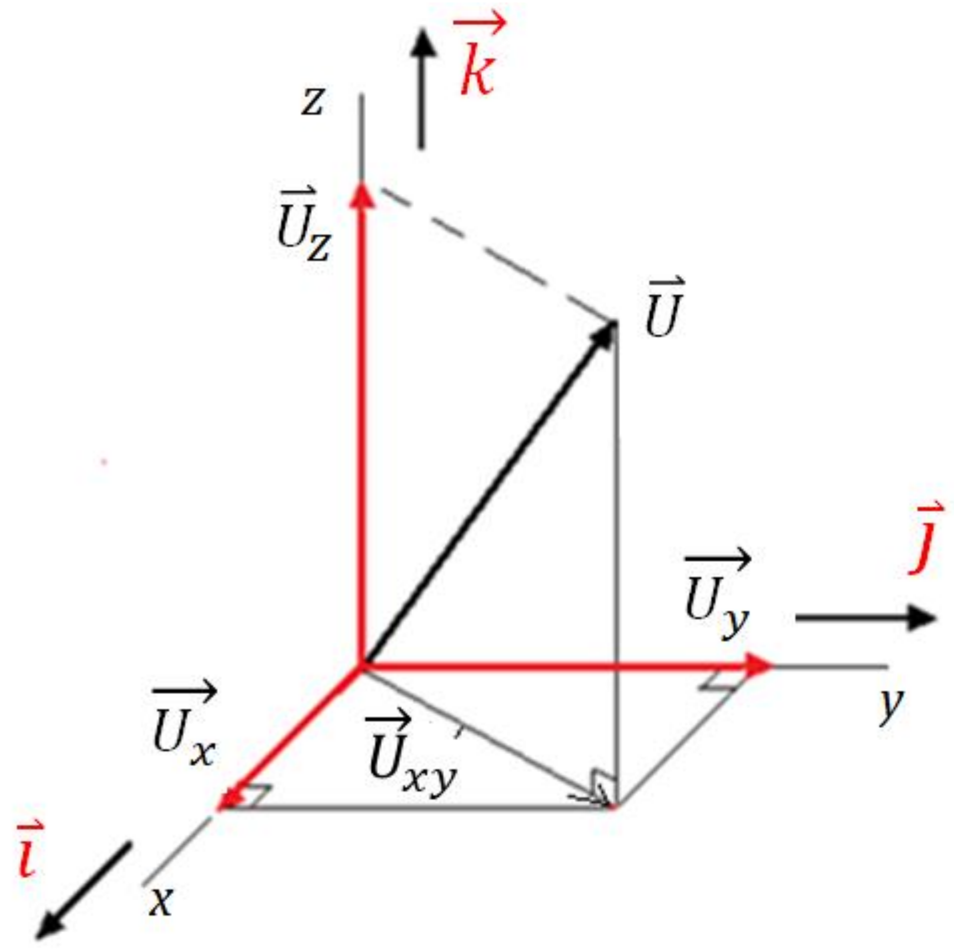
$$\overrightarrow{U_x} = U_x\vec{\imath}, \qquad \overrightarrow{U_y} = U_y\,\vec{j}$$ *yazılabilir.*

$$\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath}$$

Yatayla yaptığı açı: $\quad tan\theta = \dfrac{U_y}{U_x}$

Kartezyen bileşenleri belli olan bir vektörün şiddeti : $\quad U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \qquad$ (D1.9a)

Üç boyutlu durumda ilaveten U_z bileşeni de gelir.



$$\vec{U} = U_z \vec{i} + \vec{U}_{xy}$$

$$\vec{U}_{xy} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j}$$

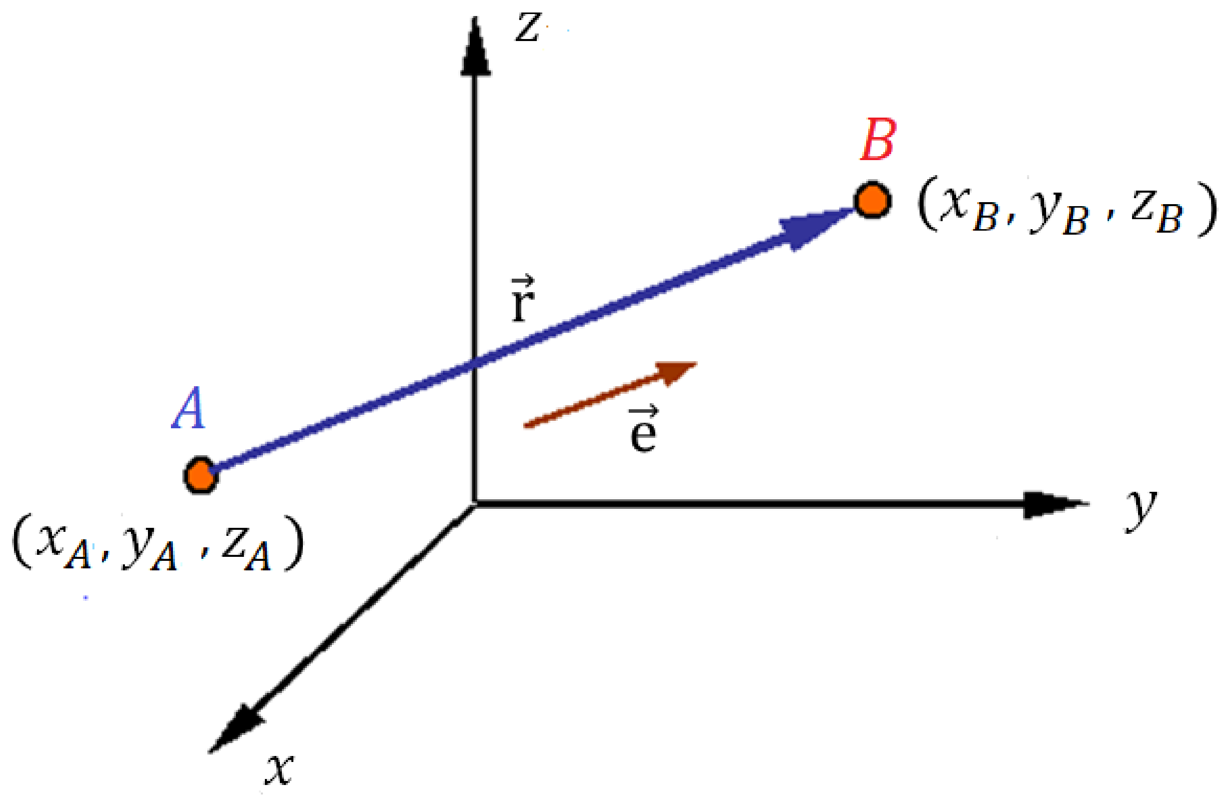
$$\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$$

Kartezyen bileşenleri belli olan vektörün şiddeti: $U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ (D1.9b)

1.24 Konum Vektörü:

Başlangıç ve bitiş noktasının koordinatları belli olan bir konum vektörü şu şekilde bulunur:

(Bitiş noktasının koordinatlarından başlangıç noktasının koordinatları sırayla çıkarılır.)



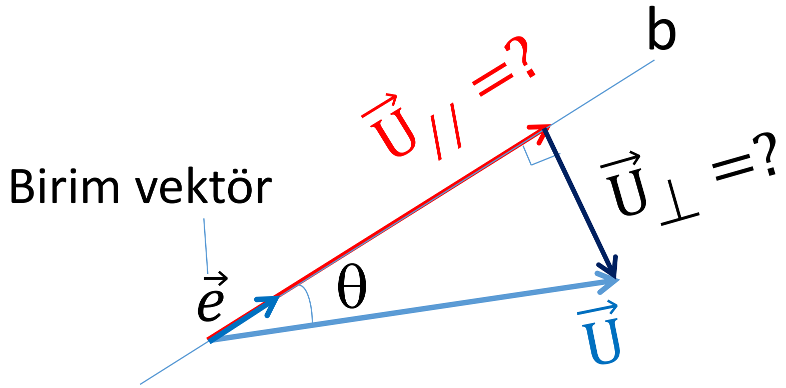
Konum vektörü: $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$ (D1.10)

Konum vektörünün Şiddeti: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ (D1.11)

Konum vektöründen birim vektörün bulunması: $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ (D2.12)

1.25 Bir Vektörün Bir Eksene Paralel ve Dik Bileşenini nasıl buluruz?

$\vec{U}$ ve $\vec{e}$ vektörleri *belli iken b eksenine paralel ve dik bileşenlerini arıyoruz*



$$\vec{U}_{//} = ? \qquad \vec{U}_{\perp} = ?$$

a-) Önce paralel bileşenin şiddetini $(\vec{U}_{//})$ *bulalım.*

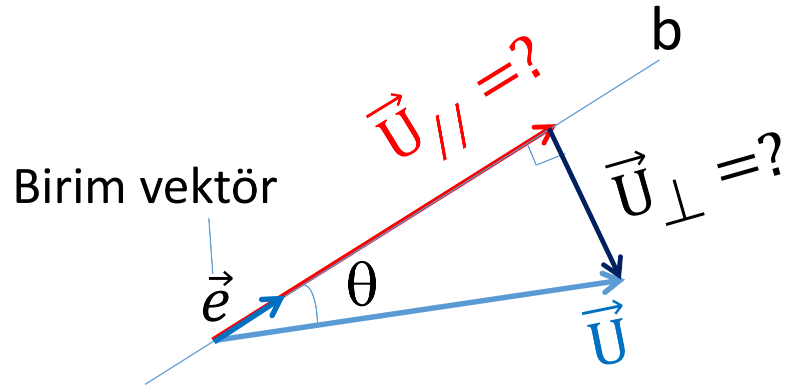
D1.6 denklemine göre, bir vektörü başka bir doğrultudaki birim vektörle skaler çarparsak, birim vektörün doğrultusuna paralel izdüşümünün şiddetini buluruz.

Yani; $$U_{//} = \vec{U}.\vec{e}$$

(2nci eksen b eksenine dik olduğundan $U_{//}$ *aynı zamanda bileşen olur. bk.: konu 1.22)*

b-)Şimdi paralel bileşenin vektörel ifadesini ($\vec{U}_{//}$) bulalım.

1.5 denklemine göre, bir vektörün vektörel ifadesini bulmak istersek; vektörün şiddeti ile kendi doğrultusundaki birim vektörün skaler çarparız.



Yani: $\vec{U}_{//} = U_{//}.\vec{e} \longrightarrow \vec{U}_{//} = (\vec{U}.\vec{e})\vec{e}$ (D1.13)

c-) Dik bileşen: $\vec{U}_{\perp} = \vec{U} - \vec{U}_{//}$

Şunları da görebilmek gerekir:

- *D1.7 denklemi ile D1.13 denklemleri aslında aynı şeyi ifade eder.*
- Ayrıca: Şiddetleri şu şekilde de bulunabilir: $U_{\perp} = U.\sin\theta$, $U_{//} = U.\cos\theta$

1.26 Vektörel çarpımın matris formatı:

Vektörel çarpımı yaparken aşağıdaki gibi oluşturulan matrisin detarminantını da almak mümkündür. Bu şekilde $\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ birim vektörlerinin katsayıları daha kolay bulunabilir.

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\vec{\mathrm{i}} + A_y\vec{\mathrm{j}} + A_z\vec{\mathrm{k}} \quad , \quad \vec{\mathbf{B}} = B_x\vec{\mathrm{i}} + B_y\vec{\mathrm{j}} + B_z\vec{\mathrm{k}} \qquad \vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(D1.14)}$$

Örnek:

$\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ *vektörü ile* $\vec{B} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ *vektörünün vektörel çarpımını hesaplayınız.*

Çözüm:

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 6 & 3 & 2 \\ 12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = (3\mathrm{x}4 - 2\mathrm{x}3)\vec{\mathbf{i}} - (2\mathrm{x}12 - 6\mathrm{x}4)\vec{\mathbf{j}} + (6\mathrm{x}3 - 3\mathrm{x}12)\vec{\mathbf{k}} \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = 6\vec{\mathrm{i}} - 18\vec{\mathrm{k}}$$

1.27 Karışık Üçlü Çarpım: *2 vektörün vektörel çarpımı ile 3ncü bir vektörün skaler çarpımı söz konusu ise yine matris formatında çarpım yapılabilir.*

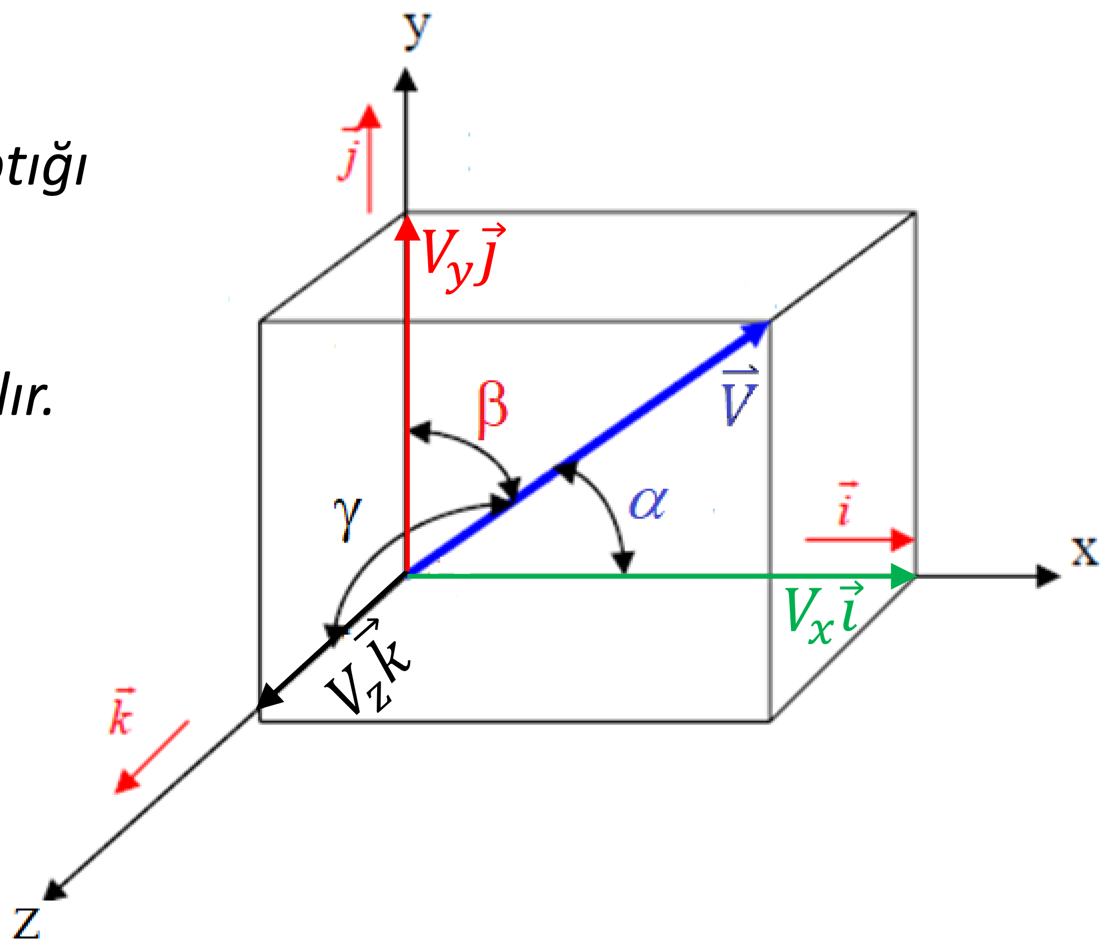
$$\left.\begin{aligned}\vec{U} &= U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}\\ \vec{V} &= V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}\\ \vec{W} &= W_x\vec{\imath} + W_y\vec{\jmath} + W_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \quad \vec{U}\cdot\left(\vec{V}\times\vec{W}\right) = \left(U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}\right) . \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ V_x & V_y & V_z\\ W_x & W_y & W_z\end{vmatrix} \qquad \text{(D1.15)}$$

$$\vec{U}\cdot\left(\vec{V}\times\vec{W}\right) = \begin{vmatrix}U_x & U_y & U_z\\ V_x & V_y & V_z\\ W_x & W_y & W_z\end{vmatrix} \qquad \text{(D1.16)}$$

Bir kuvvetin bir eksene göre momenti alınırken bu işlem pratik bir çözüm olabilir. İleride bu konu anlatılacaktır.

1.28 Doğrultman Kosinüsleri

Bir vektörün Kartezyen eksenlerin her birisi ile yaptığı açıların (α, β, γ) Kosinüslerine doğrultman kosinüsleri denir. Mukavemetle ilgili bazı hesaplamalarda daha pratik çözümler için kullanılır.



$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}$$

<u>Doğrultman Kosinüsleri</u>

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{|\vec{V}|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{V_y}{|\vec{V}|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{|\vec{V}|} \qquad \text{(D1.17)}$$

Şimdi vektörlerle ilgili bilgilerimizin zihnimizde daha iyi yerleşmesi için çeşitli örnekler inceleyeceğiz….>>

Vektörlerle ilgili

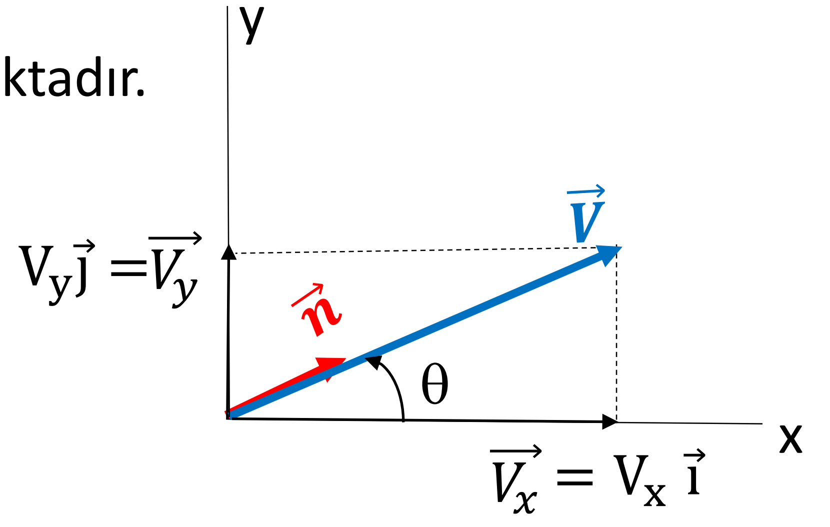
(Örnekler)

Örnek 1.1 (video 1.b, örnek 1.2)

80 birim şiddetindeki V vektörü, +x ekseni ile $\theta = 30^0$lik açı yapmaktadır.

a-) $\vec{V}$ vektörünü bulunuz.

b-) $\vec{V}$ ile aynı doğrultudaki birim vektörü elde ediniz.



Çözüm:

a-)

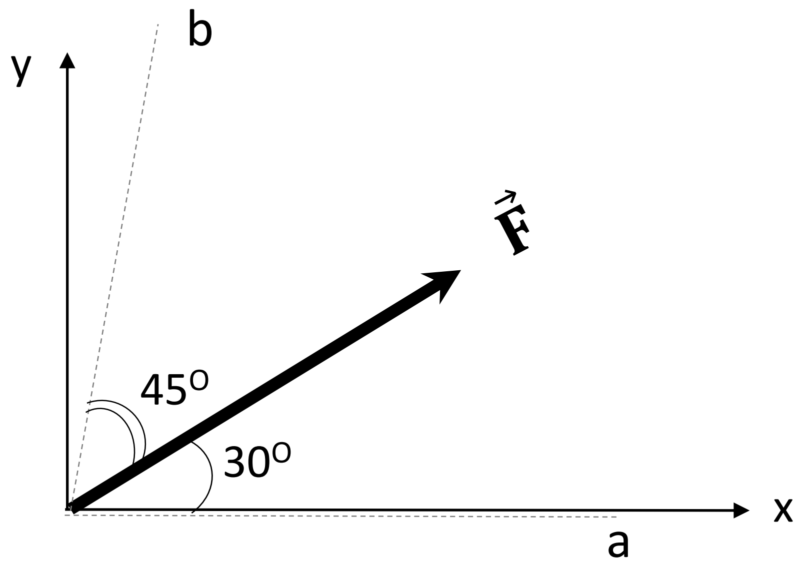
$$\left.\begin{aligned} V_x &= |\vec{V}|\cos\theta \longrightarrow V_x = 80\cos 30^0 = 69.28 \text{ birim} \\ V_y &= |\vec{V}|\sin\theta \longrightarrow V_y = 80\sin 30^0 = 40 \text{ birim} \end{aligned}\right\} \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

$$\rightarrow \vec{V} = 69.28\vec{i} + 40\vec{j}$$

b-) *D1.4 denkleminden birim vektör* ($\vec{n}$):

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{V_x} + \vec{V_y}}{|\vec{V}|} = \frac{V_x}{|\vec{V}|}\vec{i} + \frac{V_y}{|\vec{V}|}\vec{j} = \frac{69.28}{80}\vec{i} + \frac{40}{80}\vec{j} \longrightarrow$$

$$\vec{n} = 0.866\vec{i} + 0.5\vec{j}$$

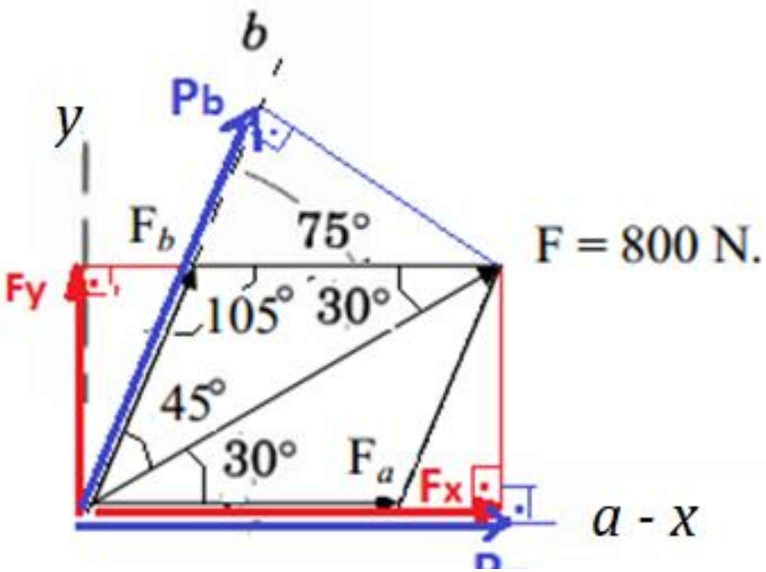


Örnek 1.2
(video 1.b, örnek 1.3)

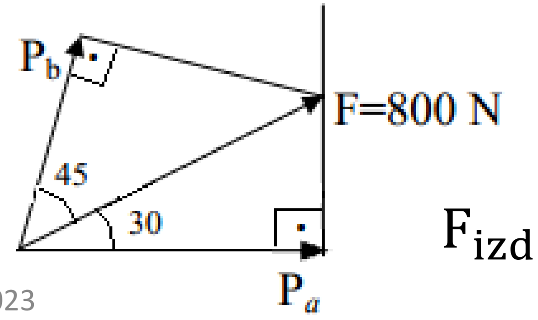
800 N şiddetindeki F kuvvetinin,

a-) x ve y eksenlerindeki bileşenlerini ve izdüşümlerini,

b-) a-b doğrultularındaki bileşenlerini ve izdüşümlerini bulunuz.



a ve b doğrultularındaki izdüşümler ;



Çözüm:

a-) x ve y doğrultularındaki bileşenler;

$$F_x = F\cos30° = 800\cos30° = 693 \text{ N}$$

$$F_y = F\sin30° = 800\sin30° = 400\text{N}$$

Not: x-y birbirine dik olduğu için bileşenler aynı zamanda izdüşümlere eşit olur.

b-) a ve b doğrultularındaki bileşenler;

$$\frac{\sin105^\circ}{800} = \frac{\sin30^0}{F_{bil-b}} \Rightarrow F_{bil-b} = F_b \cong 414 \text{ N} \quad ,$$

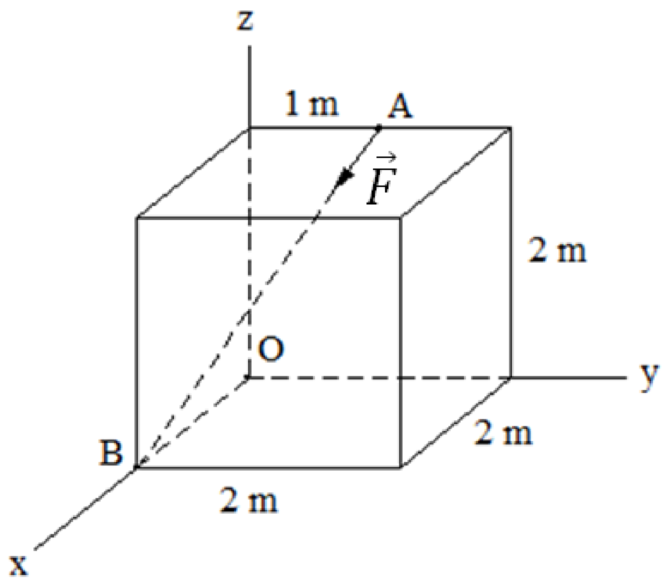
$$\frac{\sin105^\circ}{800} = \frac{\sin45^0}{F_{bil-a}} \Rightarrow F_{bil-a} = F_a \cong 586 \text{ N}$$

$$F_{izd-a} = P_a = 800\text{x}\cos30° \cong 693 \text{ N} \;, \quad F_{izd-b} = P_b = 800\text{x}\cos45° = 566 \text{ N}$$

Örnek 1.3:

(video 1.b, örnek 1.4)

Şiddeti F=18 birim olan $\vec{F}$ vektörünü, vektörel olarak ifade ediniz.



Çözüm:

- *D1.5 e göre bir vektör, şiddeti ile birim vektörün çarpımına eşittir.* $\vec{F} = F.\vec{n}$
- *D1.4 e göre birim vektör, kendi yönündeki konum vektörünün şiddetine bölümüne eşittir.* $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

A(0,1,2) , B(2,0,0)

$$\vec{F} = F\vec{n} = 18\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 18\frac{(2-0)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (0-2)\vec{k}}{|\overrightarrow{AB}|} = 18\frac{2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{18(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})}{3}$$

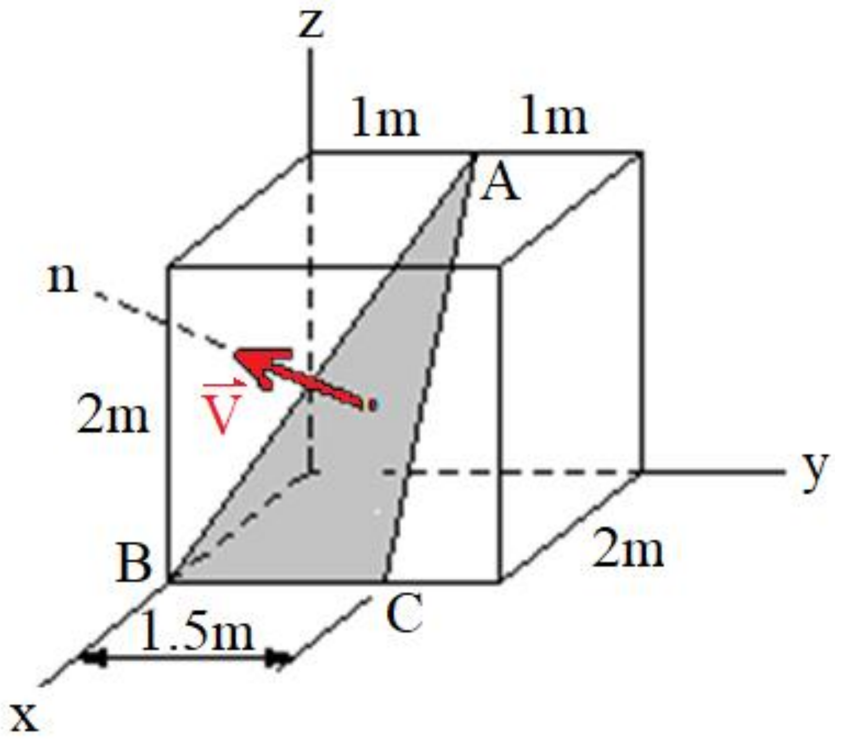
$$\rightarrow \vec{F} = 12\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

bulunur.

Bu örnekte cevaplarını bulduğumuz sorular:
1- Bir vektörün şiddeti ve vektör doğrultusu üzerinde 2 noktanın koordinatları belli iken vektörel ifadesini nasıl buluruz?
2- Başlangıç ve bitiş noktalarının yeri belli olan bir konum vektörünü ve aynı yöndeki birim vektörü nasıl buluruz?

Tut ki Ali'den sana miras kaldı Zülfikar. Sende Ali'nin yüreği yoksa Zülfikar neye yarar? (Mevlana)

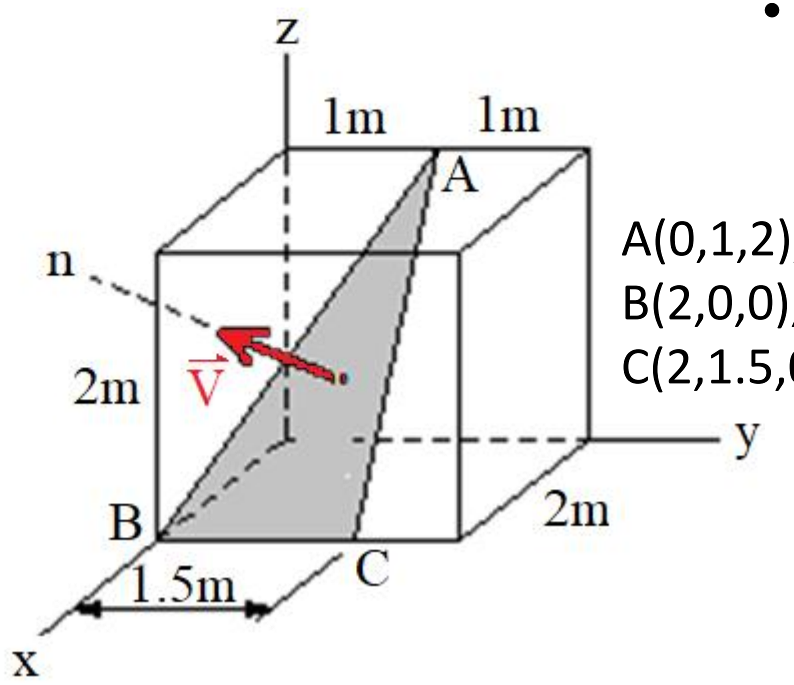
Örnek 1.4
(video 1.b, örnek 1.5)



Şiddeti V=5 birim ve ABC yüzeyinin normali doğrultusunda olan $\vec{V}$ vektörünü ifade ediniz.

Çözüm:

- Koordinatlar : A(0,1,2) , B(2,0,0), C(2,1.5,0)
- Bir vektör, kendi şiddeti ile birim vektörün çarpımına eşittir. $\vec{V} = V.\vec{n}$
- V=5 dir. O halde önemli olan $\vec{n}$ birim vektörünün bulunmasıdır.
- Birim vektör, kendi doğrultusunda herhangi bir vektörün şiddetine bölümü ile bulunur. $\vec{n} = \frac{\vec{T}}{T}$
- Şimdi önemli olan $\vec{n}$ doğrultusunda herhangi bir $\vec{T}$ vektörü elde etmektir.
- İki vektörün vektörel çarpımı, bulundukları düzleme dik (düzlem normali doğrultusunda) başka bir vektörü verir. Yönü ise sağ el kaidesine göre bulunur.



A(0,1,2),
B(2,0,0),
C(2,1.5,0)

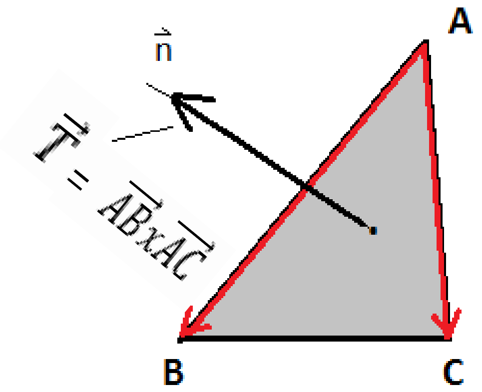
- Buna göre $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}$ yazılabilir. $\overrightarrow{AB}$ *ve* $\overrightarrow{AC}$ koyu düzlemdedir ve çarpımları +n normali doğrultusundadır. AB yi AC ye sağ elimizle kapatırsak baş parmağımız n doğrultusunu gösterir.

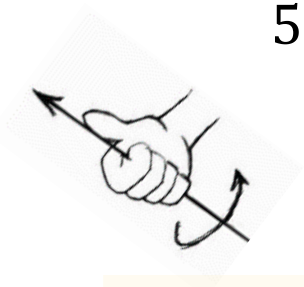
$$\overrightarrow{AB} = (2-0)\vec{\imath} + (0-1)\vec{\jmath} + (0-2)\vec{k} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-0)\vec{\imath} + (1.5-1)\vec{\jmath} + (0-2)\vec{k} = 2\vec{\imath} + 0.5\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

$$\vec{V} = V\vec{n} = 5\frac{\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|} = 5\frac{\left\{\left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)x\left(2\vec{\imath} + 0.5\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)\right\}}{\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|}$$

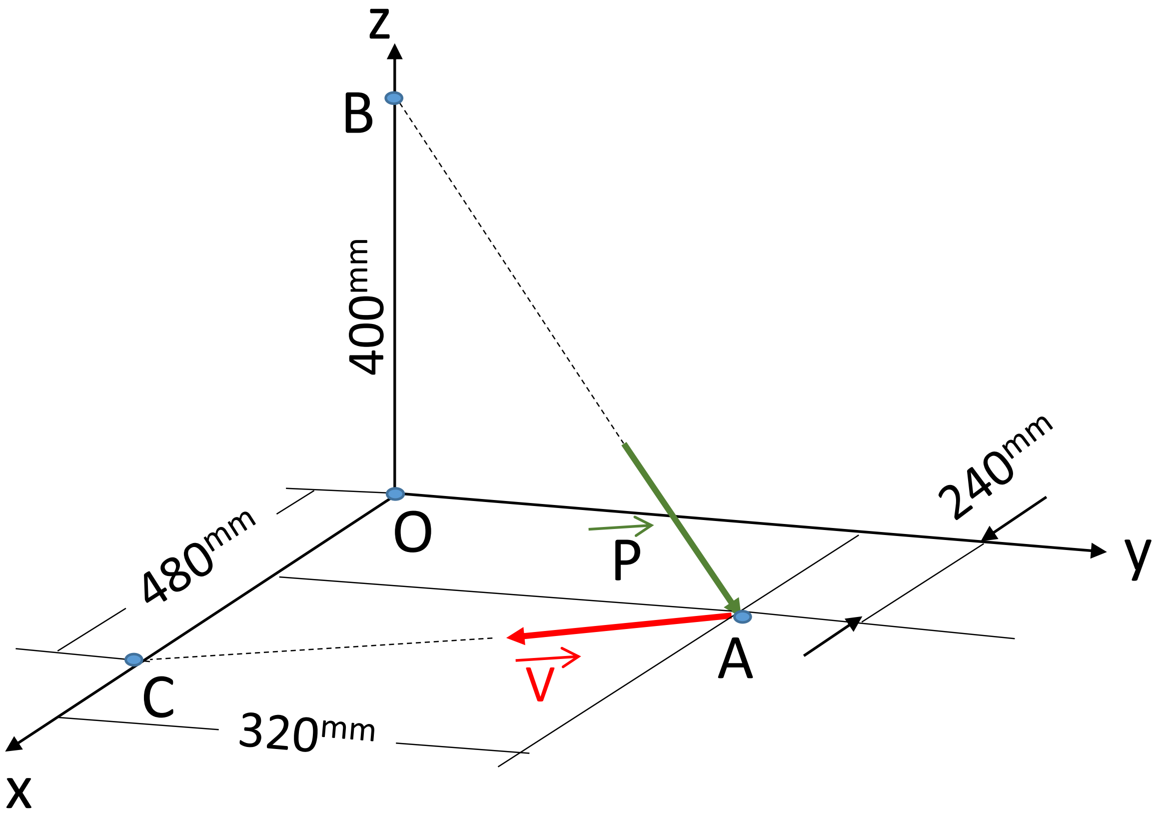
$$5\frac{(1\vec{k} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k} + 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 1\vec{\imath})}{\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|} = 5\frac{(3\vec{\imath} + 3\vec{k})}{\sqrt{3^2 + 3^2}} \rightarrow \vec{V} = 3.53\vec{\imath} + 3.53\vec{k}$$





Not: $\vec{T} = \overrightarrow{CA}x\overrightarrow{CB}$ *veya* $\vec{T} = \overrightarrow{BC}x\overrightarrow{BA}$ *şeklinde alınabilir.*
Önemli olan n doğrultusunda herhangi bir vektörün oluşmasıdır.

Bu örnekte cevaplarını bulduğumuz sorular:
1-Diyogonal (eğimli) bir düzleme dik bir vektörün şiddeti belli iken vektörel ifadesini nasıl buluruz?
2-Diyogonal bir düzlemin normali doğrultusundaki birim vektörü nasıl buluruz?



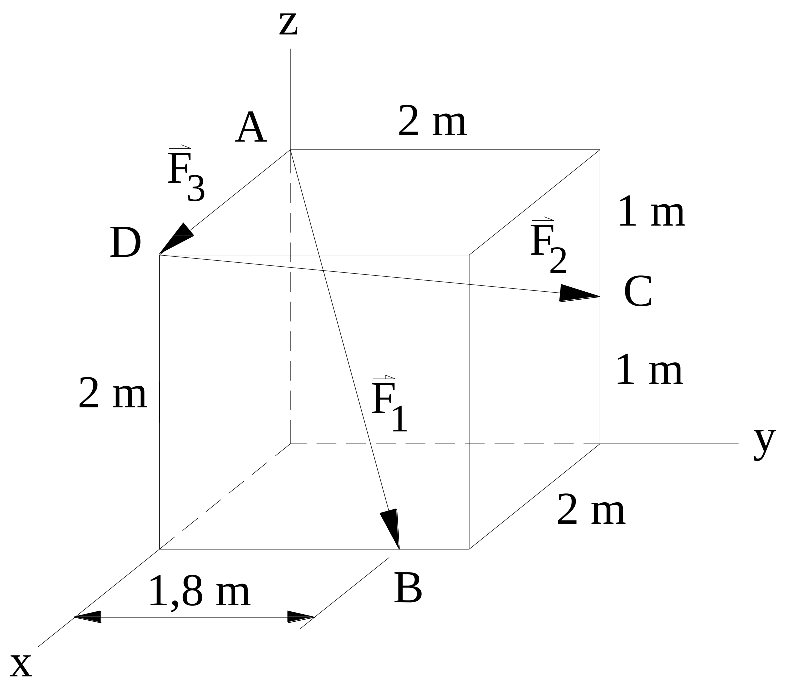
Örnek (Soru) 1.5

Şekildeki sistemde V vektörünün şiddeti 200, P vektörünün şiddeti 600 ise V ve P'nin vektörel ifadelerini bulunuz.

Cevaplar: $\vec{V} = 120\vec{\imath} + 160\vec{\jmath}$,

$$\vec{P} = 204.5\vec{\imath} + 339.4\vec{\jmath} - 424.25\vec{k}$$

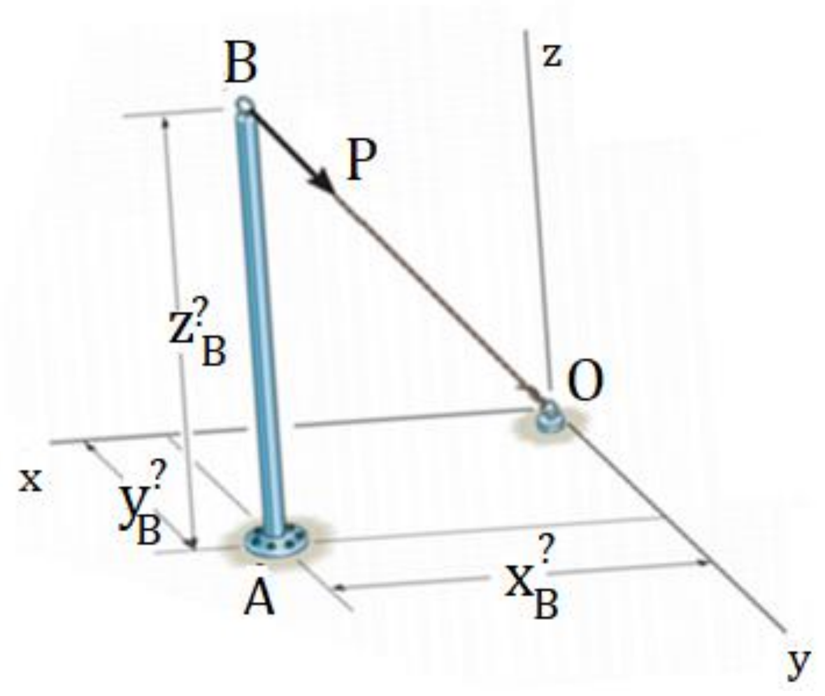
Örnek (Soru) 1.6 End. Statik 1.vize-2007



$\left|\overrightarrow{F_1}\right| = AB$; $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = DC$; $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = AD$ olduğuna göre

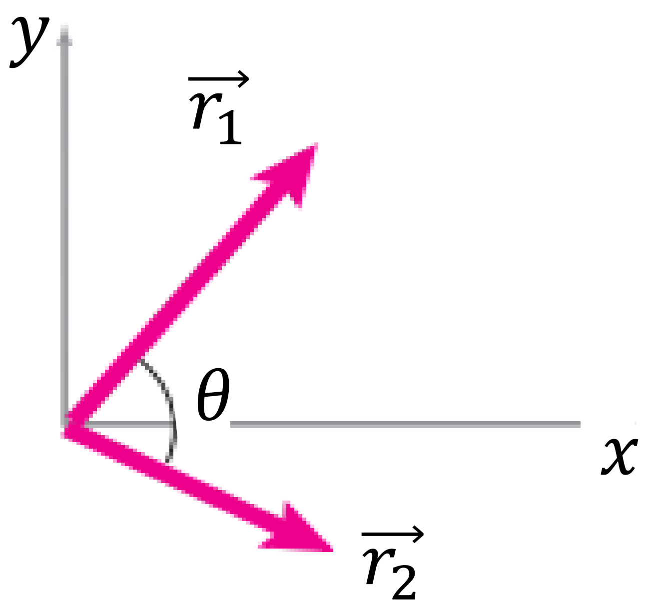
$\overrightarrow{F_1} x \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{F_3} =?$ işlemini hesaplayınız.

Cevap: $0.2\vec{i} + 6\vec{j} + 7.6\vec{k}$



Örnek 1.7 (*)

Şekildeki AB direğine bağlı BO halatına $\vec{P} = -120\vec{i} - 90\vec{j} - 80\vec{k}$ (N) luk bir kuvvet uygulanmıştır. Halatın uzunluğu 17 m olduğuna göre B noktasının koordinatlarını hesaplayınız. ***Cevap: B(12, 9, 8)***



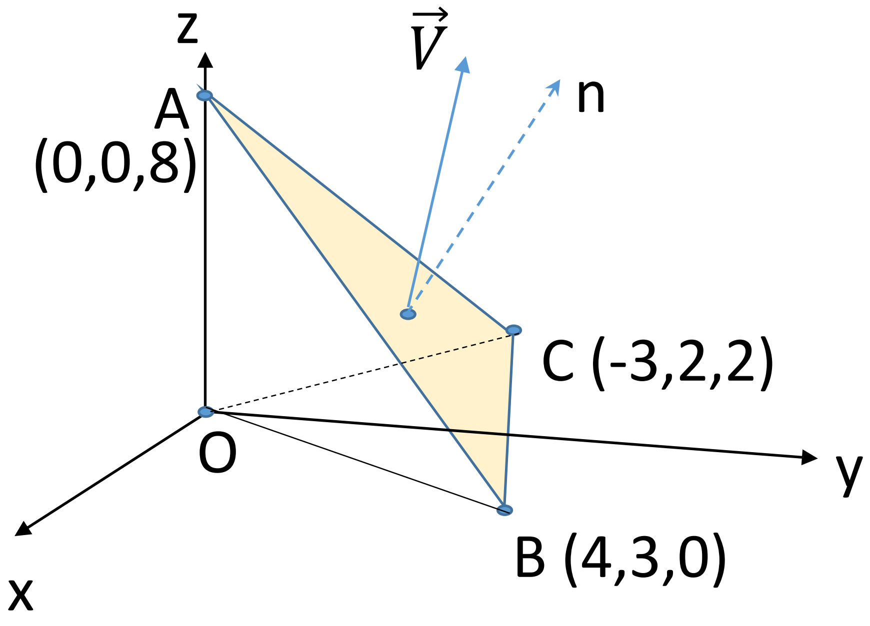
Örnek 1.8 (*) Şekilde gösterilen vektörler:

$\vec{r_1} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ve $\vec{r_2} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$ olarak veriliyor. Buna göre,

a-) bu vektörlerin arasındaki θ açısının değerini hesaplayınız.

b) Bu vektörlerin toplamının şiddetini hesaplayınız.

(Cevaplar : a-) 70.55^o b-) 10.05

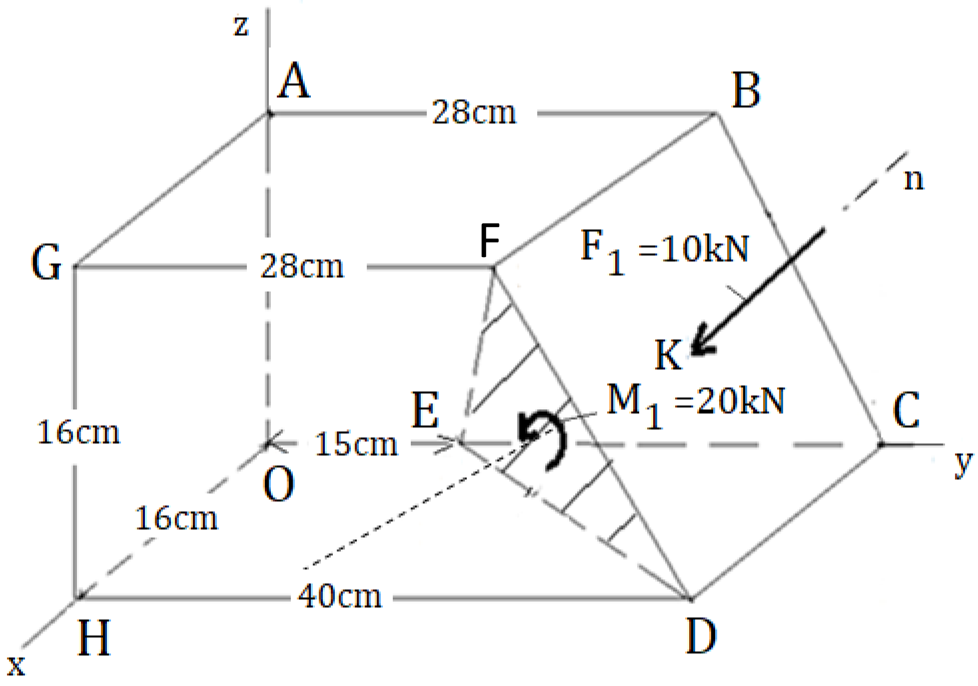


Örnek 1.9 (*)

Şekildeki sistemde $\vec{V} = -60\vec{\imath} + 40\vec{\jmath} + 20\,\vec{k}$ vektörünün ABC düzleminin normali doğrultusundaki izdüşümünü hesaplayınız.

Cevap: $\vec{V}_{izd} = -1.82\vec{\imath} + 43.97\vec{\jmath} + 15.54\vec{k}$

Örnek 1.10 (video 1b, örnek 1.6)



F_1=10kN (DCBF düzleminin tam ortasına dik uygulanmış); M_1= 20kNm (EFD düzlemine uygulanmış) ise, F_1 ve M_1 değerlerini vektörel olarak ifade ediniz.

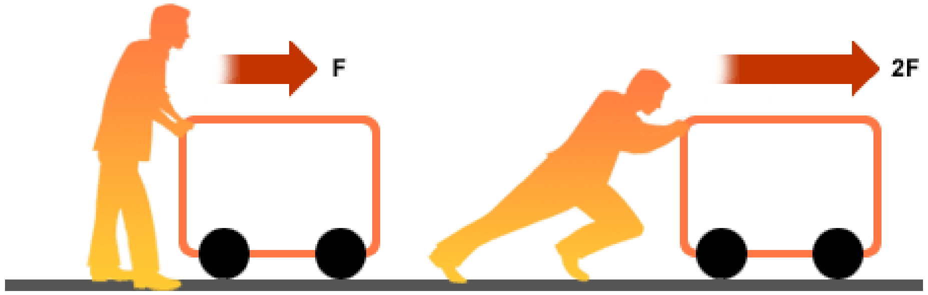
$\overrightarrow{F_1} = ?$ $\quad \overrightarrow{M_1} = ?$

Cevaplar: $\overrightarrow{F_1} = -8\vec{j} - 6\vec{k}$ $\quad \overrightarrow{M_1} = 15.6\vec{i} - 10\vec{j} - 7.4\vec{k}$

2

KUVVET SİSTEMLERİ

(Video 2a) , (Video 2b)



2.1 Konunun Önemi:

- ✓ Kuvvet vektörel bir büyüklüktür.
- ✓ Kuvvet Statik dersindeki en önemli kavramdır.
- ✓ Vektörler için yapılan tüm işlemler kuvvetler için de yapılabilir.
- ✓ Ayrıca kuvvetlerle yapılabilecek vektörel tanımlar ve işlemler vardır. Bunların öğrenilmesi dersin amaçları açısından çok önemlidir.
- ✓ Bu bölümdeki işlemleri iyice kavramamız durumunda statik denge problemlerini çok daha rahat ve anlayarak çözebileceğiz.

2.2 Kuvvet Nedir?

- Kuvvet, bir cisme dışarıdan uygulanan ve onu harekete zorlayan etkidir.
- Kuvvet Şiddeti, yönü ve uygulama noktası olan **vektörel** bir büyüklüktür.

2.3 Kuvvetin Etkileri

Bir cismin üzerine uygulanan kuvvet, cisim üzerinde iki ayrı etki meydana getirir:

1- Dış Etki: Kuvvetin dış etkisi (external effect) cismi hareket ettirmeye çalışmaktır.

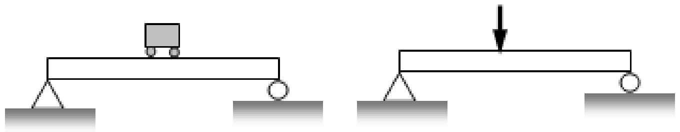
Kuvvet dengelenmiş ise cisim durağandır (veya sabit hızla hareket eder) ve dengeyi sağlayan diğer kuvvetlerin hesabı Statik dersinin konusudur. *(Kuvvet dengelenmemiş ise cisim ivmeli hareket eder ki, bu durumda hareket dinamik dersi kapsamında incelenir.)*

2- İç Etki: Kuvvetlerin iç etkisi (internal effect) ise gerilme ve şekil değiştirmeler oluşturarak cismi deforme etmeye ve hasar vermeye zorlamaktır. Bu özellikle dengelenmiş kuvvet sistemlerinde daha belirgin ortaya çıkar. Gerilmelerin ve şekil değiştirmelerin hesabı ise Mukavemet dersinin konusudur.

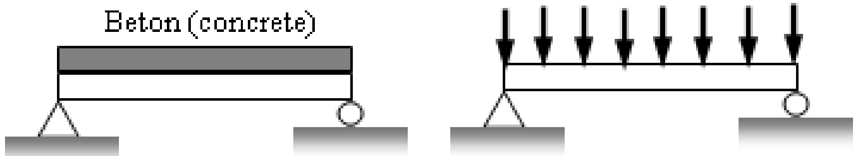
2.4 Kuvvetlerin Sınıflandırılması

a-) **Etki ettiği alana göre**: Eğer kuvvetin uygulandığı alanın boyutları tüm cismin boyutlarıyla karşılaştırıldığında çok küçük ise kuvvete "*tekil kuvvet*" (concentrated force) adı verilir. Eğer kuvvetin uygulandığı alan ihmal edilemeyecek kadar geniş ise "*yayılı yük*" (distributed load) adını alır.

Tekil Kuvvet



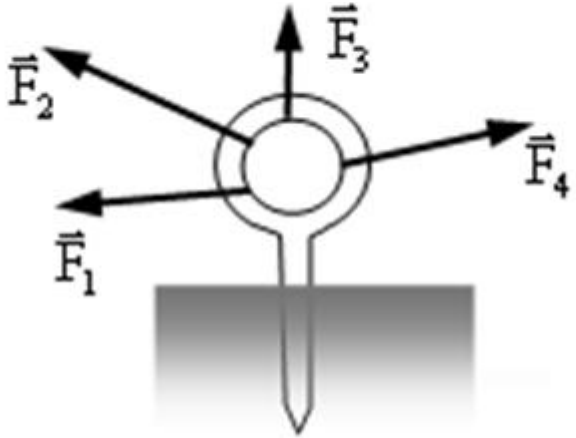
Yayılı Kuvvet



b-) Uygulama Şekillerine Göre:

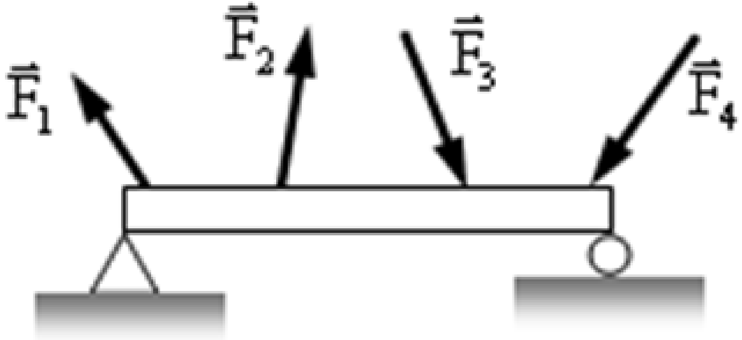
Eşnoktasal (concurrent) kuvvetler

Uzantıları aynı noktada birleşen kuvvetlerdir.



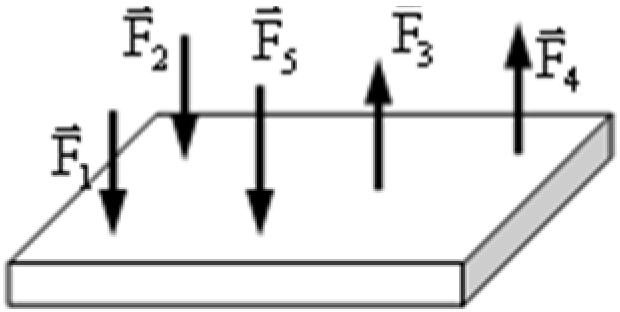
Eşdüzlemsel (coplanar) kuvvetler

Doğrultuları farklı olmasına rağmen aynı düzlemde yer alan kuvvetlerdir.



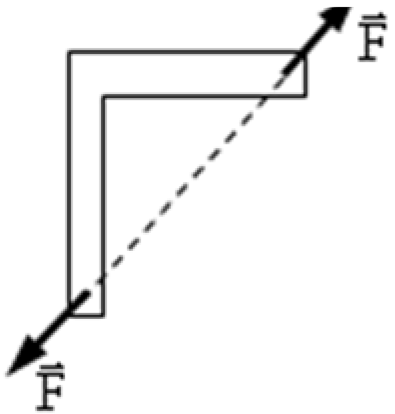
Paralel Kuvvetler

Aynı düzlemde olmamasına rağmen Birbirlerine paralel olan kuvvetlerdir.



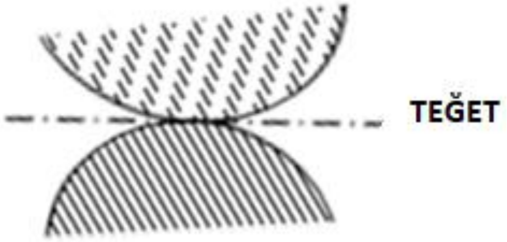
Eşdoğrusal(colinear) kuvvetler

Aynı doğrultu üzerinde yer alan kuvvetlerdir.

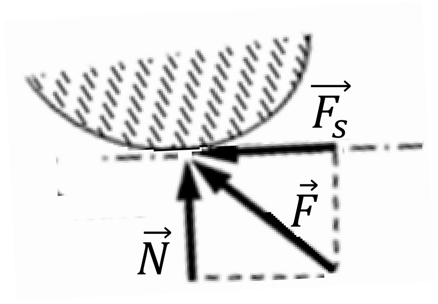


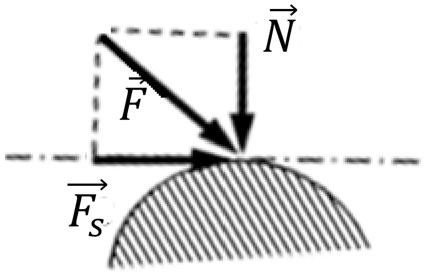
c-) Temas ve Sürtünme Kuvvetleri

Temas eden iki cismi göz önüne alalım:



Alttaki cisme üstteki cisimden etkiyen $\vec{\mathrm{F}}$ kuvvetini; her bir temas noktasından teğete dik olan $\vec{\mathrm{N}}$ ve teğete paralel olan $\overrightarrow{F_S}$ bileşenlerine ayırabiliriz.





$\vec{\mathrm{N}}$ normal bileşen, $\overrightarrow{F_S}$ ise sürtünme kuvveti olarak adlandırılır.

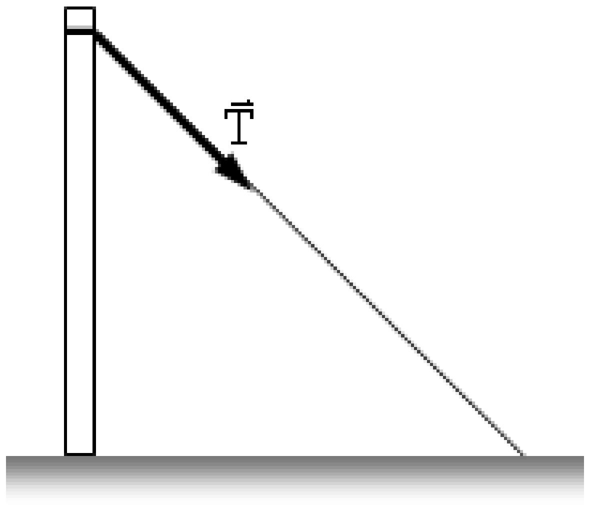
Eğer yüzeyler düzgün (pürüzsüz) ise,

$\mathrm{F_S} = 0$ olarak alınır, eğer pürüzlü ise $\overrightarrow{F_S}$ ihmal edilmeyecektir.

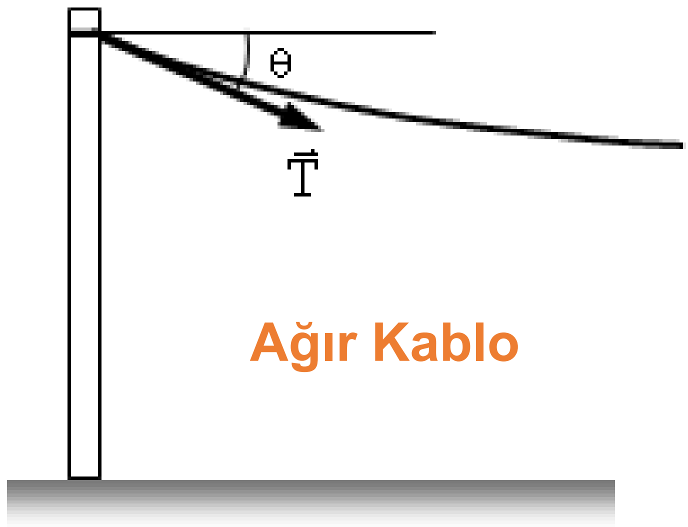
7. konuda sürtünme kavramı detaylıca anlatılacak ve örnekler çözülecektir.

d-) İp ve Kablolardaki kuvvetler

- İp, halat ve kablolardaki kuvvetler her zaman için kendi doğrultuları boyunca ve göz önüne alınan cisimden uzaklaşır yönde gösterilir.
- Ağırlıkları ihmal edilmezse, uygulama noktasındaki teğet yönündedirler.
- Yalnız gergin olduklarında kuvvet uygularlar.
- İpler ve Kablolar Sadece Çeki yükü taşırlar.



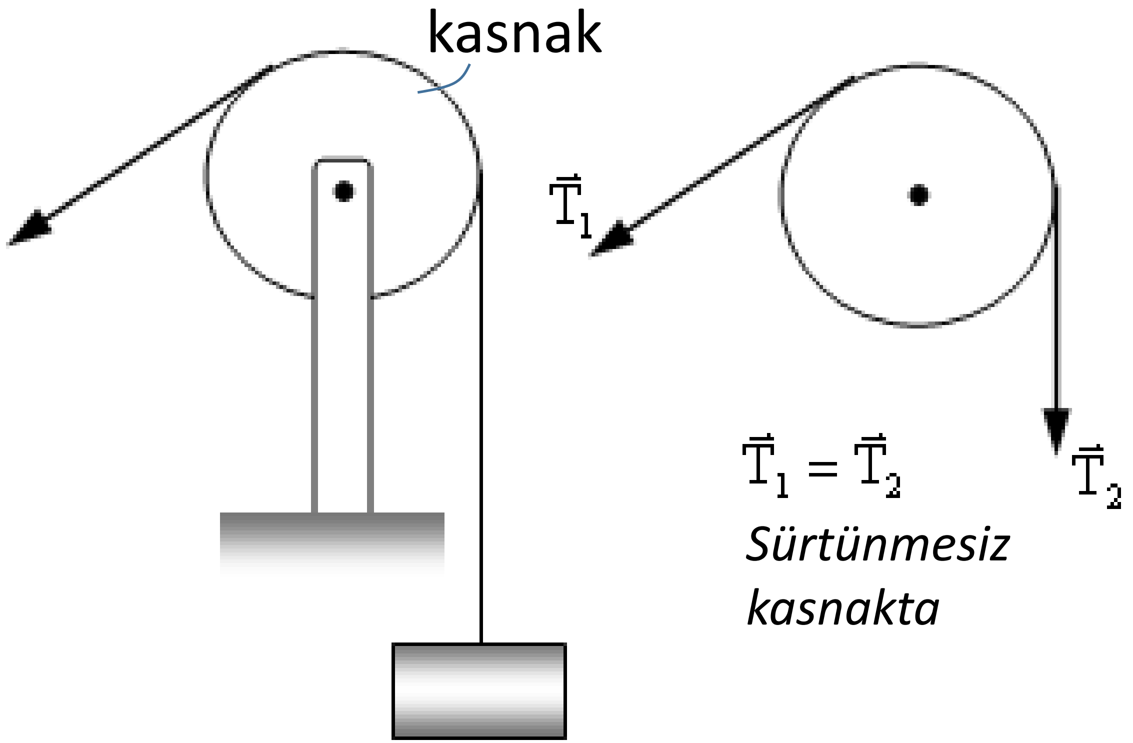
Hafif Kablo (Ağırlığı ihmal edilir.)



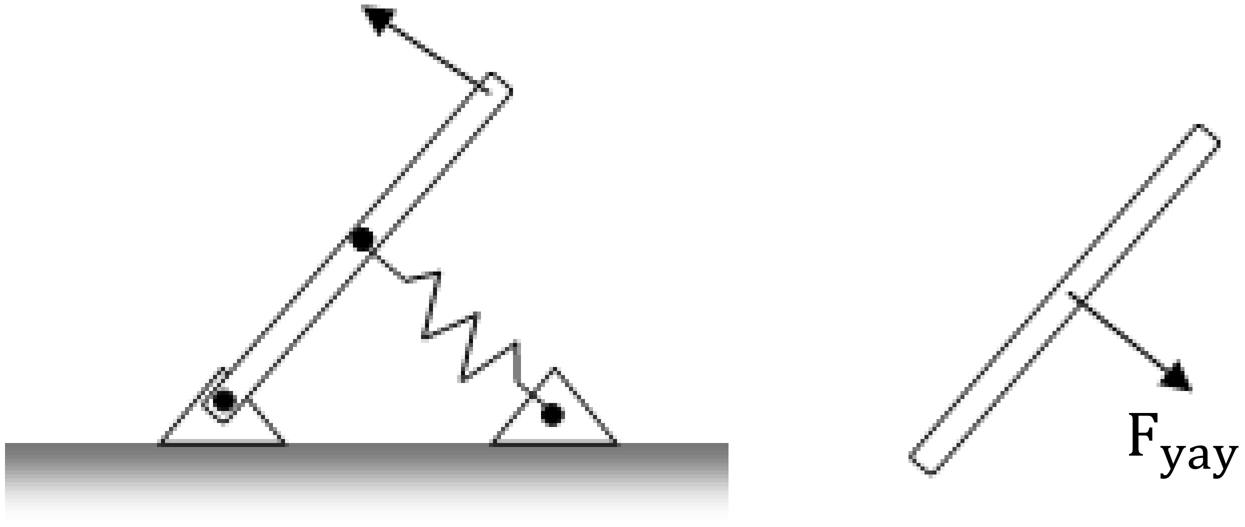
Ağır Kablo

e-) Kasnaklardaki Kuvvetler

Kasnaklar, ip veya halatların yönlerini değiştirmek ve az bir girdi kuvveti ile yüksek çıktı kuvveti elde etmek için kullanılan oluklu silindirlerdir. Sürtünmesiz durumda kasnaktaki ipin her iki ucundaki gerginlik kuvvetleri birbirine eşittir.



f-) Yaylardaki Kuvvetler



$$F_{yay} = k\Delta x$$ (Yay Kuvveti)

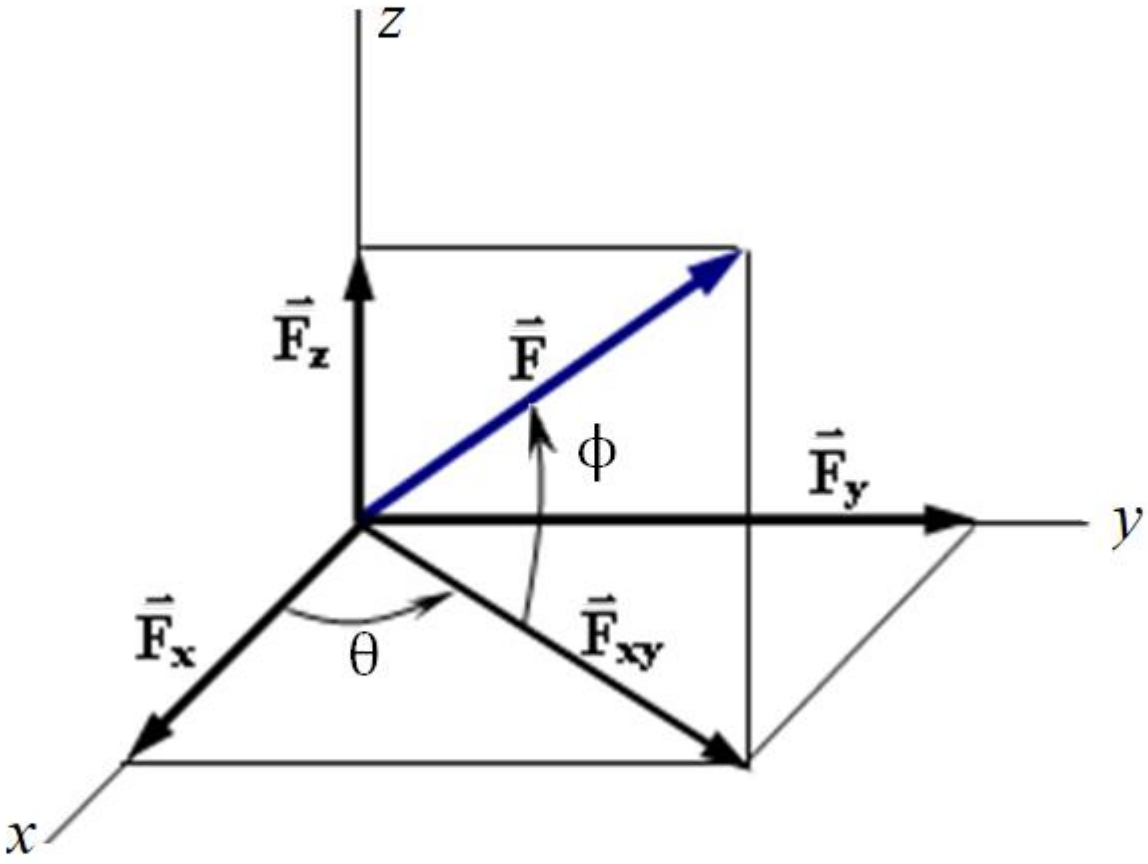
k : yay sabiti ,
Δx : yayın uzama veya kısalma miktarı

Yay kuvvetleri ;

- ❑ Yayın uzamasına bağlı olarak artar,
- ❑ Her zaman yay doğrultusundadır,
- ❑ Yayı orijinal konumuna döndürmeye çalışacak yöndedir.

2.5 Bir Kuvvetin Üç Boyutlu Vektörel Tanımlanması

a-) Kuvvetin etkime doğrultusu iki açıyla verilmiş ise;



$$F_{xy} = F\cos\phi \quad , F_z = F\sin\phi$$

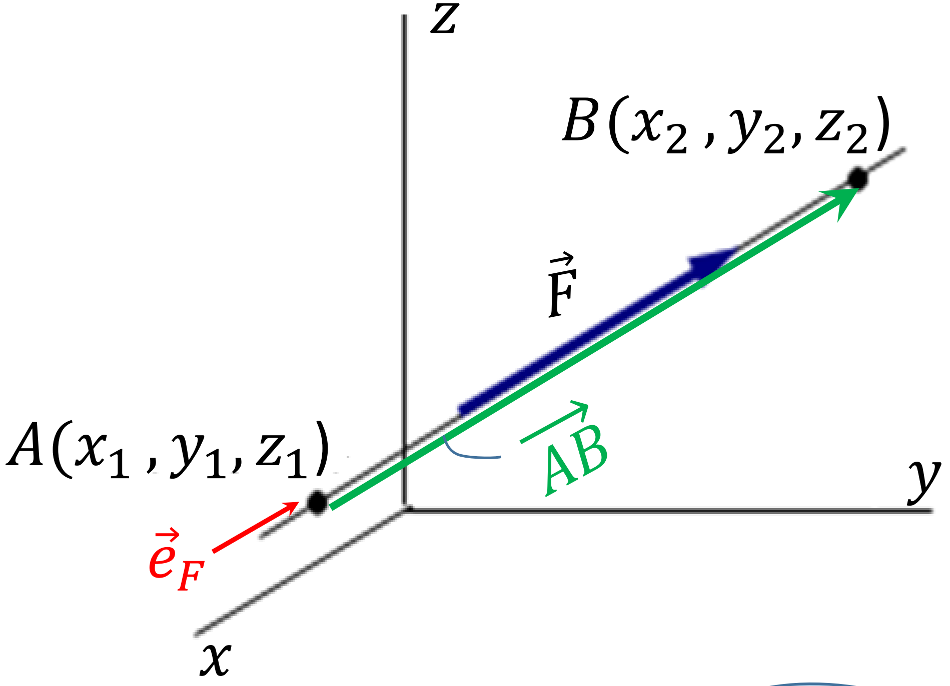
$$F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\phi.\cos\theta$$

$$F_y = F_{xy}\sin\theta = F\cos\phi.\sin\theta$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

b-) Kuvvetin etkime doğrultusu üzerinde iki noktanın koordinatları verilmiş ise;



$$konumvektörü: \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$birim\ vektör: \vec{e}_F = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

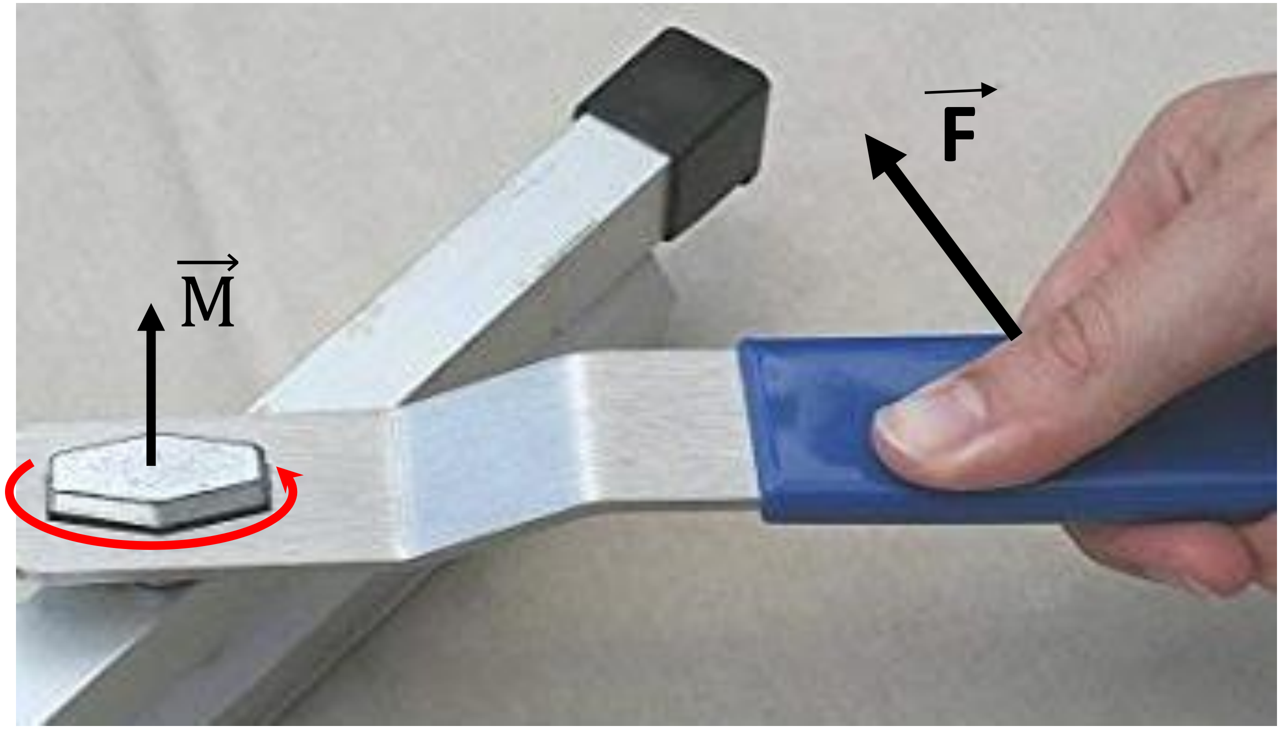
$$\vec{F} = F\vec{e}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\vec{F} = F\frac{(x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

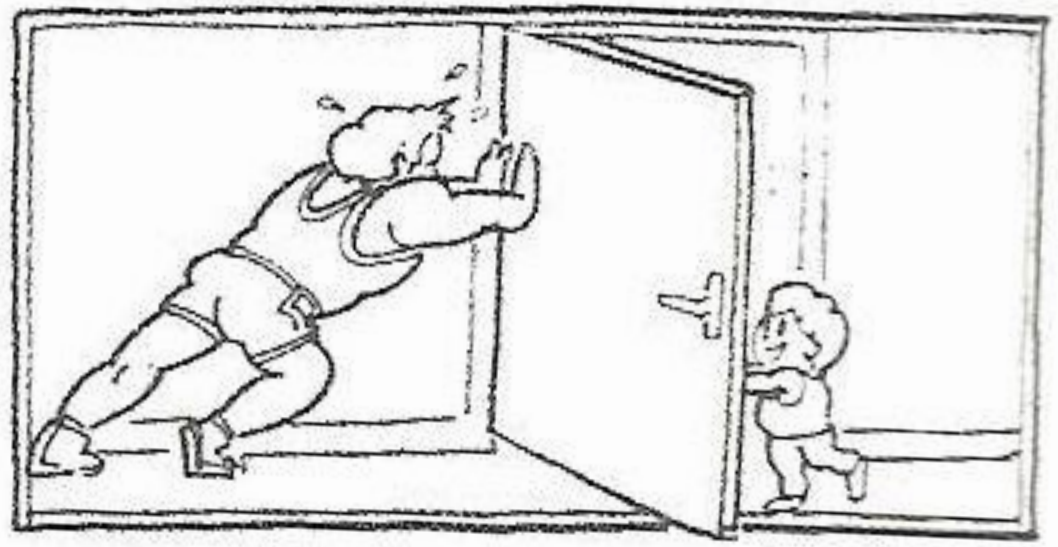
2.6 Kuvvetin Döndürme Etkisi: MOMENT

- Bir kuvvet bir cismi ötelemeye zorladığı gibi döndürmeye de zorlar.
- Bu döndürme etkisine moment denir.
- Moment vektörel bir büyüklüktür.
- Doğrultusu döndürülen düzleme diktir.
- Yönü sağ el kaidesi ile bulunur.

  (ileride açıklanacaktır.)



a- Momentin etkisini hissedin.



- Size en yakın kapıya gidin..
- Kapıyı sonuna kadar açın..
- Şimdi kapıyı;
- 1-Menteşelere en yakın yerden iterek kapatmaya çalışın,
- 2-Ortasından iterek kapatmaya çalışın,
- 3-En ucundan iterek kapatmaya çalışın.
- Hangisinde zorlandınız?
- Tabi ki menteşelere en yakın yerden ittiğinizde zorlandınız.Belki de kapatamadınız.Nedenini düşünün..
- Kapının kapanması itme kuvvetinin döndürme etkisi ile yani momentle ilgilidir.
- Kapanması için itme kuvvetinizin oluşturacağı moment belli bir şiddeti aşmalıdır.
- Momentin şiddeti ise kuvvet (F) ve kuvvet kolu (d) ile doğru orantılıdır.
- Kuvvet kolu (d) , kuvvetin dönme eksenine olan dik uzaklığıdır.
- Bu durumda.. Momentin şiddeti = Kuvvet x Kuvvet kolu… yani … $M = Fd$ … olarak tanımlanır.
- Dönme ekseninden (menteşelerden) ne kadar uzaksanız aynı moment için o kadar daha az kuvvet uygularsınız. Çünkü kuvvet kolu «d» artmıştır. Aynı M için daha düşük F yeterlidir. Bu ise sizin daha az kuvvet uygulamanız ve daha az zorlanmanız anlamına gelir.


YEEESSS!


1
BANA BİR KALDIRAÇ VERİN SİZE DÜNYAYI YERİNDEN OYNATAYIM...
TAMAM LAN!
2
BUNUNLA OLMAZ, BOZUK BU..!
OHOO!

2.7 Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti (önemli)

Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, moment alınan noktadan kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir noktaya çizilen konum vektörü ile kuvvetin vektörel çarpımına eşittir.

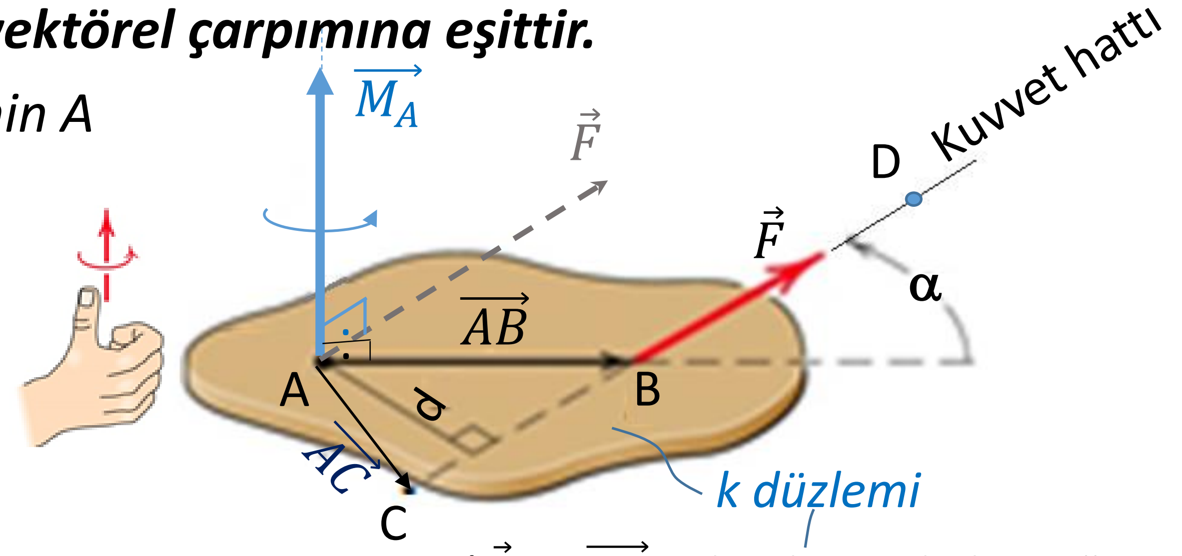
Yandaki şekle göre; CD hattı üzerindeki F kuvvetinin A noktasına göre momenti şu şekilde bulunur:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

Moment alınan nokta

Kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir nokta

Kuvvet



($\vec{F}$ *ve* $\overrightarrow{AB}$ *vektörlerinin bulunduğu düzlem)*

P.N. 2.4-) Moment vektörü k düzlemine diktir. $\vec{F}$ *kuvvetini moment alınan noktaya taşıyıp,* $\overrightarrow{AB}$ *vektörünü sağ elimizle* $\vec{F}$ *kuvvetini üzerine kapatırsak, baş parmağımızın yönü moment vektörünün yönünü gösterecektir.*

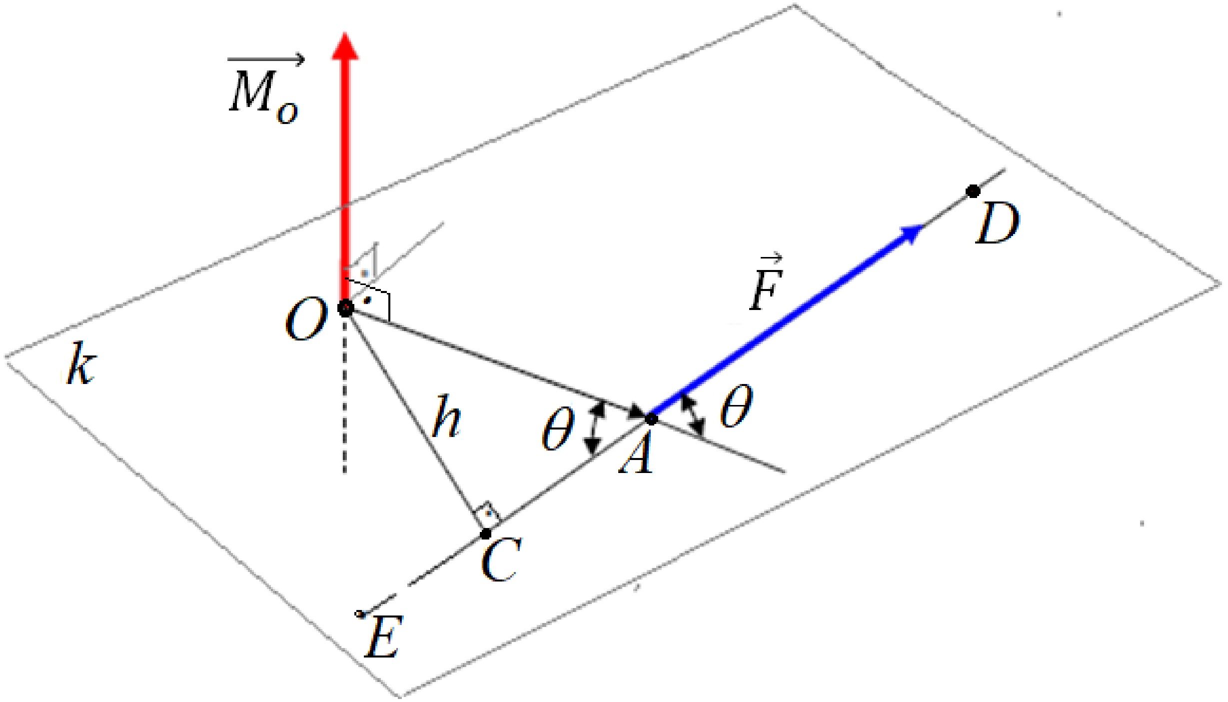
P.N 2.1) Kuvvet hattı üzerinde farklı noktalar da alınabilir ve aynı sonuç bulunur: Yani: $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AC} \times \vec{F} = \overrightarrow{AD} \times \vec{F}$

PN.2.2) Vektörel çarpımda sıra önemlidir. $\overrightarrow{AB}$ yerine $\overrightarrow{BA}$ yazmak veya $\vec{F}$ kuvvetini önce yazmak sonucu etkiler.

P.N. 2.3) Dik uzaklık (d) ile F İn şiddetini çarparsak sadece Momentin şiddetini elde ederiz (M=Fd). Ancak vektörel çarpım yaparsak bu işleme gerek yoktur. Zira momentin vektörel ifadesi belli olunca, şiddeti de hesaplanabilir.

***Tekrar ediyoruz**: F kuvvetinin O noktasına göre momenti, Moment alınan noktadan (O) , kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir noktaya (A,C,D veya E) çizilen vektör ile kuvvetin vektörel çarpımına eşittir.*

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{OA} x \vec{F} = \overrightarrow{OC} x \vec{F} = \overrightarrow{OD} x \vec{F} = \overrightarrow{OE} x \vec{F}$$



OA ve F vektörleri k düzlemi üzerindedir.
$\overrightarrow{M_o}$ vektörü k düzlemine diktir.

Momentin Şiddeti:

Dik uzaklık biliniyorsa: $|\overrightarrow{\mathrm{M_o}}| = |\vec{\mathrm{F}}|\mathrm{h}$

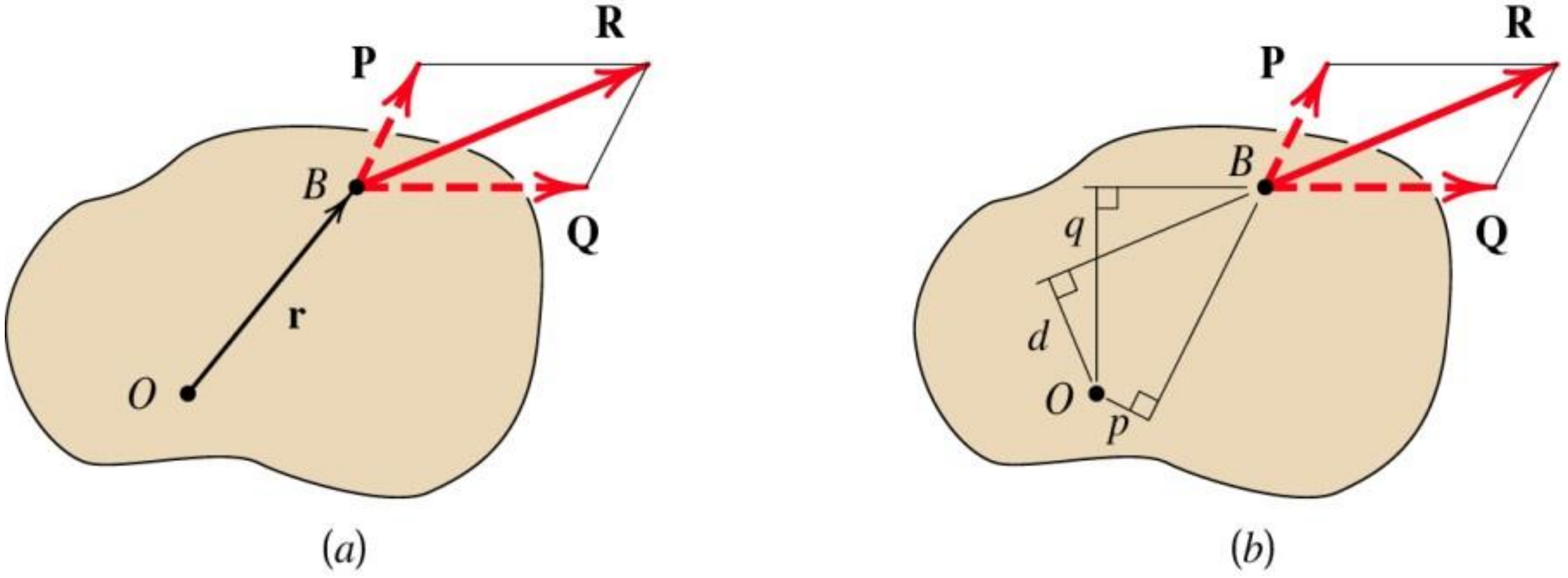
veya $\overrightarrow{M} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{\jmath}$ şeklinde bulunduktan sonra,

Şiddeti: $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

2.8- Varignon Teoremi

Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti o kuvvetin bileşenlerinin aynı noktaya göre momentlerinin toplamına eşittir.

$$\vec{M}_o = \underbrace{\vec{r}}_{\overrightarrow{OB}} \times \vec{R}, \qquad \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}, \qquad \vec{M}_o = \vec{r} \times \left(\vec{P} + \vec{Q}\right) = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q}$$

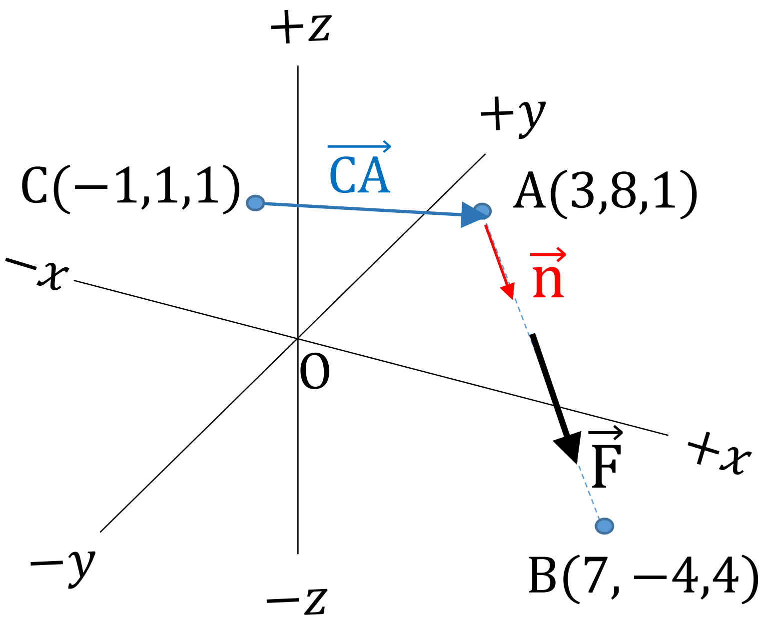


Dik uzaklıklar biliniyorsa, momentin şiddeti : $M_o = Rd = Qq - Pp$

(P'nin döndürme yönü, Q'nun döndürme yönüne göre ters olduğundan momenti negatif alındığına dikkat ediniz)

Örnek 2.1: (video 2a, örnek 2a1) Doğrultusu A(3,8,1) ve B(7,–4,4) noktalarından geçen, 130 N şiddetinde olan ve A dan B ye doğru yönlendirilmiş **F** kuvvetinin C(-1,1,1) noktasına göre momentini bulunuz.

Çözüm:



$$\vec{M}_C = \overrightarrow{CA} x \vec{F} \quad , \vec{F} = |\vec{F}|\vec{n}$$

Moment alınan nokta   Kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir nokta

$$\overrightarrow{CA} = [3-(-1)]\vec{i} + (8-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} \quad \rightarrow \overrightarrow{CA} = (4\vec{i} + 7\vec{j})$$

Birim vektör: $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{(7-3)\vec{i} + (-4-8)\vec{j} + (4-1)\vec{k})}{|\overrightarrow{AB}|}$

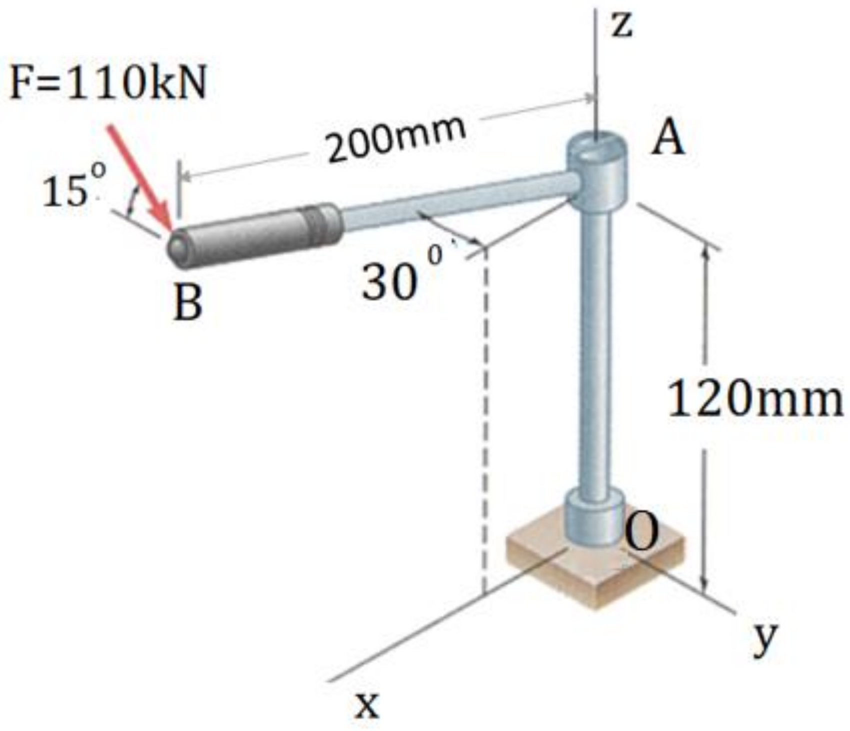
$$= \frac{4\vec{i} - 12\vec{j} + \overrightarrow{3k}}{\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \frac{4}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j} + \frac{3}{13}\vec{k}$$

$$\vec{F} = 130(\frac{4}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j} + \frac{3}{13}\vec{k}) \rightarrow \quad \vec{F} = 40\vec{i} - 120\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\vec{M}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & 0 \\ 40 & -120 & 30 \end{vmatrix} = (30x7 - (-120x0))\vec{i} - (30x4 + 40x0)\vec{j} + (-120x4 - 40x7)\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{M}_c = (210\vec{i} - 120\vec{j} - 760\vec{k})$$

Örnek 2.2 (*) **(video 2a, örnek 2a2)**

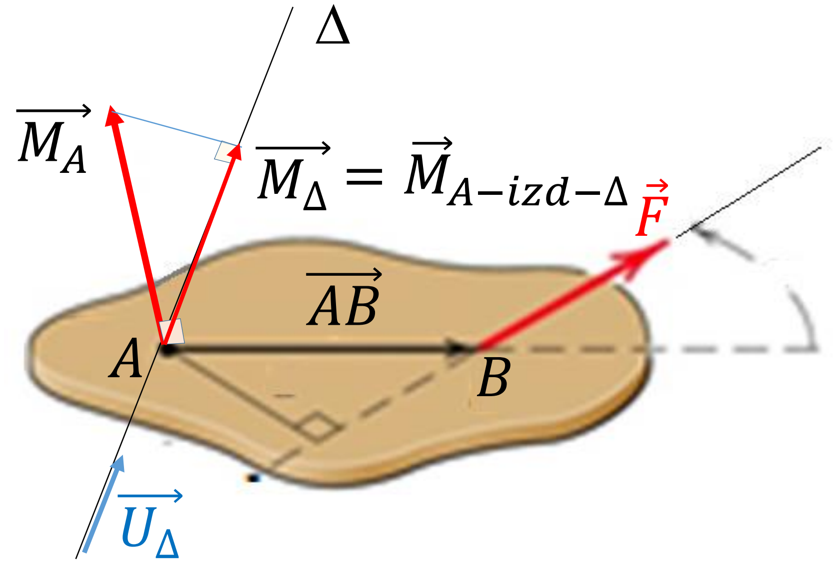


y-z düzlemine paralel olan 110kN'luk kuvvetin O noktasına göre momentini vektörel olarak hesaplayınız.

Cevap:

$$\vec{M}_o = -9903\vec{i} + 4931\vec{j} + 18402\vec{k} \text{ (kN mm)}$$

2.9 Bir Kuvvetin Bir Eksene Göre Momenti



Bir kuvvetin bir eksene göre momenti: O kuvvetin eksen üzerindeki bir noktaya göre momentinin eksene göre izdüşümüdür.

Mesela F kuvvetinin Δ eksenine göre momentini arıyoruz. İşlem adımlarımız şöyle olmalı:

1- Önce F kuvvetinin Δ ekseni üzerindeki herhangi bir noktaya *(örn: A noktasına)* göre momenti ($\overrightarrow{M_A}$) hesaplanır. *(bknz. konu 2.7.)* $\longrightarrow$ $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB} x \vec{F}$

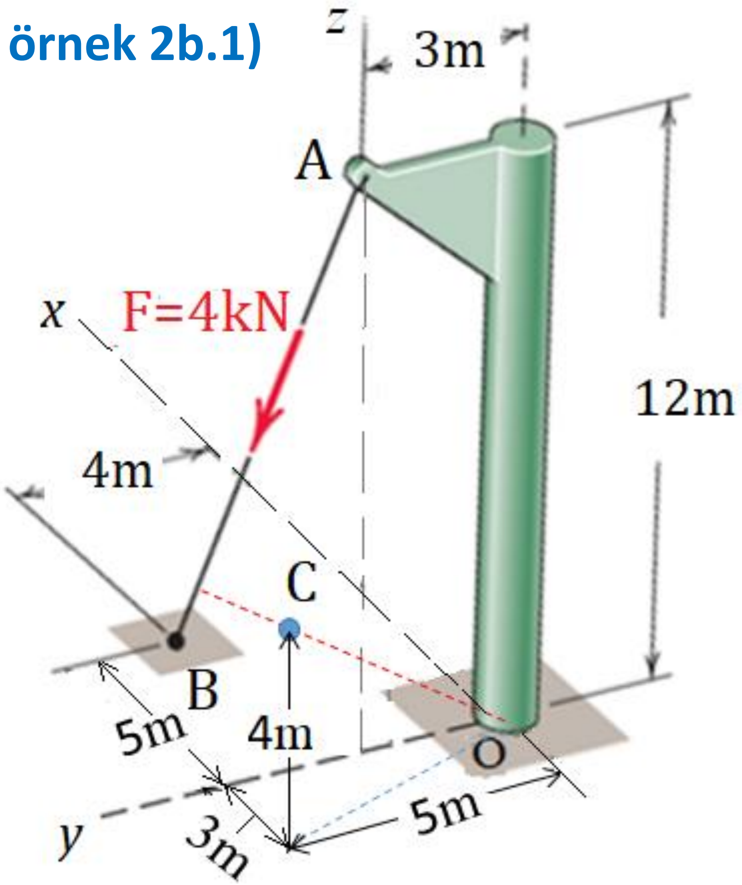
2- Bu momenti eksene paralel birim vektör ($\overrightarrow{U_\Delta}$) ile skaler çarparsak F kuvvetinin eksene göre momentinin şiddeti (M_Δ), bulunur.(bknz konu : 1.19) $\longrightarrow$ $M_\Delta = \overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{U_\Delta}$

3- Çıkan sonucu tekrar ($\overrightarrow{U_\Delta}$) ile çarparsak, F kuvvetinin eksene göre momentinin vektörel ifadesi ($\overrightarrow{M_\Delta}$) elde edelir. (bknz. 1.19) $\longrightarrow$ $\overrightarrow{M_\Delta} = M_\Delta \overrightarrow{U_\Delta} = (\overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{U_\Delta})\overrightarrow{U_\Delta}$

- *Kuvvetin doğrultusunun uzantısı eksenle çakışırsa, kuvvetin o eksene göre momenti sıfırdır.*
- *Bu işlem 3 boyutlu bazı problemlerde çok işe yarar. Bulunması istenmeyen kuvvetleri işlemlere katmamamızı ve istenen kuvveti tek işlemle doğrudan bulmamızı sağlar. İleride örnek verilecektir.*

Örnek 2.3

(Video 2b, örnek 2b.1)



Şekildeki direğe bağlı BA ipine F= 4 kN luk kuvvet uygulanmıştır. F kuvvetinin OC eksenine göre momentini bulunuz.

Çözüm:

O(0,0,0); A(0,3,12); B (5,,4,0); C (-3,5,4)

F yönündeki birim vektör:

$$\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 12\vec{k}}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 12^2}} = 0.38\vec{\imath} + 0.076\vec{\jmath} - 0.92\vec{k}$$

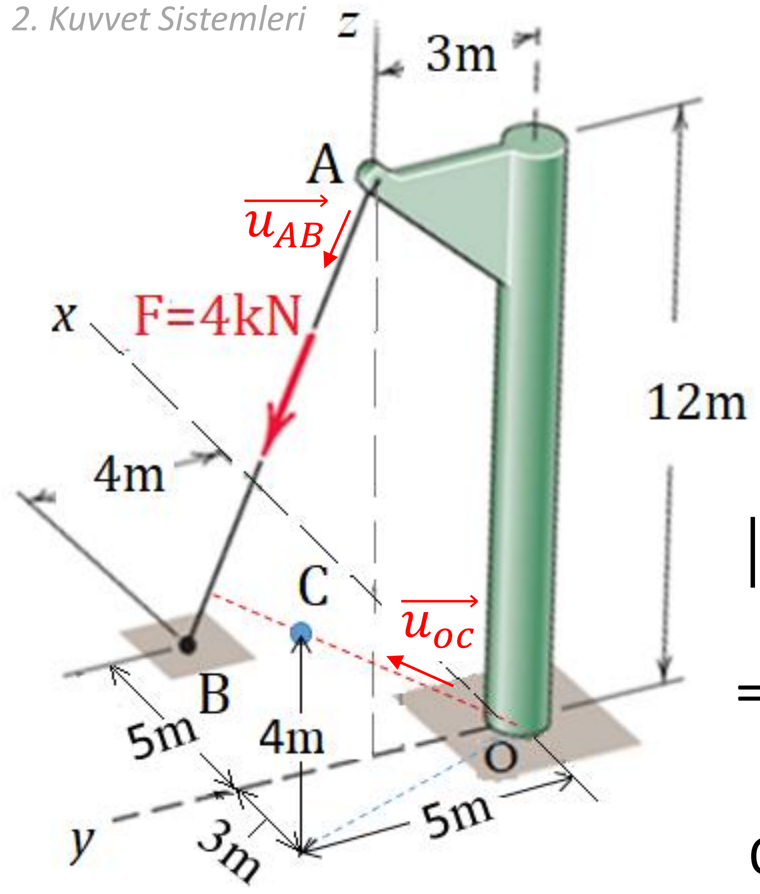
$$\vec{F} = F.\overrightarrow{u_{AB}} = 4\text{x}(0.38\vec{\imath}+0.076\vec{\jmath}\text{-}0.92\vec{k})$$

$$\vec{F} = 1.52\vec{\imath}+0.304\vec{\jmath}\text{-}3.68\vec{k}$$

Önce eksen üzerindeki herhangi bir noktaya (O noktasına) göre moment alınır:

$$\vec{M_o} = \overrightarrow{OB}x\vec{F} = (5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})x(1.52\vec{\imath}+0.304\vec{\jmath}-3.68\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{M_o} = -14.72\vec{\imath} + 18.4\vec{\jmath} - 4.56\vec{k} \quad \dots \ (kNm)$$



OC yönündeki birim vektör:

$$\overrightarrow{u_{oc}} = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{-3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 4\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}}$$

$$\overrightarrow{u_{oc}} = -0.42\vec{\imath}+0.71\vec{\jmath}+0.56\vec{k}$$

OC eksenine göre momentin şiddeti: (skaler çarpımla bulunur.)

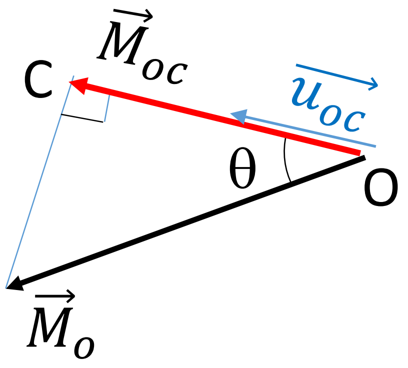
$$|\vec{M}_{oc}| = \vec{M}_o . \overrightarrow{u_{oc}} = (-14.72\vec{\imath} + 18.4\vec{\jmath} - 4.56\vec{k}).(-0.42\vec{\imath}+0.71\vec{\jmath}+0.56\vec{k})$$

$$=(-14.72)x(-0.42)+18.4x0.71+ (-4.56)x(0.56) \quad \rightarrow |\vec{M}_{oc}| = 16.69kNm$$

OC eksenine göre moment vektörü:

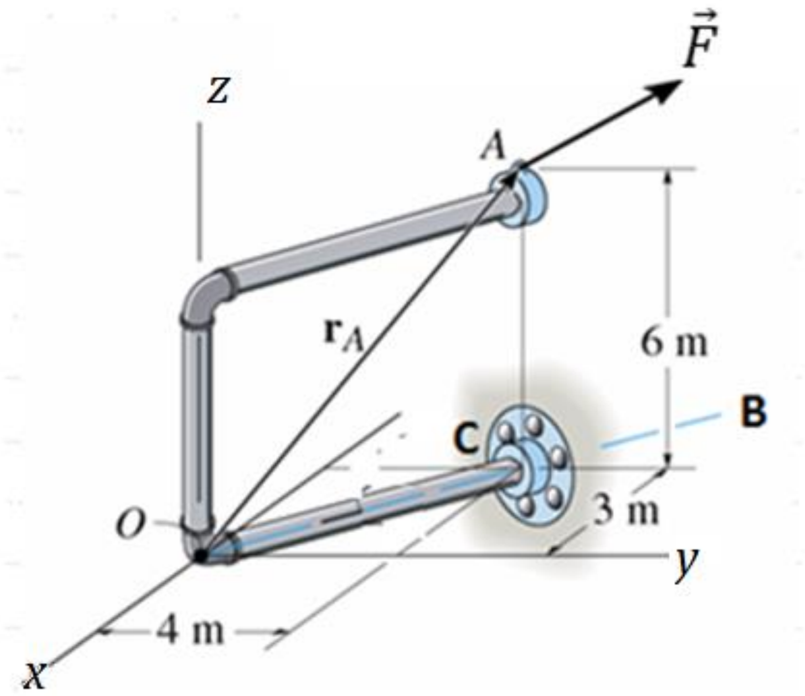
$$\vec{M}_{oc}=|\vec{M}_{oc}|\,\overrightarrow{u_{oc}} =16.69(-0.42\vec{\imath}+0.71\vec{\jmath}+0.56\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{M}_{oc}=-7.01\vec{\imath}+11.85\vec{\jmath}+9.34\vec{k}$$



$$Cos\theta = \frac{|\vec{M}_{oc}|}{|\vec{M}_o|} = \frac{16.69}{\sqrt{14.72^2 + 18.4^2 + 4.56^2}} = \frac{16.69}{24} = 0.69rd \rightarrow \theta = 39.53^0$$

Örnek 2.4 (*)



Şekildeki dirseğe etki eden $\vec{F} = \left(-20\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} + 5\vec{k}\right)$ (N)

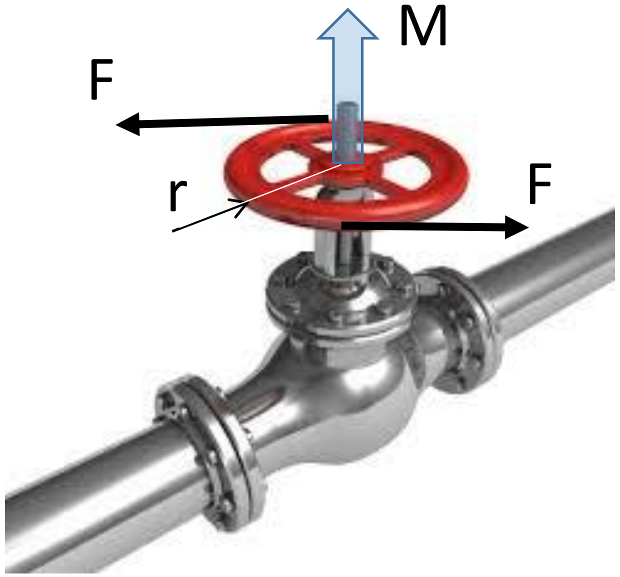
kuvvetinin;

a-) x eksenine ve

b-) OB eksenine göre momentlerini bulunuz.

Cevaplar: a-) $\overrightarrow{M_x} = -70\vec{\imath}$; b-) $\vec{M}_{OB} = 25.2\vec{\imath} - 33.6\vec{\jmath}$

2.10 Kuvvet Çifti : Kupl



Bir cisim üzerindeki döndürme etkisi eğer, eşit şiddette, zıt yönde ve birbirine paralel iki kuvvetten kaynaklanıyorsa bu kuvvetler bir kupl (kuvvet çifti) oluşturur denir.

Büyük bir vanayı açarken veya kapatırken iki elimizle bir kupl oluştururuz.

Bir kuplun momenti; kuvvetlerin herbirisinin orta noktaya göre momentlerinin toplamıdır.

Örn: Vana yarıçapı r ise kupl momenti:

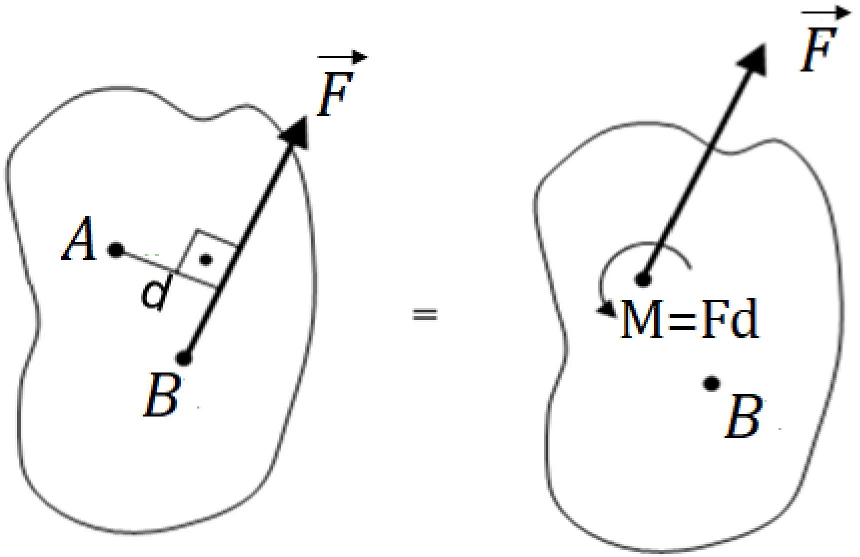
$M = Fr + Fr = 2Fr$ olur.

Direksiyona kupl uygulamayan dikkatsiz bir şoför..

2.11 Bir kuvvetin bir noktadan diğer noktaya taşınması:

Bir kuvvet bir noktadan diğer noktaya momenti ile birlikte taşınır.
Bu şekilde döndürme etkisi de korunmuş olur.

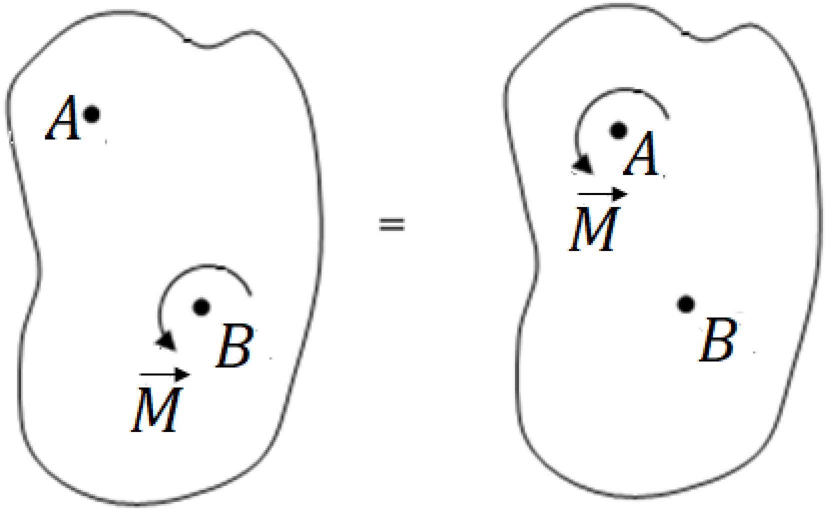
B den A'ya taşınan bir kuvvet



2.12 Bir momentin bir noktadan diğer noktaya taşınması:

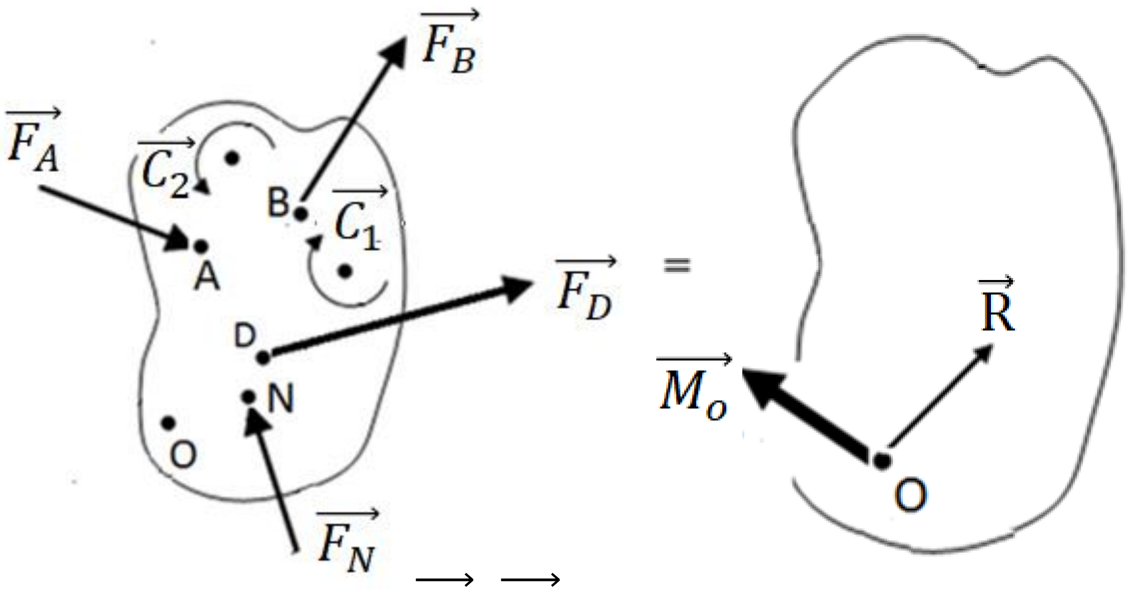
Bir moment, bir noktadan diğer noktaya aynen taşınır. Çünkü etkisi kaybolmaz.

B den A'ya taşınan bir moment



Dikkat edilirse taşıma işleminde önemli olan kuvvet veya momentin cisme olan ötelenme veya döndürme etkisinin korunmasıdır.

2.13 Kuvvetler Sisteminin İndirgenmesi ve Bileşkeler



$\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}$: Tekil Momentler.

Bir cisme etki eden kuvvet ve moment sisteminin bir noktaya indirgenmesi demek: indirgenen noktada aynı etkiyi oluşturacak şekilde bir bileşke kuvvet ($\vec{R}$) ve bir bileşke moment ($\overrightarrow{M_o}$) elde etmek demektir. Aslında indirgeme tüm tekil kuvvetlerin ve momentlerin indirgenen noktaya taşınması anlamına gelir.

Şekildeki sistemde O noktasına sol veya sağdaki sistemden hangisi etki ederse etsin aynı etki oluşur.

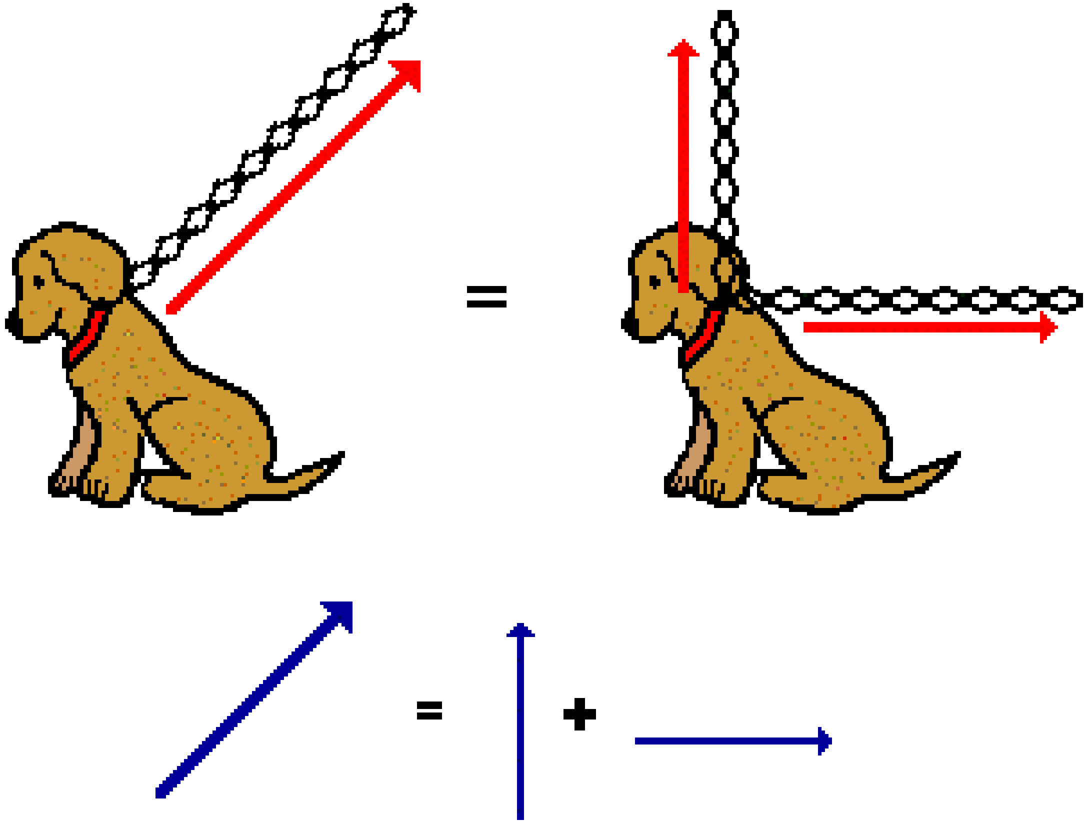
Sistemi O noktasına indirgeyiniz demek: O noktasındaki $\vec{R}$ ve $\overrightarrow{M_o}$ bileşkelerini bulunuz demektir.

Bileşke Kuvvet = $\vec{R} = \sum \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_D} \ldots + \overrightarrow{F_N}$ (Tüm tekil kuvvetlerin vektörel toplamı)

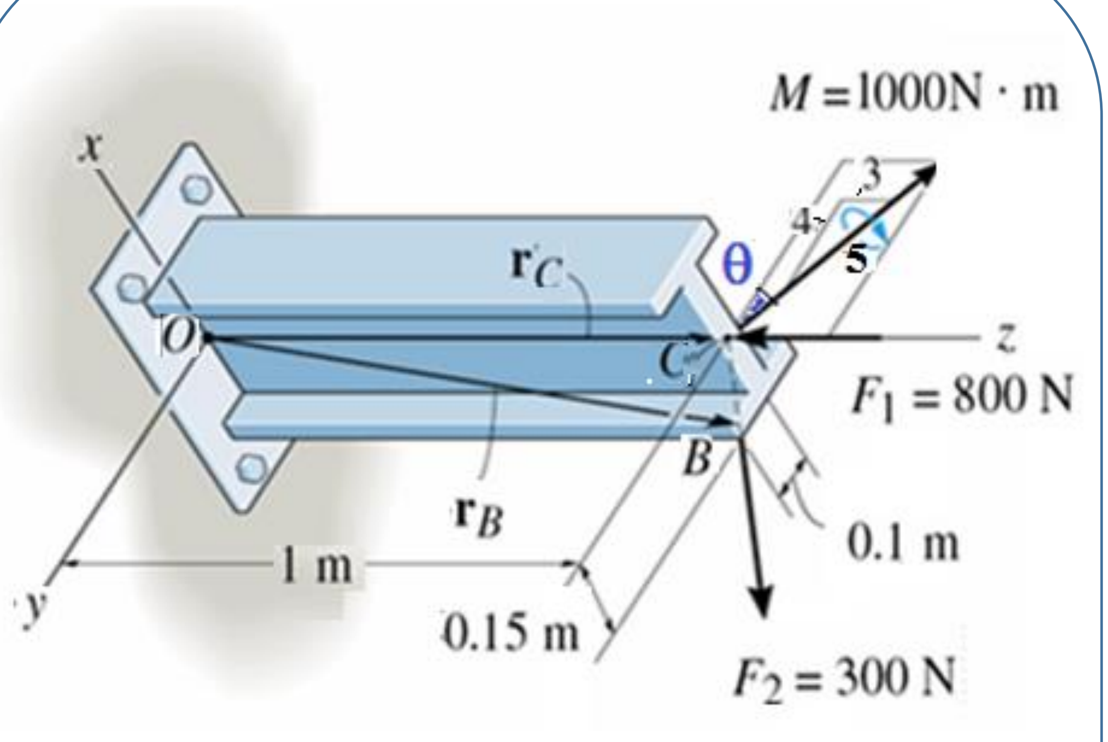
Bileşke Moment = $\overrightarrow{M_o} = \sum \overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{OA} x \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} x \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{OD} x \overrightarrow{F_D} \ldots + \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2} + \cdots$

(Tüm tekil kuvvetlerin indirgenen noktaya göre momentleri + Tekil momentler)

Bileşkenin tek başına bir cisme etkisi, bileşenlerin aynı anda uygulandığı etkiye eşit olur.

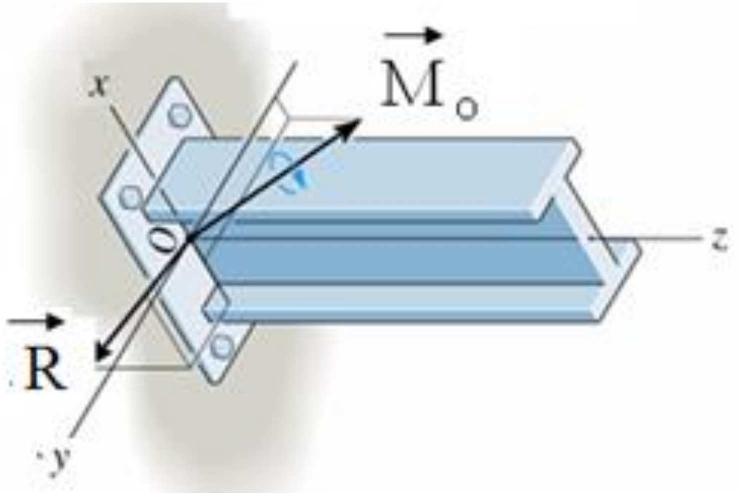


Örnek 2.5:



Şekildeki kuvvetler sistemini O noktasına indirgeyiniz

Çözüm: Sorunun farklı şekilde izahı: O noktasında aynı etkiyi oluşturacak bir bileşke kuvvet ve bileşke moment bulunuz.



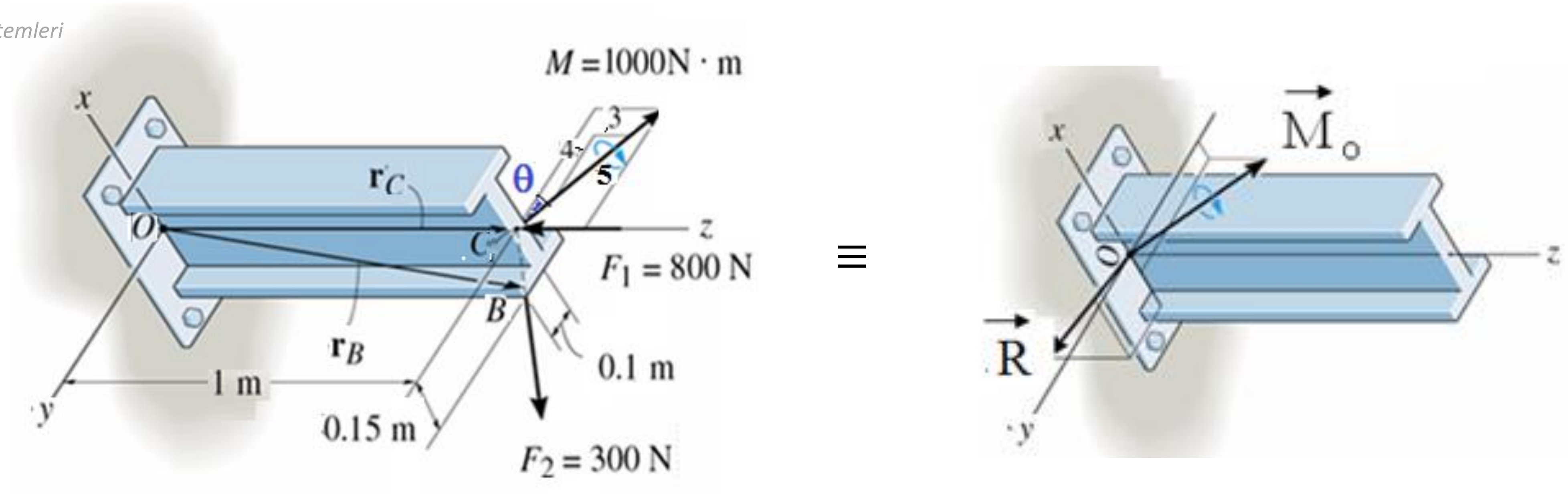
$$\vec{F_1} = \left(-800\vec{k}\right) \text{N}$$

$$\vec{F_2} = (300\ \text{N})\ \overrightarrow{u_{CB}}$$

$$\vec{F_2} = (300\text{N})\frac{\overrightarrow{CB}}{CB}$$

$$\vec{F_2} = \frac{300(-0.15\vec{i} + 0.1\vec{j})}{\sqrt{0.15^2 + 0.1^2}} = \left[-249.6\vec{i} + 166.4\vec{j}\,\right]N$$

$$\vec{M} = 1000\left(-\text{Cos}\theta\vec{j} + \text{Sin}\theta\vec{k}\right) = 1000\left(-\frac{4}{5}\vec{j} + \frac{3}{5}\vec{k}\right) \quad \rightarrow \vec{M} = \left[-800\vec{j} + 600\vec{k}\right]\text{N.m}$$



Bileşke kuvvet: $\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (-800\vec{k}) + [-249.6\vec{\imath} + 166.4\vec{\jmath}]N$

$$\to \quad \vec{R} = [-249.6\vec{\imath} + 166.4\vec{\jmath} - 800\vec{k}]N$$

Bileşke Moment: $\overrightarrow{M_0} = \vec{M} + \overrightarrow{OC}\, x\, \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OB}\, x\, \overrightarrow{F_2}$

$$= -800\vec{\jmath} + 600\vec{k} + 1\vec{k}\, x(-800\vec{k}) + (-0.15\vec{\imath} + 0.1\vec{\jmath} + 1\vec{k})\, x\, (-249.6\vec{\imath} + 166.4\vec{\jmath})$$

$$= -800\vec{\jmath} + 600\vec{k} + 0 - 24.96\vec{k} + 24.96\vec{k} - 249.6\vec{\jmath} - 166.4\vec{\imath}$$

$$\to \quad \overrightarrow{M_0} = -166.4\vec{\imath} - 1049.6\vec{\jmath} + 600\vec{k}$$

2.14 Vida kavramı:

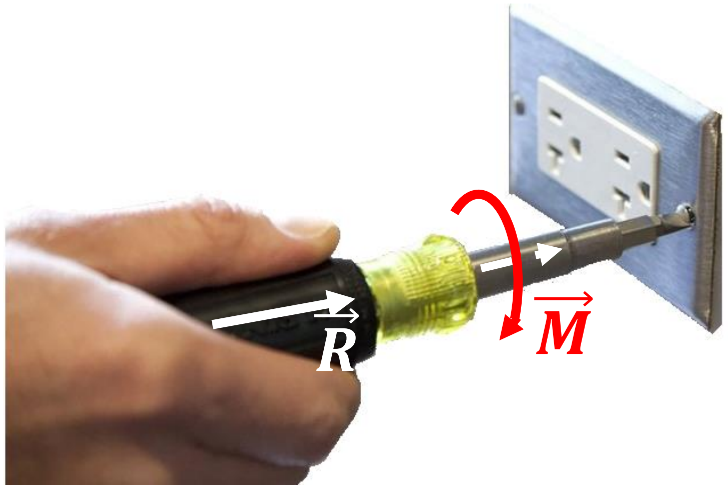
Bir vidayı tornavida ile sıkarken 2 tür hareket ve yükü aynı anda uygularız.

1- Tornavidayı ekseni etrafında çeviririz. (Bu sırada vidaya moment uygulamış oluruz).

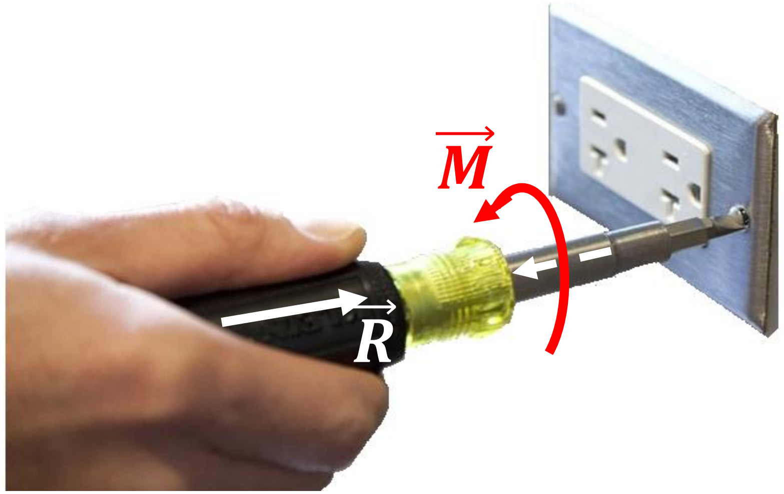
2- Aynı zamanda tornavidayı ekseni yönünde bastırırız. (Bu sırada vidaya bastırma kuvveti uygularız.)

Uyguladığımız kuvvet ($\vec{R}$) ve moment ($\vec{M}$) vektörlerinin yönü vida ekseni üzerinde çakışırlar.

Eğer her ikisi de aynı yönde ise pozitif vida , zıt yönde ise negatif vida oluştururlar.



Pozitif Kuvvet Vidası (Sıkma)

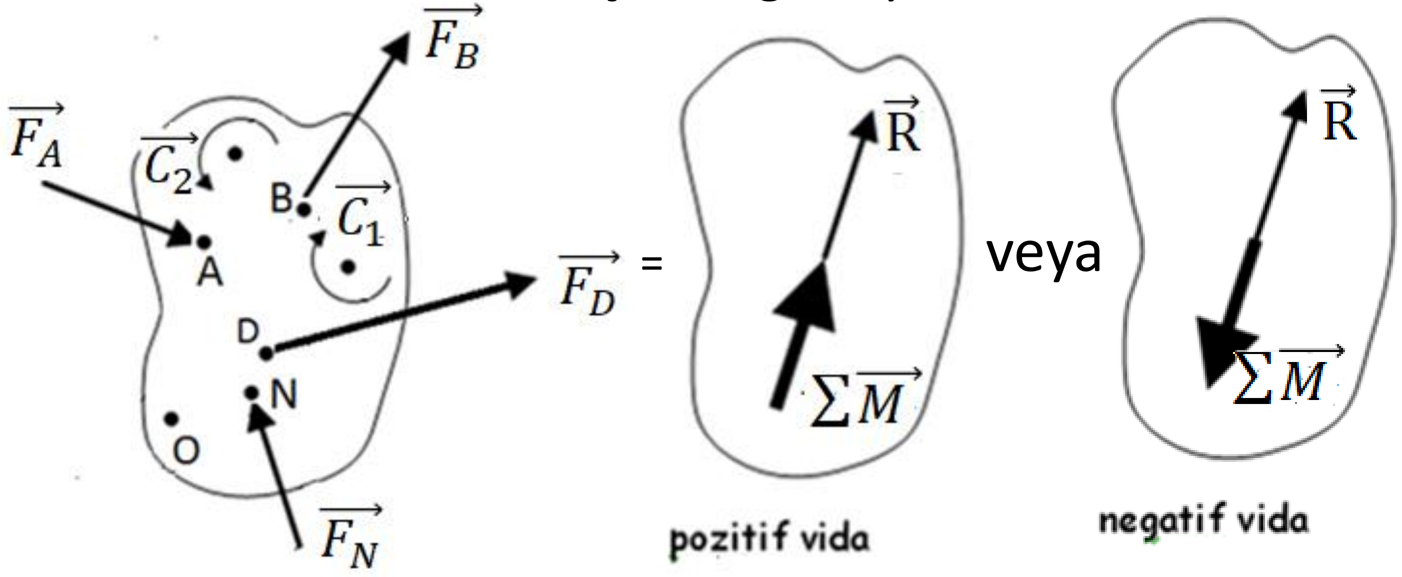


Negatif Kuvvet Vidası (Sökme)

a-) Vida Oluşturma Durumunun Tespiti:

Eğer bir kuvvetler sistemi bir noktaya indirgendiği zaman, indirgenen noktadaki bileşke kuvvet ve bileşke moment aynı doğrultu üzerinde ise bunların bir vida oluşturduğu söylenir.

Eğer her iki bileşke aynı doğrultu üzerinde iken hem de aynı yönde ise pozitif vida; aynı doğrultu üzerinde iken farklı yönlerde ise negatif vida oluştuğu söylenir.

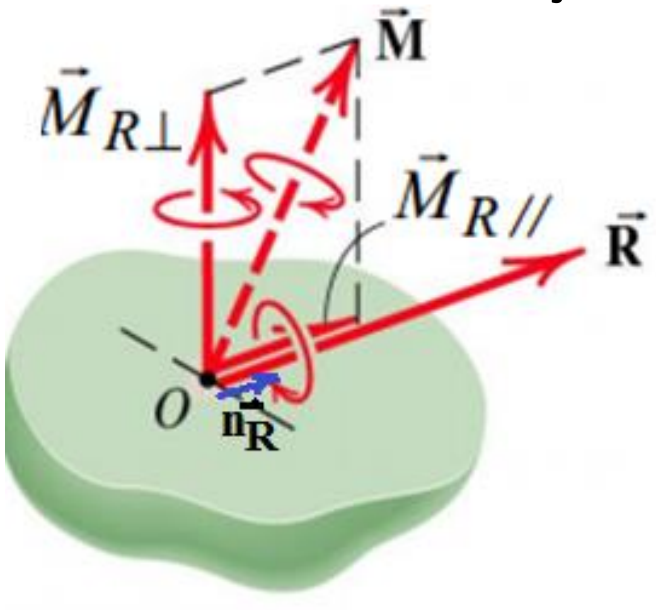


Soru-1: Bileşke kuvvet ve momentin vida oluşturup oluşturmadığını nasıl anlarız?

Cevap: Aynı doğrultu üzerindeki 2 vektörün aralarındaki açı 0^0 veya 180^0 dir. Bu durumda vektörel çarpımları sıfır olur. (bk: konu 1.11). O halde bileşke kuvvet ile bileşke momentin vektörel çarpımı sıfır ise vida oluşturduğu söylenir. Yani $\vec{R}x\vec{M} = 0$ ise vida oluştururlar. Değilse vida oluşturmaz ancak vidaya indirgenme ihtimali vardır.

b-) Vidaya İndirgenme Durumunun Tespiti:

Bileşke kuvvet ve moment aynı doğrultu üzerinde değilse vida oluşturmazlar demiştik.



Vidaya indirgenmenin anlamı ise, M bileşke momentinin R bileşke kuvvetine paralel bileşenini ($\vec{M}_{R_{//}}$) ve dik bileşenini ($\vec{M}_{R_{\perp}}$) bulmak demektir. Zira $\vec{M}_{R_{//}}$ve $\vec{R}$ vida oluşturur.

Soru-2: Buna göre vidaya indirgeme şartı nedir?

Cevap: M momentinin R' ye dik olmamasıdır.

Çünkü dik olursa $\vec{M}_{R_{//}}$diye bir bileşeni olmaz ve vidaya indirgenemez.

Soru-3: M 'in R'ye dik olup olmadığını nasıl anlarız.?

Cevap: M ve R nin skaler çarpımı sıfır ise birbirlerine diktir. Çünkü skaler çarpımda vektörlerin şiddetleri ve aralarındaki açının kosinüsü çarpılır. Açı 90^0 olursa kosinüsü sıfır olur (bknz: 1.10).

Bu durumda vidaya indirgenemez.

$(\vec{M}_{R_{//}} = 0)$

$\vec{R}.\vec{M} = 0$ ise birbirlerine diktirler. Vida oluşturmazlar ve Vidaya da indirgenemezler

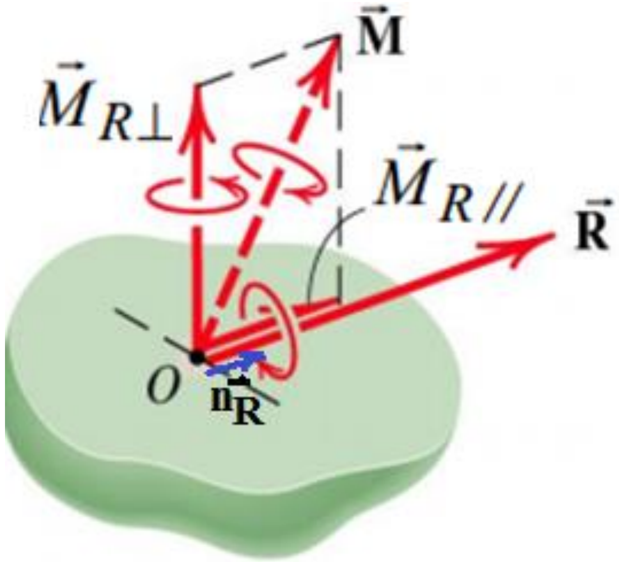
Özet olarak (Vidaya İndirgeme Durumu 2 Adımla tespit Edilir.)

1.Adım: $\vec{R}x\vec{M} \neq 0$ ise vida oluşturmazlar. *(Çünkü aynı doğrultu üzerinde değillerdir.)*

Ancak vidaya indirgeme ihtimalleri vardır. 2nci Adımda bu kontrol yapılır:

2. Adım: İlaveten $\vec{R}.\vec{M} \neq 0$ denklemi de sağlanıyorsa vidaya indirgenebilirler.

(Çünkü aynı doğru üzerinde olmadıkları gibi birbirlerine dik değillerdir)

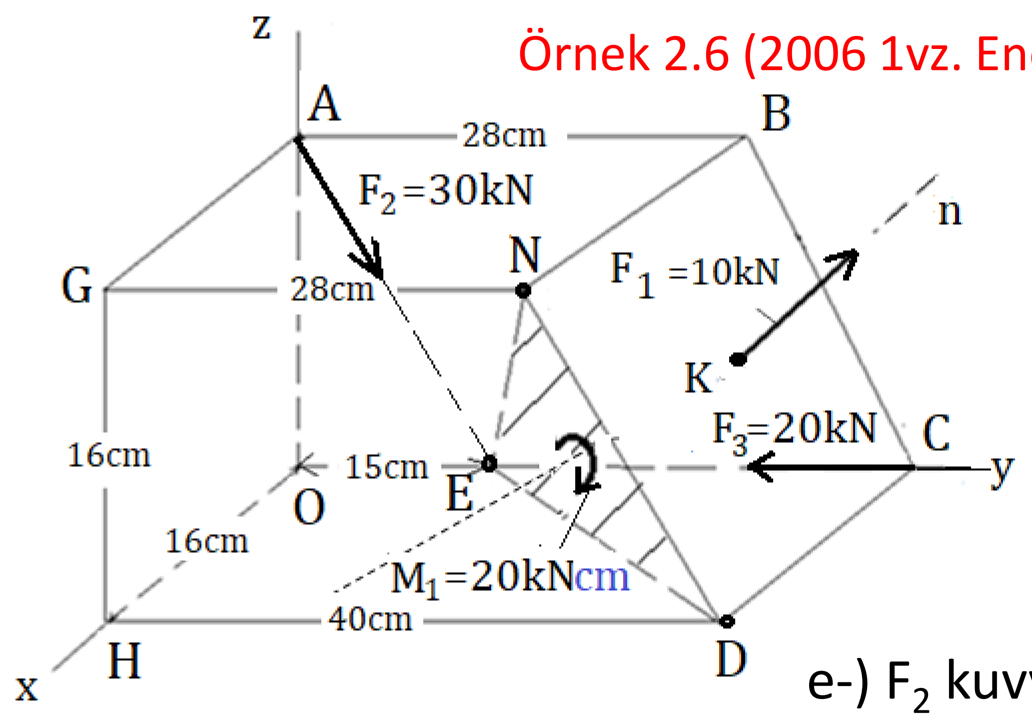


Soru:$\vec{M}_{R_{//}}$ nasıl hesaplanır?

Cevap:$\vec{M}_{R_{//}}$Bileşke momentin R doğrultusundaki izdüşümüdür ve R doğrultusundaki birim vektörle 2 kez skaler çarpımına eşittir (bknz:1.19)

$$\vec{M}_{R_{//}} = (\vec{M}.\overrightarrow{n_R})\overrightarrow{n_R} \quad ; \quad \text{Birim vektör: } \overrightarrow{n_R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Dik bileşen hesabı: $\vec{M}_{R_{\perp}} = \vec{M} - \vec{M}_{R_{//}}$



Örnek 2.6 (2006 1vz. End.) **(Video 2b, örnek 2b.3)**

a-) Şekil de görülen kuvvet ve moment sistemini O noktasına indirgeyiniz. (M_1 Momenti END düzlemindedir. F_1 kuvveti ise CBND düzleminin ortasındaki K noktasından düzlem normali doğrultusunda uygulanmıştır.)

b-) İndirgenen sistemin bir vida teşkil edip etmediğini,

c-) Vida Teşkil etmiyorsa, vidaya indirgenip indirgenemeyeceğini kontrol ediniz.

d-) Vidaya indirgenebiliyorsa, indirgeyiniz.

e-) F_2 kuvvetinin OB ve OG eksenlerine göre momentlerini hesaplayınız.

Çözüm: a-) Öncelikle tüm kuvvet ve momentlerin vektörel ifadelerini sırasıyla bulmalıyız:

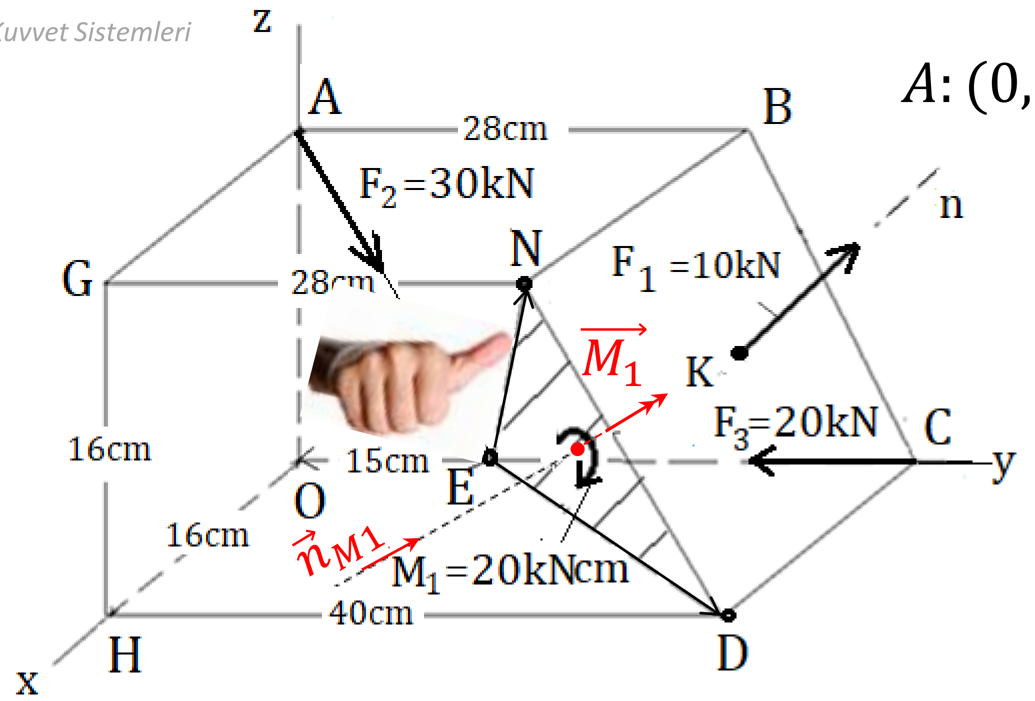
$$B:(0,28,16)\ ;\ C:(0,40,0)\ ;\ N:(16,28,16)$$

$\vec{F_1}$ yönündeki birim vektör:

$$\vec{n_1}=\frac{\overrightarrow{BN}x\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BN}x\overrightarrow{BC}|}=\frac{16\vec{\imath}x(12\vec{\jmath}-16\vec{k})}{|\overrightarrow{BN}x\overrightarrow{BC}|}=\frac{192\vec{k}+256\vec{\jmath}}{\sqrt{192^2+256^2}}=\frac{1}{320}(192\vec{k}+256\vec{\jmath})$$

$$\rightarrow \vec{n_1}=0.6\vec{k}+0.8\vec{\jmath}\quad \rightarrow \vec{F_1}=F_1\vec{n}_1=10(0.8\vec{\jmath}+0.6\vec{k})\quad \rightarrow \vec{F_1}=8\vec{\jmath}+6\vec{k}$$

$\vec{n_1}$ in hesabını anlamadınsa, örnek 1.4 ü bi incele derim



$A:(0,0,16)$; $E:(0,15,0)$; $N:(16,28,16)$; $D:(16,40,0)$

$$\vec{n_2} = \frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{(15\vec{j} - 16\vec{k})}{\sqrt{15^2 + 16^2}} = 0.68\vec{j} - 0.73\vec{k}$$

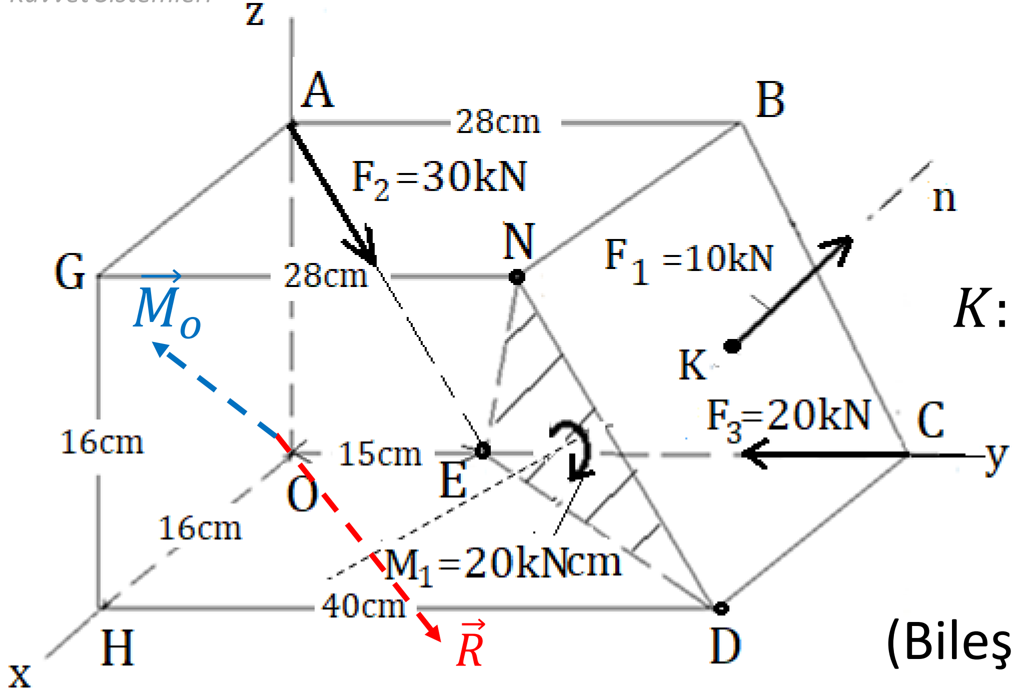
$$\vec{F_2} = F_2\vec{n}_2 = 30(0.68\vec{j} - 0.73\vec{k}) \rightarrow \quad \vec{F_2} = 20.4\vec{j} - 21.9\vec{k}$$

(-y yönünde olduğundan): $\rightarrow \vec{F_3} = -20\vec{j}$

(Sağ El kuralını göre M_1 momenti taralı alanın iç normali yönündedir. Bu yöndeki birim vektör): $\vec{n}_{M1} = \dfrac{\overrightarrow{EN}x\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EN}x\overrightarrow{ED}|}$

$$\vec{n}_{M1} = \frac{(16\vec{i} + 13\vec{j} + 16\vec{k})x(16\vec{i} + 25\vec{j})}{|\overrightarrow{EN}x\overrightarrow{ED}|} = \frac{-400\vec{i} + 256\vec{j} + 192\vec{k}}{\sqrt{400^2 + +256^2 + 192^2}} \rightarrow \vec{n}_{M1} = -0.78\vec{i} + 0.5\vec{j} + 0.37\vec{k}$$

$$\vec{M_1} = M_1\vec{n}_{M1} = 20(-0.78\vec{i} + 0.5\vec{j} + 0.37\vec{k}) \rightarrow \vec{M_1} = -15.6\vec{i} + 10\vec{j} + 7.4\vec{k} \quad (kNcm)$$



(Bileşke kuvvet): $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$K: (8,34,8)$

$\vec{R} = 8\vec{j} + 6\vec{k} + 20.4\vec{j} - 21.9\vec{k} - 20\vec{j}$

$\rightarrow \vec{R} = 8.4\vec{j} - 15.9\vec{k}$

(Bileşke Moment): $\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \overrightarrow{OE} x \vec{F}_2 + \overrightarrow{OK} x \vec{F}_1$

$= -15.6\vec{i} + 10\vec{j} + 7.4\vec{k} + 15\vec{j} x (20.4\vec{j} - 21.9\vec{k}) + (8\vec{i} + 34\vec{j} + 8\vec{k}) x (8\vec{j} + 6\vec{k})$

$= -15.6\vec{i} + 10\vec{j} + 7.4\vec{k} - 328.5\vec{i} + 64\vec{k} - 48\vec{j} + 204\vec{i} - 64\vec{i}$ $\rightarrow \vec{M}_o = -204.1\vec{i} - 38\vec{j} + 71.4\vec{k}$ $(kNcm)$

b-) İndirgenen sistemin bir vida teşkil edip etmediğini kontrol edeceğiz:

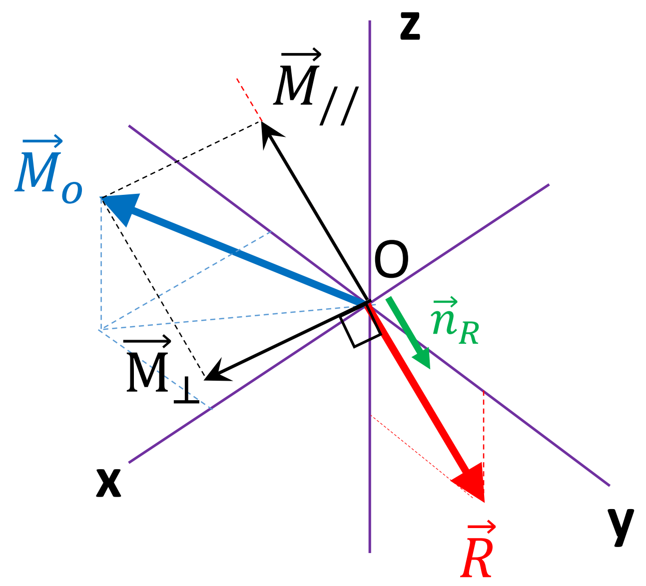
$\vec{R} x \vec{M}_o = (8.4\vec{j} - 15.9\vec{k}) x (-204.1\vec{i} - 38\vec{j} + 71.4\vec{k}) = -4.44\vec{i} + 3245.2\vec{j} + 1714.4\vec{k}$ ..... $\neq 0$

olduğundan vida teşkil etmez.

c-) Vida Teşkil etmiyorsa, vidaya indirgenip indirgenemeyeceğini kontrol edelim:

$$\vec{R}.\vec{M}_o = \left(8.4\vec{j} - 15.9\vec{k}\right).\left(-204.1\vec{i} - 38\vec{j} + 71.4\vec{k}\right) = (8.4)(-38) + (-15.9)(71.4) = -1454.5$$

$\vec{R}.\vec{M}_o \neq 0$ olduğundan vidaya indirgenebilir.



d-) Vidaya indirgeyelim:

$\vec{R}$ yönündeki birim vektör: $\vec{n}_R = \dfrac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \dfrac{8.4\vec{j} - 15.9\vec{k}}{\sqrt{8.4^2 + 15.9^2}} = 0.46\vec{j} - 0.88\vec{k}$

$\vec{R}$ 'ye paralel moment bileşeni:

$$\left|\vec{M}_{//}\right| = \vec{M}_o.\vec{n}_R = (-204.1\vec{i} - 38\vec{j} + 71.4\vec{k})(0.46\vec{j} - 0.88\vec{k})$$

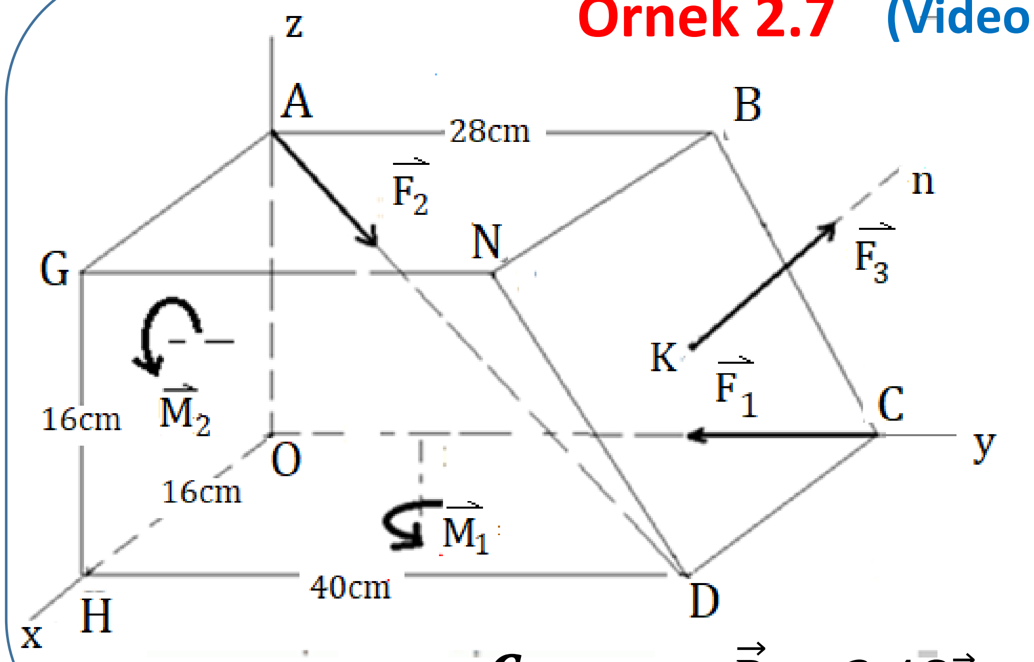
$$= (-38x0.46) + 71.4x(-0.88) \rightarrow \left|\vec{M}_{//}\right| = -80.3 \quad (kNcm)$$

$$\vec{M}_{//} = \left|\vec{M}_{//}\right|\vec{n}_R = (-80.3)(0.46\vec{j} - 0.88\vec{k}) \quad \rightarrow \vec{M}_{//} = -36.94\vec{j} + 70.66\vec{k}$$

$\vec{R}$ 'ye dik moment bileşeni: $\vec{M}_\perp = \vec{M}_o - \vec{M}_{//} = (-204.1\vec{i} - 38\vec{j} + 71.4\vec{k}) - (-36.94\vec{j} + 70.66\vec{k})$

$$\vec{M}_\perp = -204.1 - 1.06\vec{i} + 0.74\vec{k} \quad (kNcm)$$

Örnek 2.7 (Video 2b, örnek 2b.2)



Şekildeki sistemde; $\mathbf{F}_1$=20 kN, $\mathbf{F}_2$=10 kN,

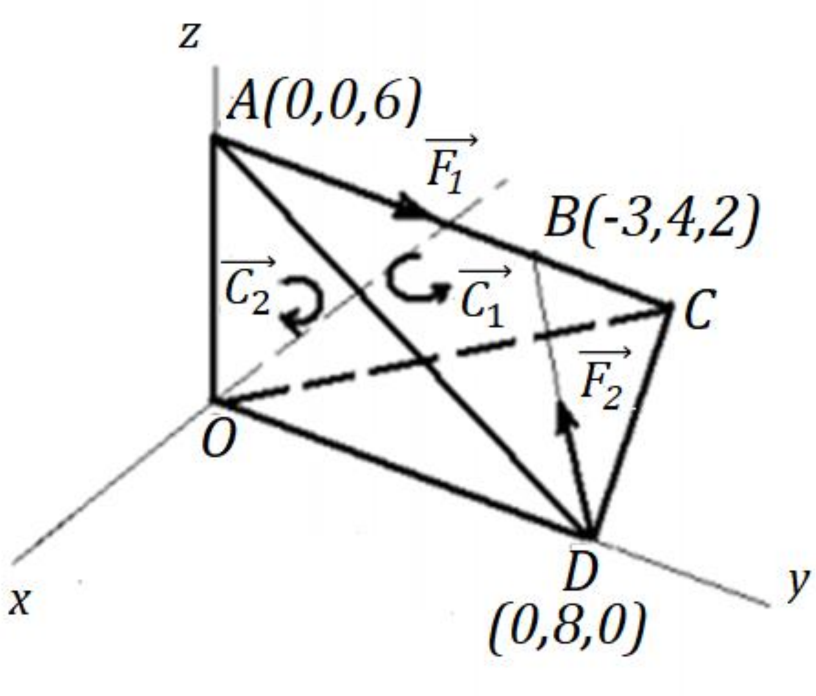
$\mathbf{F}_3$=10 kN (DCBN düzleminin tam ortasından ve dik yönde)

$\mathbf{M}_1$=20 kNcm (OHDC düzlemine uygulanıyor),

$\mathbf{M}_2$= 10 kNcm (OHGA düzlemine uygulanıyor)

Buna göre; bu kuvvetler sistemini O noktasına indirgeyiniz.

Cevap: $\vec{R} = 3.48\vec{i} - 3.3\vec{j} + 2.52\vec{k}$ (kN) ; $\vec{M}_o = 0.8\vec{i} + 17.68\vec{j} + 84\vec{k}$ $(kNcm)$



Örnek Soru 2.8 (*)

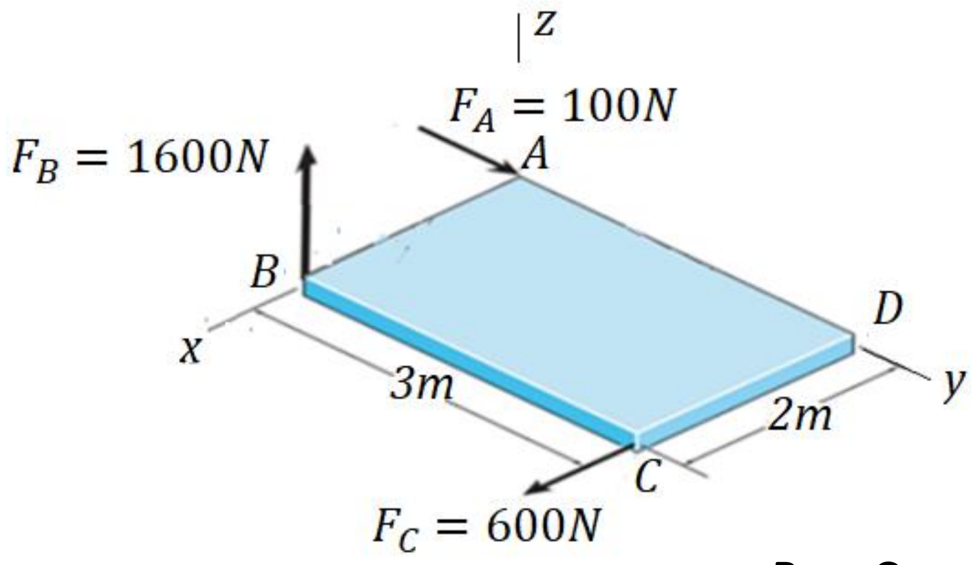
Şekildeki prizmatik elemana uygulanan iki kuvvet ve iki kuvvet çiftinden oluşan sistemi O noktasına indirgeyiniz. İndirgenen sistemin bir vida teşkil edip etmediğini kontrol ediniz.

F_1=20kN, F_2 = 10kN, C_1=8kNm (ADC), C_2=5kNm (AOD)

Cevap $\vec{R} = -14.95\vec{\imath} + 5.08\vec{\jmath} - 8.79\vec{k}$,

$$\vec{M}_O = -52.38\vec{\imath} - 51.64\vec{\jmath} + 50.74\vec{k}$$

Örnek 2.9 (*)



Şekildeki üç kuvvetten oluşan sistemi,

a-) A noktasına indirgeyiniz.

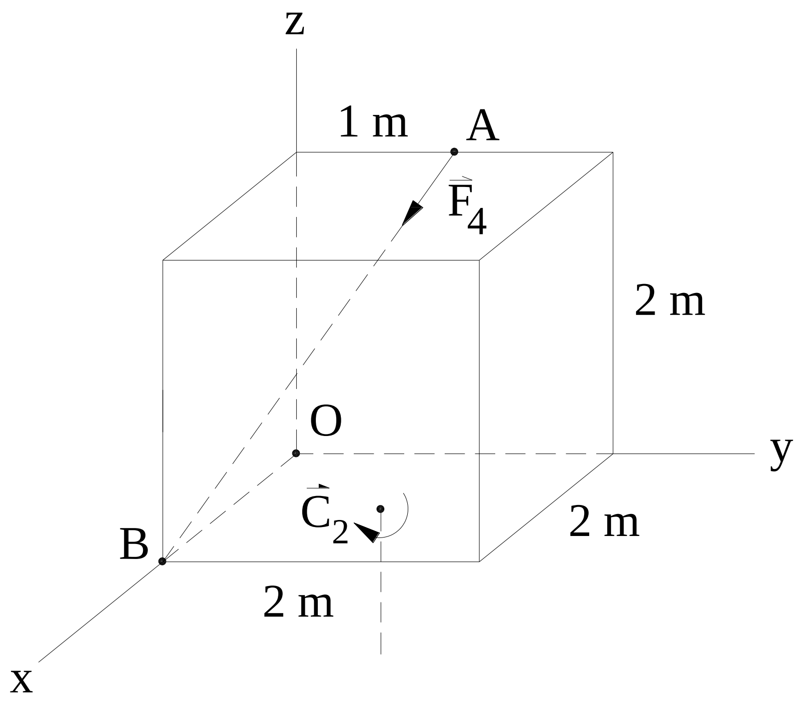
b-) İndirgenen sistemin bir vida teşkil edip etmediğini kontrol ediniz.

c-) Vida teşkil etmiyor ise vidaya indirgenip indirgenemeyeceğini kontrol ediniz.

d-) Vidaya indirgenebiliyorsa, indirgeyiniz.

Bazı Cevaplar: a-) $\vec{R} = 600\vec{i} + 100\vec{j} + 1600\vec{k}$; $\vec{M}_A = -3200\vec{j} - 1800\vec{k}$

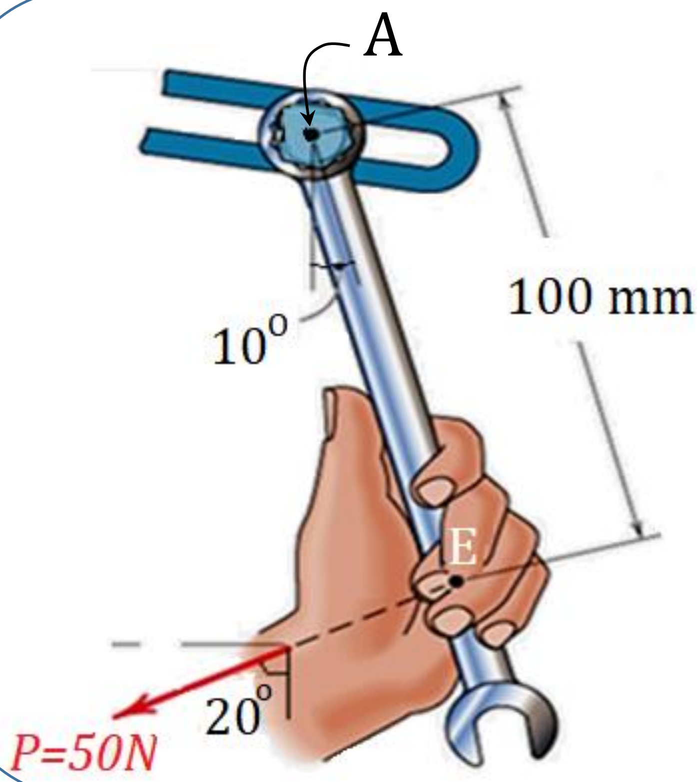
d-) $\overrightarrow{M_{R_{//}}} = -650.86\vec{i} - 107.85\vec{j} - 1729.44\vec{k}$



Örnek (Soru) 2.10

40kN şiddetindeki $\vec{F}_4$ ve 10kNm şiddetindeki $\vec{C}_2$ momentinden oluşan sistemi O noktasında vidaya indirgeyiniz.

Cevap: $\vec{R}=26.6\vec{i}-13.3\vec{j}+26.6\vec{k}$; $\vec{M}_{//}=-47.67\vec{i}-24.4\vec{j}+35.47\vec{k}$



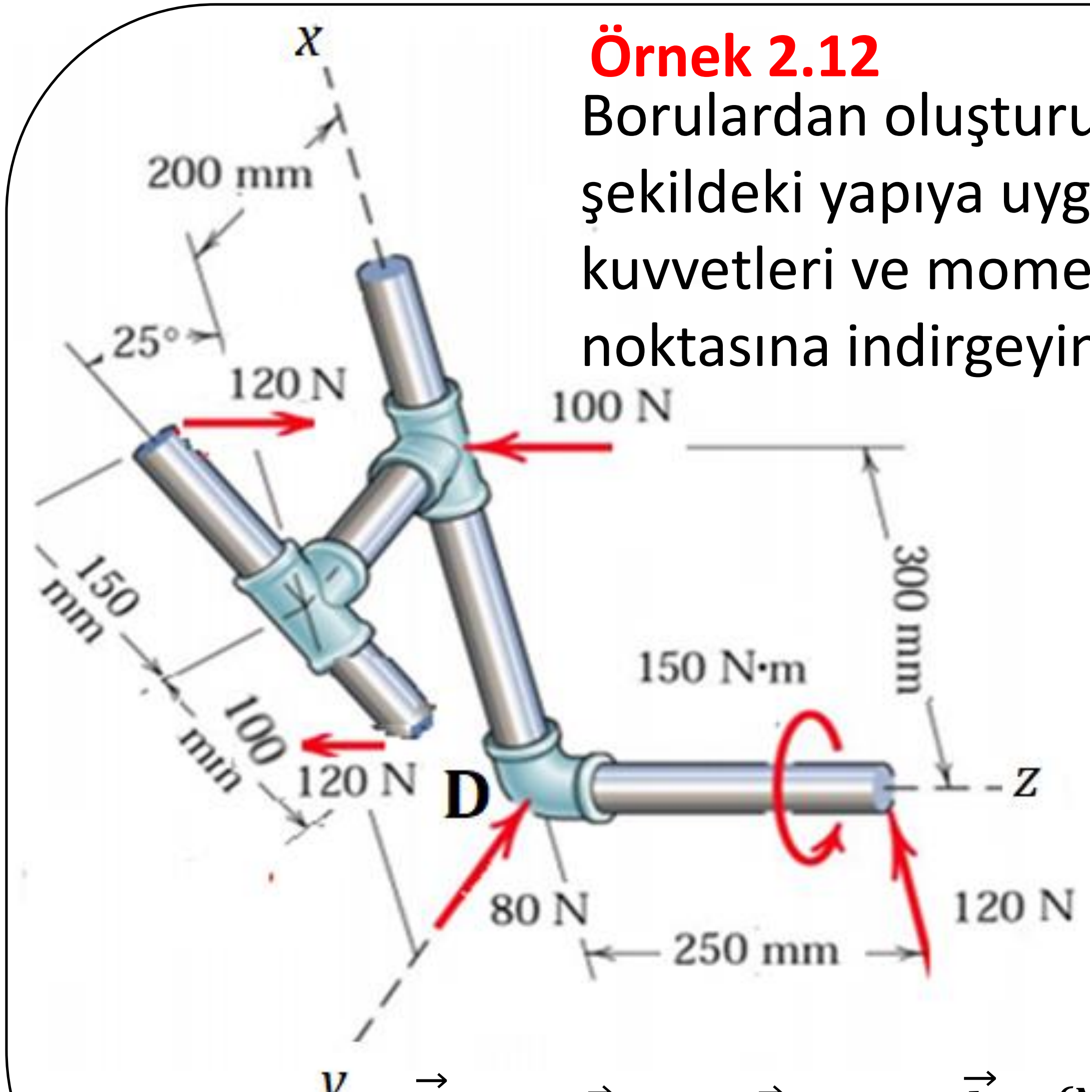
Örnek (Soru) 2.11

Bir tamirci elindeki anahtara şekildeki gibi 50 N kuvvet uyguluyor ve civatayı sıkıyor. Bu kuvvetin A noktasına göre momentini vektörel olarak bulunuz.

Cevap: $\vec{M}_o = -2499.58\vec{k}$ (Nmm)

Örnek 2.12

Borulardan oluşturulmuş şekildeki yapıya uygulanan kuvvetleri ve momenti D noktasına indirgeyiniz.

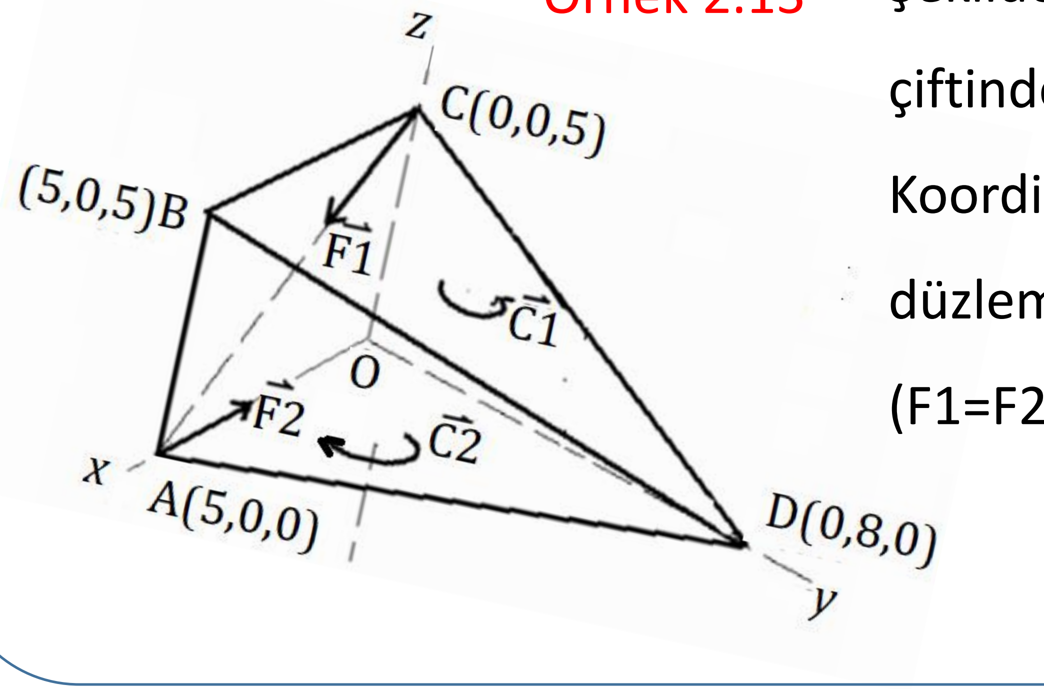


Cevap:

$$\vec{R}=120\vec{i}-80\vec{j}-100\vec{k} \quad (N)$$

$$\vec{M}=54562\vec{j}+150000\vec{k} \quad (Nmm)$$

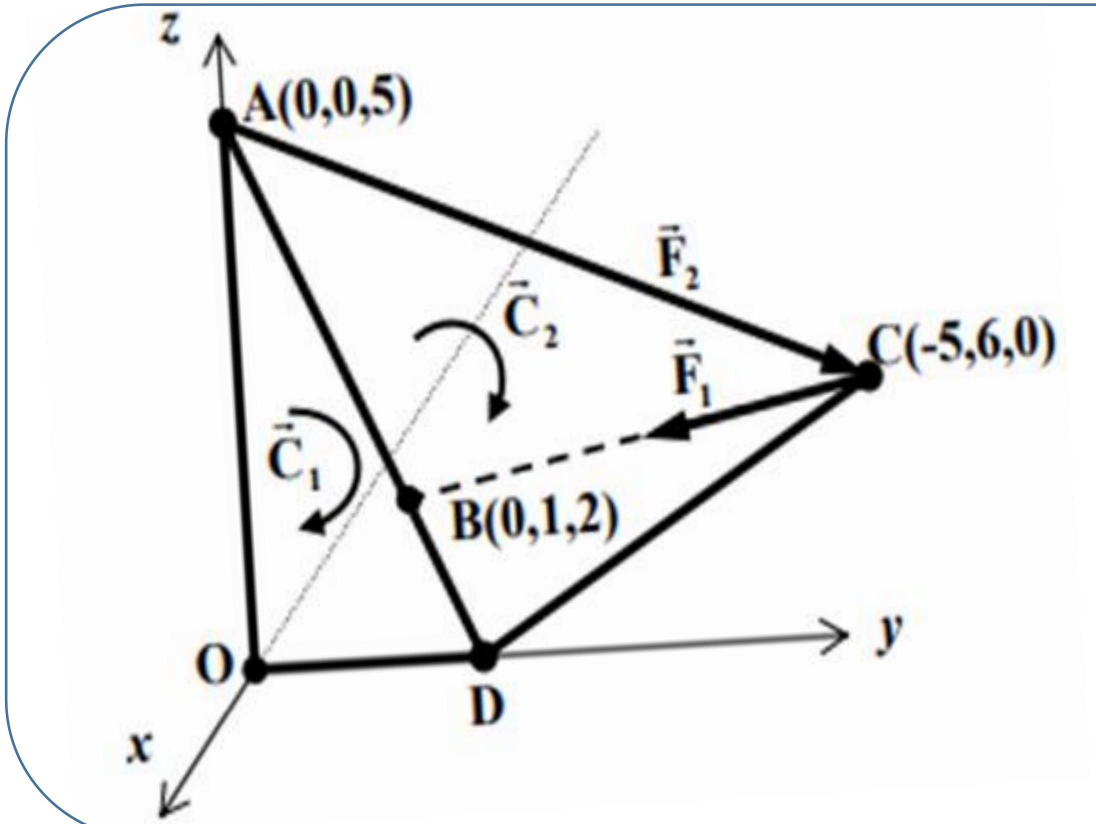
Örnek 2.13



Şekildeki piramite etki eden ve üç kuvvet ile iki kuvvet çiftinden oluşan sistemi O noktasına indirgeyiniz. Koordinatlar metre cinsinden verilmiştir. C1 momenti BCD düzlemine, C2 momenti ise OAD düzlemine uygulanmıştır. (F1=F2=50kN, C1=C2=20kNm.)

Cevap:

$$\vec{R} = -14.65\vec{i}\vec{j} - 35.3\vec{k} \;; \qquad \vec{M}_O = 187.25\vec{j} - 3.04\vec{k}$$



Örnek 2.14

Şekildeki elemana uygulanan iki kuvvet ve iki kuvvet çiftinden oluşan sistemin O noktasında bir vidaya indirgenebileceğini gösteriniz ve indirgeyiniz.

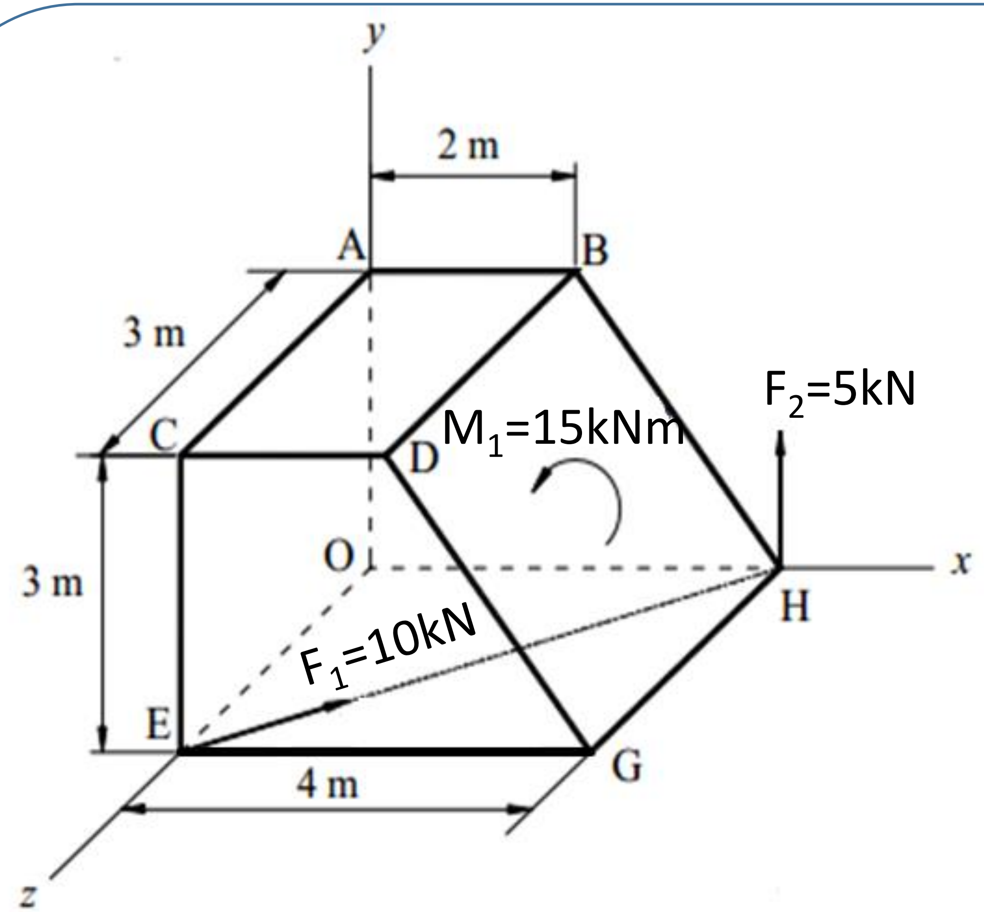
$F_1 = 10$ N , $F_2 = 20$ N ,

$C_1 = 30$ Nm (OAD), $C_2 = 40$ Nm (ADC)

Cevap:

$$\vec{M}_{//} = -3.4\vec{\imath} + 5.43\vec{\jmath} - 7.18\vec{k} ,$$

$$\vec{M}_{\perp} = -100.48\vec{\imath} - 74.88\vec{\jmath} - 9.37\vec{k}$$



Örnek (Soru) 2.15 (Makine Müh. 2015- 1vize)

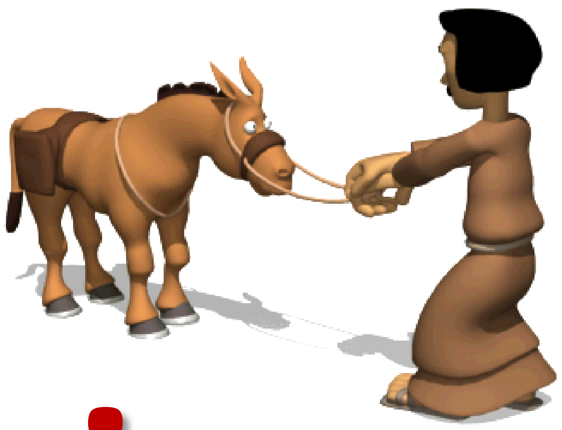
Şekildeki Sistemde, F1, F2 kuvvetlerinden ve M1 momentinden oluşan sistemi O noktasında bir vidaya indirgeniz. (M1 momenti DBHG düzlemindedir.)

Cevap: $\vec{R} = 8\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 6\vec{k}$

$$\vec{M}_O = 12.48\vec{\imath} + 32.32\vec{\jmath} + 20\vec{k}$$

Vidaya indirgenebilir: $\vec{M}_{//} = 8.86\vec{\imath} + 5.49\vec{\jmath} - 6.69\vec{k}$

;



3- STATİK DENGE

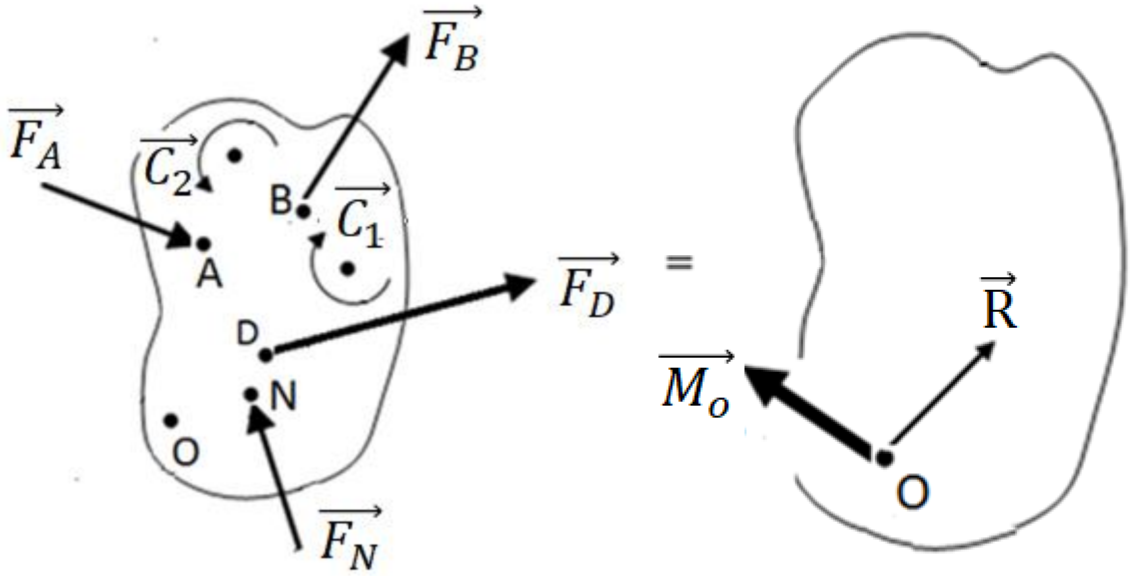
ve Kuvvet Analizleri [Video 3a,]

- 2 ve 3 Boyulu Denge,
- Skaler ve Vektörel Denge Denklemleri ile Kuvvet Hesapları,
- Bağlantı Çeşitleri,
- Serbest Cisim Diyagramları
- Çözüm Adımları,
- 2 Boyutlu Örnekler (Video 3b1) , (Video 3b2)
- 3 Boyutlu Örnekler (Video 3c)

- Bu bölümde dış yüklerin etkisine maruz olmasına rağmen, durağan halde (dengede) bulunan katı cisimler veya sistemler incelenecektir. Amacımız ise bilinmeyen kuvvetleri hesaplamaktır.

3.1 Denge Şartı:

- Dış yüklerin etkisine maruz bir katı cisim veya sistemin hareketsiz halde yani dengede kalabilmesi; ancak bileşke kuvvetin ($\vec{R}$) ve bir noktaya (veya bir eksene) göre bileşke momentin ($\vec{M}$) sıfır olmasıyla mümkündür.



- Denge Problemleri, **vektörel** çözümle yapılacaksa bu 2 denklem kullanılır ve bilinmeyen kuvvetler bulunur.

$$\vec{R} = 0 \qquad \vec{M}_o = 0 \qquad \text{Denge Şartı} \qquad \text{(D.3.1)}$$

- Genellikle 3 boyutlu problemler için vektörel çözüm tercih edilir.

$$\vec{R} = \sum F_x\vec{\jmath} + \sum F_y\vec{\jmath} + \sum F_z\vec{k} \longrightarrow \sum F_x = 0\,, \quad \sum F_y = 0\,, \quad \sum F_z = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum M_x\vec{\imath} + \sum M_y\vec{\jmath} + \sum M_z\vec{k} \longrightarrow \sum M_x = 0\,, \quad \sum M_y = 0\,, \quad \sum M_z = 0$$

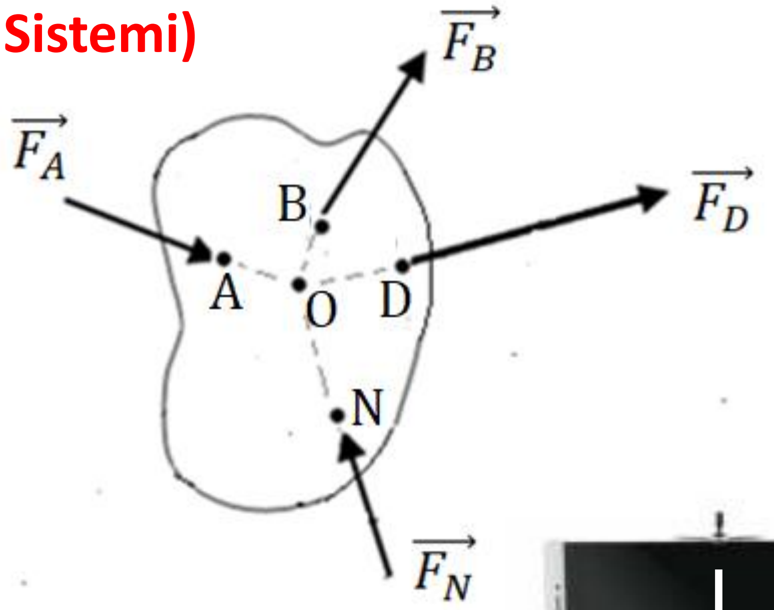
3.2 Denge Denklemleri ve Çözüm Tercihleri:

<table>
<tr><th></th><th>Skaler Çözüm
(Düzlem problemlerde tercih edilir).</th><th>Vektörel Çözüm
(Uzay problemlerde tercih edilir).</th></tr>
<tr><td>2 Boyutlu (Düzlem) Problemler</td><td>3 tane Bağımsız Skaler Denklem
$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_z = 0$ (D 3.2)</td><td rowspan="2">2 tane Bağımsız Vektörel Denklem
$\vec{R} = 0,$
$\vec{M} = 0$ (*) (D.3.1)
(*) Moment bir nokta veya eksene göre alınabilir ve sıfıra eşitlenir.</td></tr>
<tr><td>3 Boyutlu (Uzay) Problemler</td><td>6 tane Bağımsız Skaler Denklem
$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$
$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$ (D 3.3)</td></tr>
</table>

Özet olarak;

- *2 veya 3 boyutlu problemler hem skaler, hem vektörel çözülebilir.*
- *2 Boyutlu problemlerde skaler çözüm (D3.2 denklemleri), 3 Boyutlu problemlerde ise Vektörel Çözüm (D3.1 denklemleri), daha pratiktir ve tercih edilir.*

3.3 Bir Noktanın Dengesi (Doğrultuları Kesişen Kuvvetler Sistemi)



Statik dengede olan bir sisteme etki eden kuvvetlerin doğrultusu aynı noktada kesişmesi durumunda, Moment denklemi (yani $\vec{M} = 0$) yazılamaz.

Toplam kuvvet (bileşke kuvvet) sıfıra eşitlenir.

Vektörel olarak 1 denklem yazılabilir: $\vec{R} = 0$

Skaler olarak 3 denklem yazılabilir: $\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum F_z = 0$

Düzlem problemlerde ise 2 skaler denklem yazılabilir: $\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0$

Dikkat: Başka bir noktaya göre alınan moment bağımsız bir denklem değil türetilmiş bir denklem olacaktır.

Tripot
Bu tip yüklemeye bir örnektir.

3.4 Bağlantı Çeşitleri ve Ortaya Çıkan Tepkiler

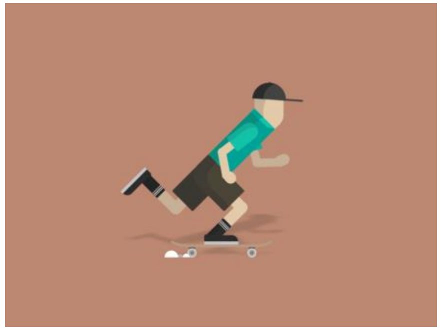
Parçaların birbirlerine bağlantıları farklı şekillerde olabilir. Bağlantı şekline göre bağlantıda ortaya çıkacak tepki kuvvetleri veya momentleri farklılık gösterir. En önemli püf noktası şudur:

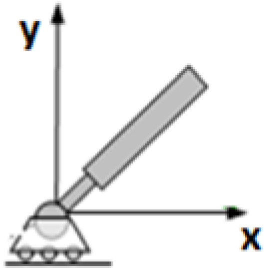
P.N 3.1 : Bağlantılarda, ötelenmeye izin verilmeyen doğrultuda tepki kuvveti; dönmeye izin verilmeyen eksende tepki momenti ortaya çıkar.

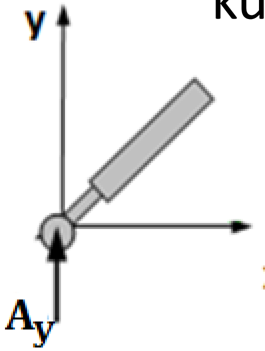
Şimdi bağlantılardan en çok bilinenleri inceleyeceğiz.

a- Kayar Mesnet (roller support)

Bir yönde ötelenmeye izin verir. Aynı zamanda dönmeye izin verir. Ötelenmeye izin vermediği doğrultuda tepki kuvveti ortaya çıkar. Düzlem problemlerde söz konudur.

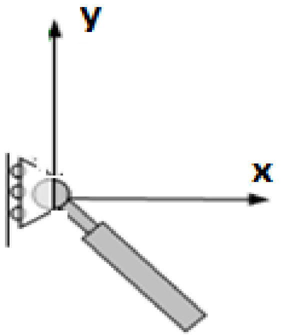


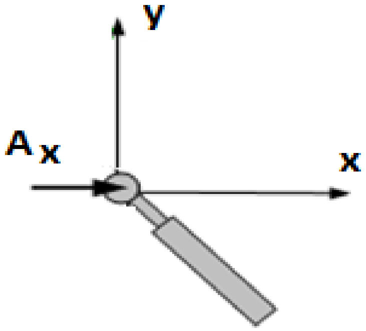




x doğrultusunda ötelenmeye izin veriyor. (altındaki tekerlekler sebebiyle)
y doğrultusunda ötelenmeye izin **vermiyor.**
z ekseni etrafında dönmeye izin veriyor.

Sadece y doğrultusunda tepki kuvveti oluşur. (A_y)

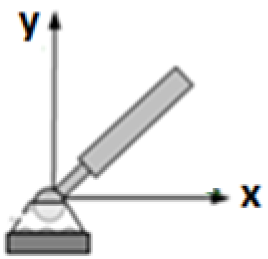


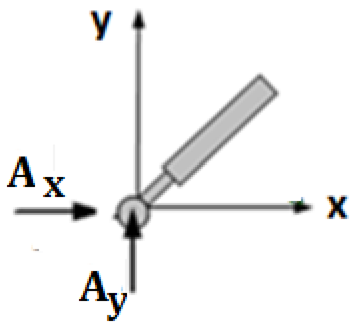


x doğrultusunda ötelenmeye izin **vermiyor.**
y doğrultusunda ötelenmeye izin veriyor.
z ekseni etrafında dönmeye izin veriyor.

Sadece x doğrultusunda tepki kuvveti oluşur. (A_x)

b- Sabit Mafsal: Düzlem problemler de söz konusudur. İki doğrultuda (yatay ve düşey doğrultularda) ötelenmeye izin vermez. Düzleme dik eksende dönmeye izin verir. Ötelenmeye izin vermediği her iki doğrultuda tepki kuvveti ortaya çıkar.

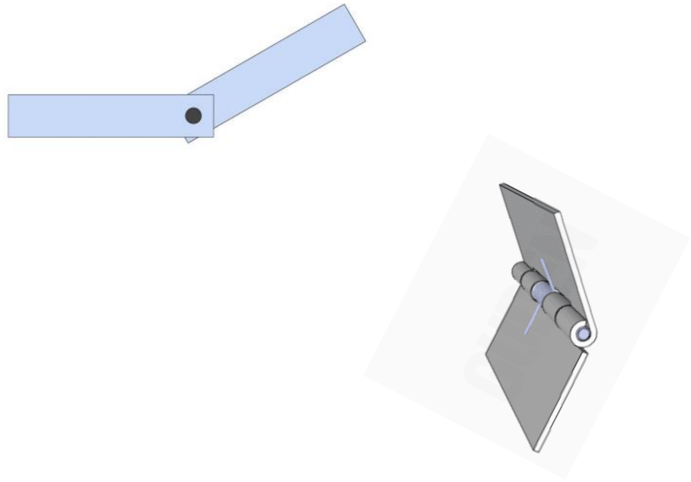


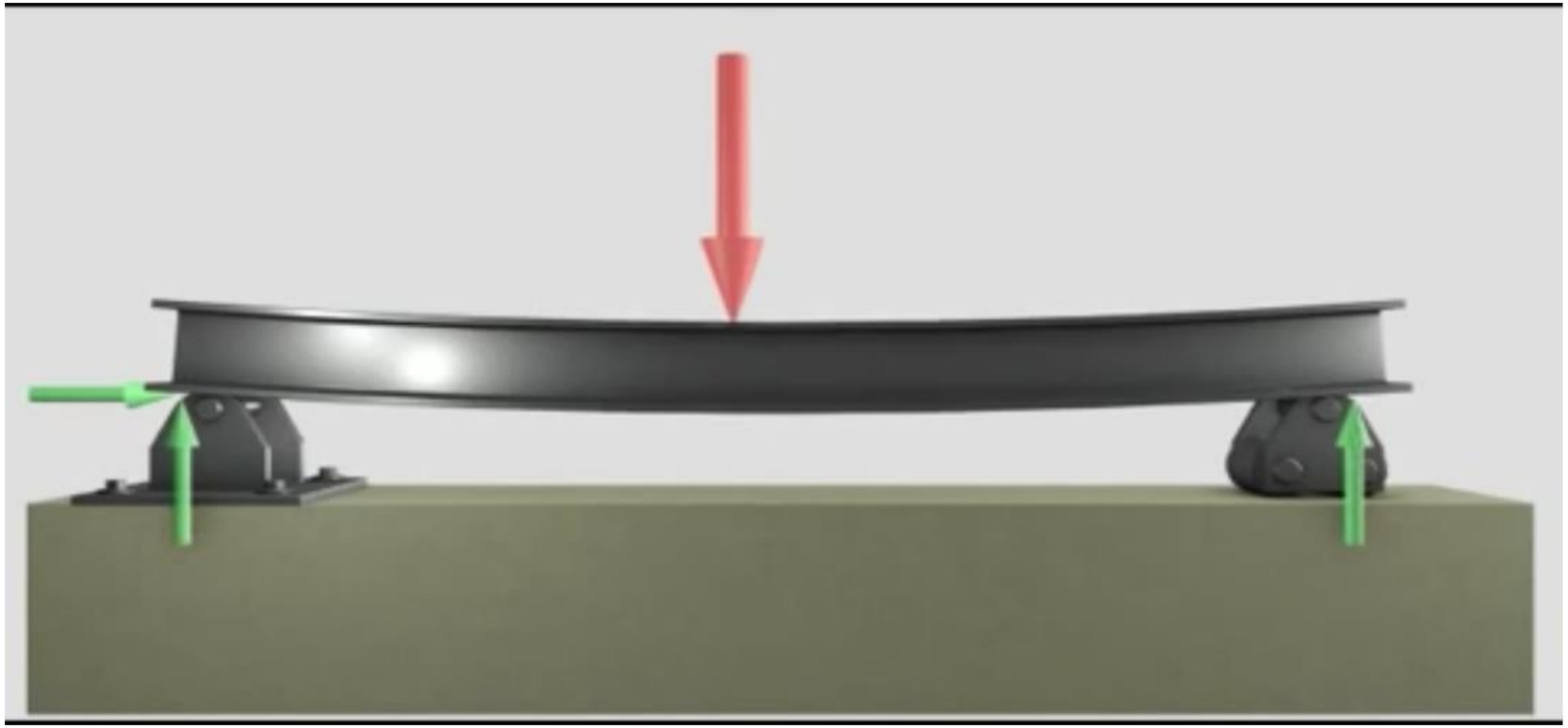


x ve y doğrultularında ötelenmeye izin **vermiyor.**

z ekseni etrafında dönmeye izin veriyor.

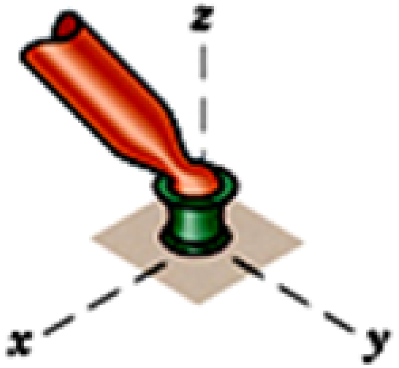
x ve y doğrultularında tepki kuvveti oluşur. (A_x, A_y)

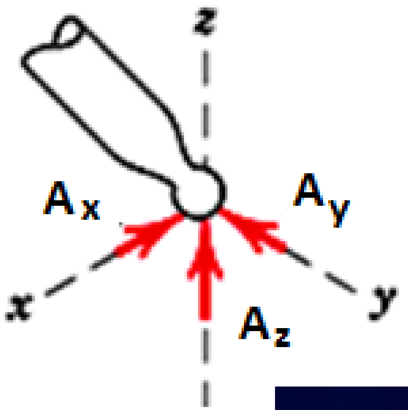




c- Küresel Mafsal (ball joint):

Sabit mafsalın 3 boyutlu durumdaki karşılığıdır. 3 eksende de ötelenmeye izin vermez. Ancak tüm eksenlerde dönmeye izin verir. (Örn: omuz eklemimiz veya banyo duş telefonu aparatları.)





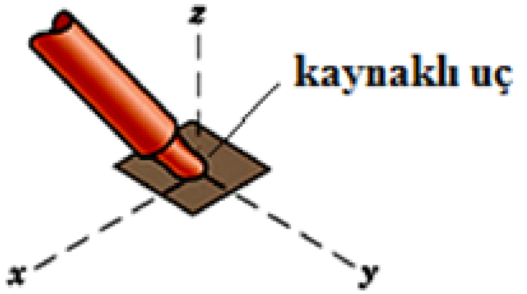
x, y ve z eksenlerinde ötelenmeye izin **vermiyor.**

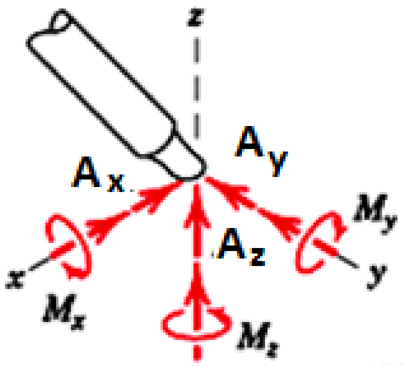
x, y ve z eksenleri etrafında dönmeye izin veriyor.

x, y ve z doğrultularında tepki kuvveti oluşur. (A_x, A_y ve A_z)

d- Ankastre Uç:

Düzlem veya uzay problemler de söz konusu olabilir. Hiçbir doğrultuda ötelenmeye ve dönmeye izin vermeyen bir bağlantıdır.
(Örn: Bir duvara betonlanmış veya kaynaklanmış bir çubuk)





x, y ve z doğrultularında ötelenmeye izin **vermiyor.** → A_x, A_y ve A_z tepki kuvvetleri oluşur.

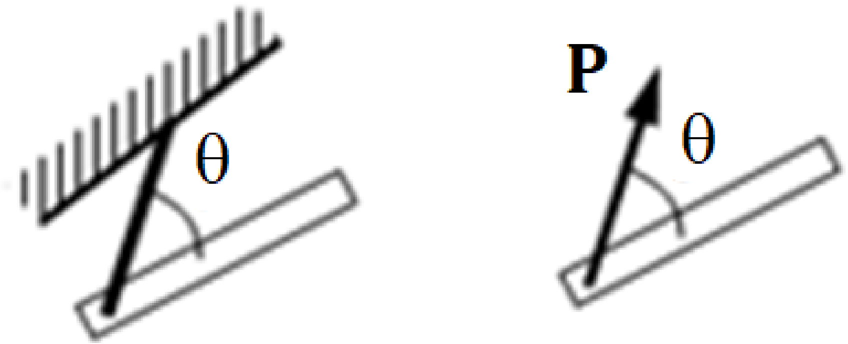
x, y ve z eksenleri etrafında dönmeye izin **vermiyor.** → M_x, M_y ve M_z tepki momentleri oluşur.

Not: Düzlem problemlerde

sadece A_x, A_y ve M_z oluşur.

(x-y düzleminde)

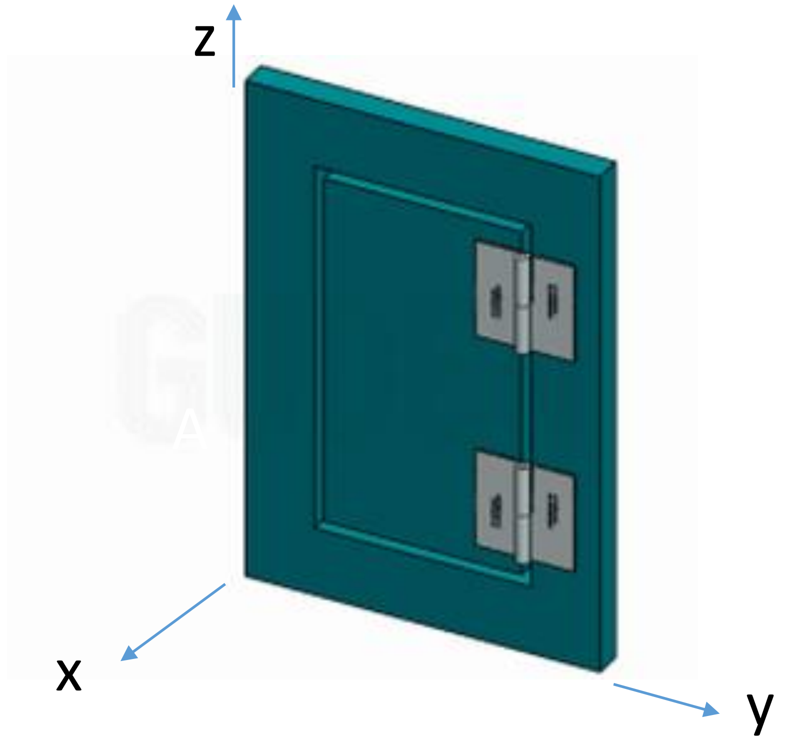
e- Kablo ve İp bağlantıları:



- Düzlem veya uzay problemler de söz konusu olabilir.
- Ağırlığı ihmal edilen bir ip veya kablo kendi ekseni doğrultusunda çeki kuvveti oluşturur.
- Basıya çalışmaz.
- Aksi söylenmedikçe kablo veya iplerin ağırlığı ihmal edilir.

f-Bağlantı Örneği: Menteşe

Şekildeki kapının menteşeleri z eksenininde dönmeye ve ötelenmeye izin verdiği için A_z=M_z=0 dır. Ötelemeye izin vermediği x-y yönlerinde A_x, A_y tepki kuvvetleri ve dönmeye izin vermediği yine x-y doğrultularında M_x, M_y tepki momentleri ortaya çıkacaktır.



P.N 3.2) Sıkça Sorulan önemli bir soru: Bilinmeyen Kuvvetlerin yönünü nasıl seçeriz?

Cevap:

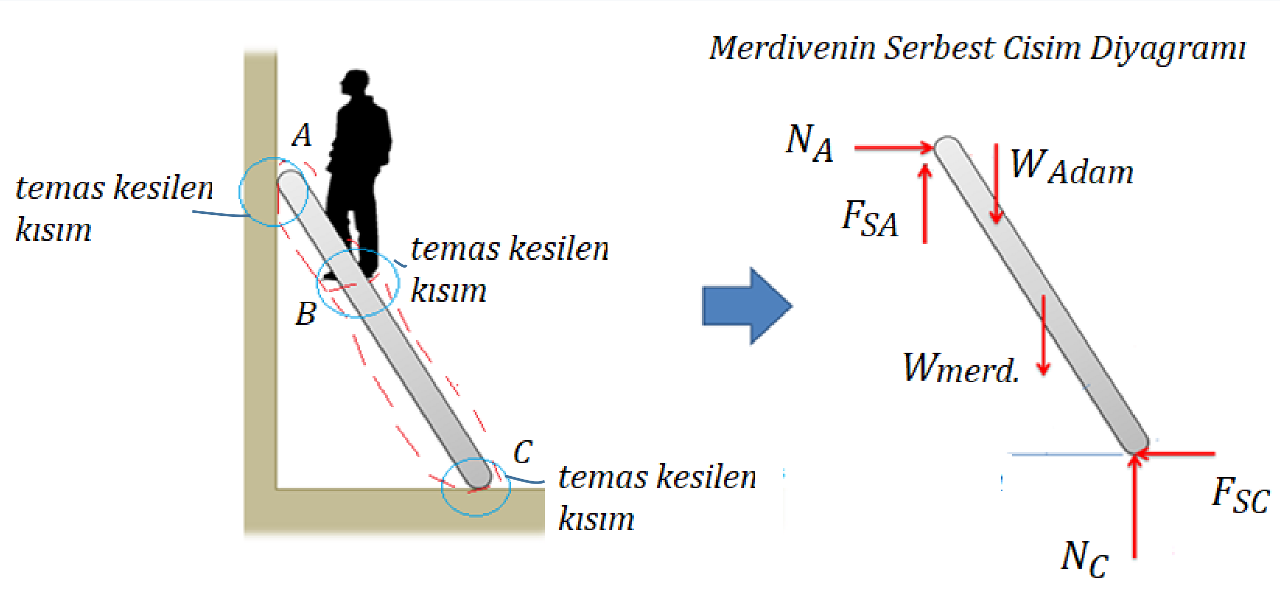
- Bilinmeyen kuvvetlerin yönü ilk seferde keyfi seçilir. Eğer hesaplama sonucunda işareti negatif çıkarsa seçtiğimiz yönün tersineymiş denir. Yönü hiç değiştirilmez ve işaretiyle birlikte denklemlerde kullanılır.
- Veya yönü değiştirilince işareti de değiştirilmelidir.
- 2nci kez aynı kuvvet diğer cisimde yerleştirilecekse, ilk yerleştirmenin zıttı yönünde yerleştirmek zorunludur.

(Bu durum daha çok çerçeveler ve basit makinalar konusunda karşımıza çıkacaktır.)

3.5 Serbest Cisim Diyagramı (SCD)

- Bir cismin, diğer cisimlerden teması kesilir,
- Boşlukta serbest olarak çizilir ,
- Üzerine etki eden ağırlık dahil tüm dış yükler ve
- temasın kesildiği kısımlardaki tepki kuvvetleri

  üzerinde mutlaka gösterilir.
- Buna o cismin Serbest Cisim Diyagramı denir.

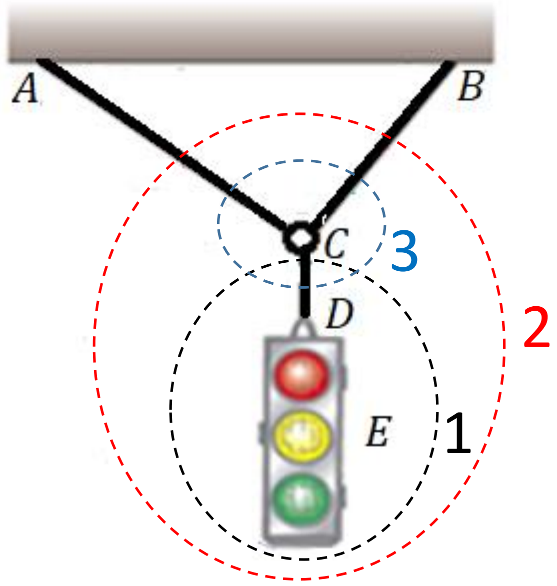


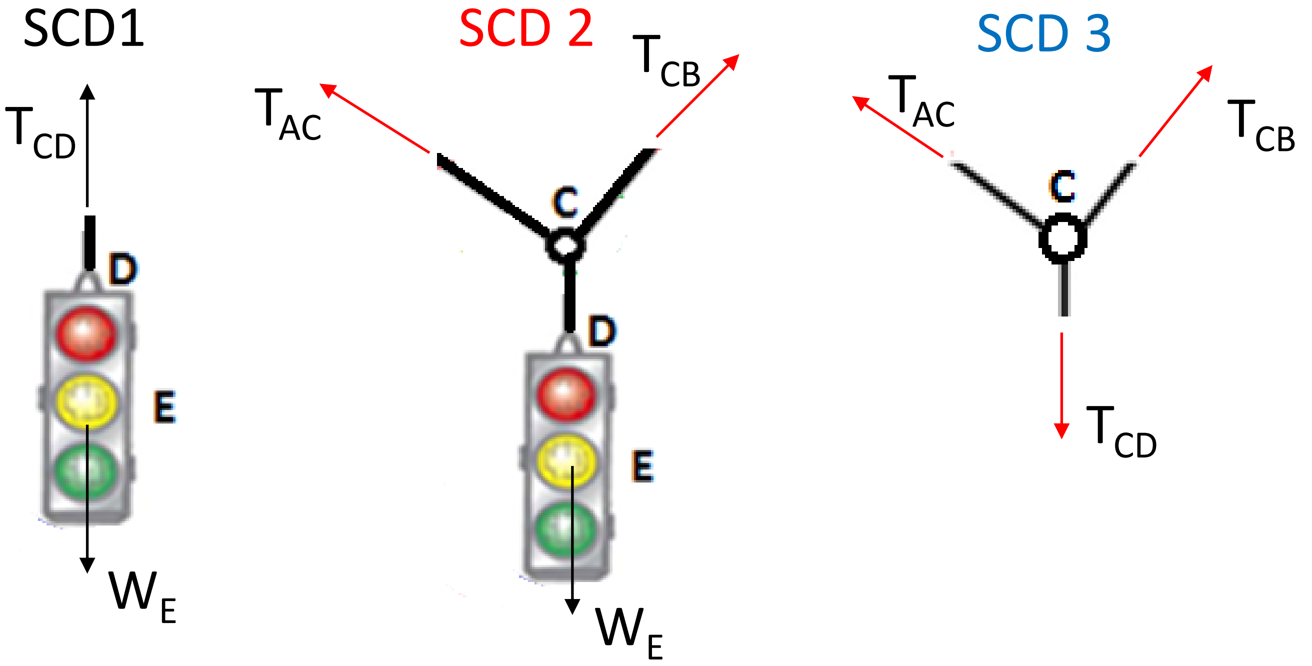
Merdivenin duvardan ve adamdan teması kesilerek SCD çizilmiştir. Temasın kesildiği kısımlarda kuvvet gösterildiğine dikkat ediniz.

Statiğin temel konusu kuvvet hesabıdır. Kuvvet hesabının en önemli adımı SCD'nin doğru çizilmesidir.

P.N 3.3 SCD çizerken püf noktaları:
a-Cisim izole edilirken, temasın kesildiği herbir kısmında mutlaka kuvvet gösterilir.
b-İzole edilmediği temas noktalarında ise kuvvet gösterilmez.
d-Herbir SCD da tüm kuvvetler birbirini dengeler ve dolayısıyla herbir SCD için denge denklemleri uygulanabilir.

3.5 - SCD Örneği-1: Bir trafik lambası üç farklı ip ile asılı tutulmaktadır. İpler bir C halkasına bağlanmıştır. Buna göre gösterilen 1,2 ve 3 izolasyonlarının her biri için Serbest Cisim Diyagramları aşağıda çizilmiştir.



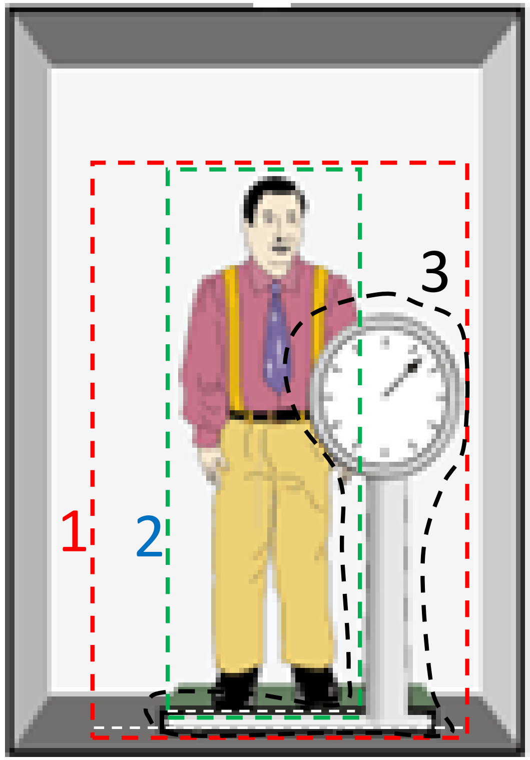


Her bir SCD için, sadece izole edilen (hayali olarak kesilen) iplerde kuvvet ortaya çıktığını fark ediniz.

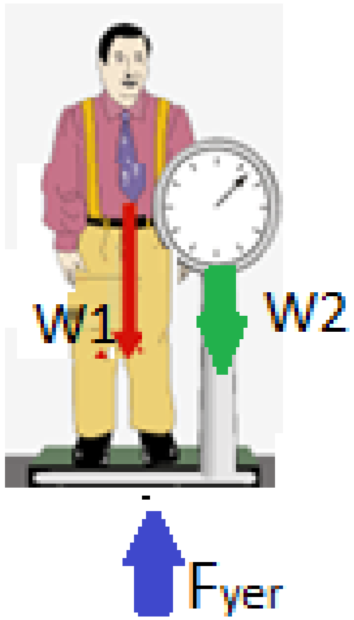
Soru -1 : SCD 2 de, T_{CD} kuvveti niçin gösterilmemiştir?
Cevap: Çünkü 2 no'lu izolasyonda T_{CD} kuvvetinin çıktığı CD ipi kesilmemiştir.

Soru -2 : SCD-1 ve SCD-3 de T_{CD} kuvvetlerinin yönleri niçin terstir?
Cevap: SCD-1 de, trafik ışığına CD ipinden gelen kuvvet; SCD-3 de ise CD ipine trafik ışığından gelen kuvvet çizilmiştir. Etki-tepki prensibine göre bunlar eşit şiddette ve zıt yönde olmalıdır.

(SCD) Örneği -2

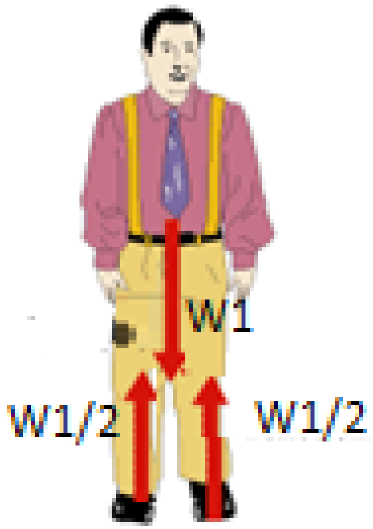


Adam ve Tartı dan oluşan dengede bir sistem (W1: adamın ağırlığı, W2: tartı ağırlığı)



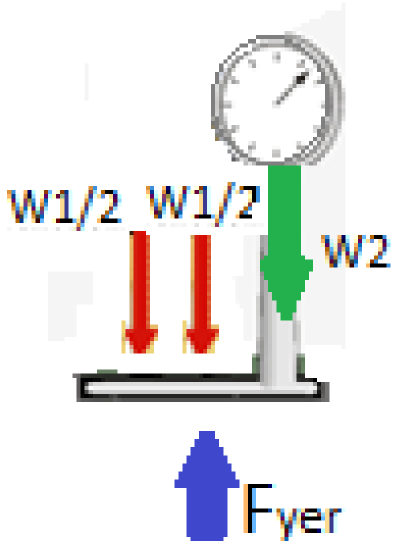
SCD-1: Tüm sistem

Tüm Sistem sadece yerden izole edilmiş. Adamın ayaklarının temas ettiği kısımdan izole edilmediğinden burada (adamın ayak kısmında) bir kuvvet çizilmediğine dikkat ediniz.



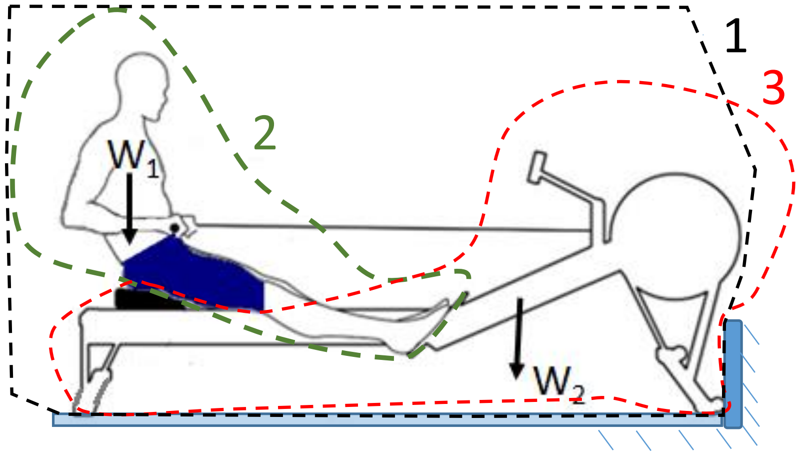
SCD-2 : Adam:

Adam tartıdan izole edilmiş. İzole edilen temas noktalarında (ayaklarında) tepki kuvvetleri şimdi çizilir.



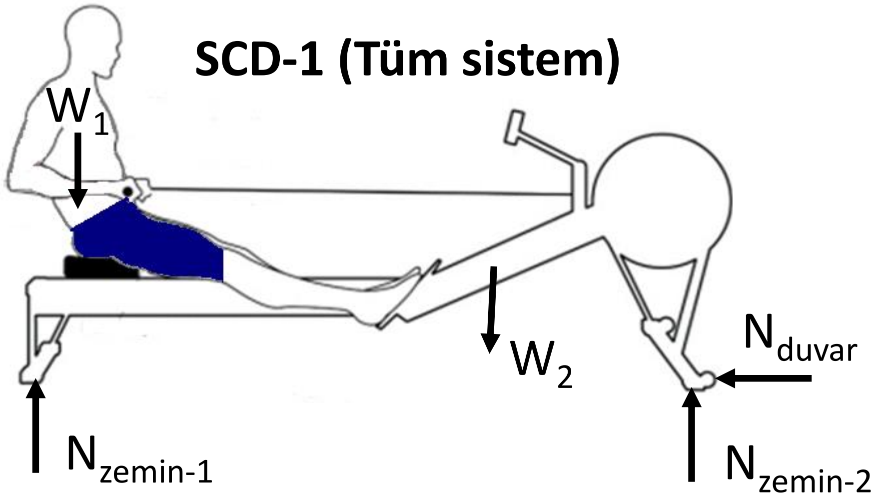
SCD-3 : Tartı:

Tartı hem yerden hem adamdan izole edilmiş. (Diğer SCD lere göre bunu kendiniz yorumlayın)

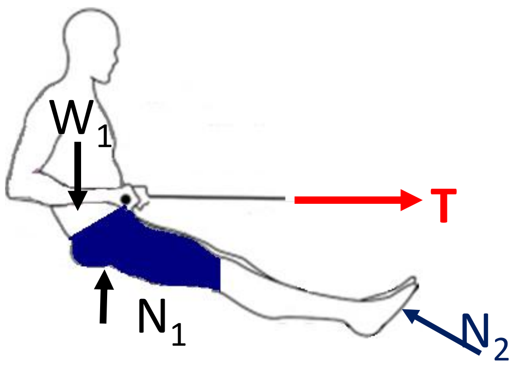


SCD Örneği-3: Şekildeki spor aleti ve sporcudan oluşan sistemde tüm sistemin ve ayrı ayrı parçaların SCD'lerini dikkatlice inceleyiniz. (W_1, W_2 sporcu ve spor aletinin ağırlıkları olup, sporcunun oturduğu siyah yastığın ağırlığı ve sürtünmeler ihmal edilmiştir.)

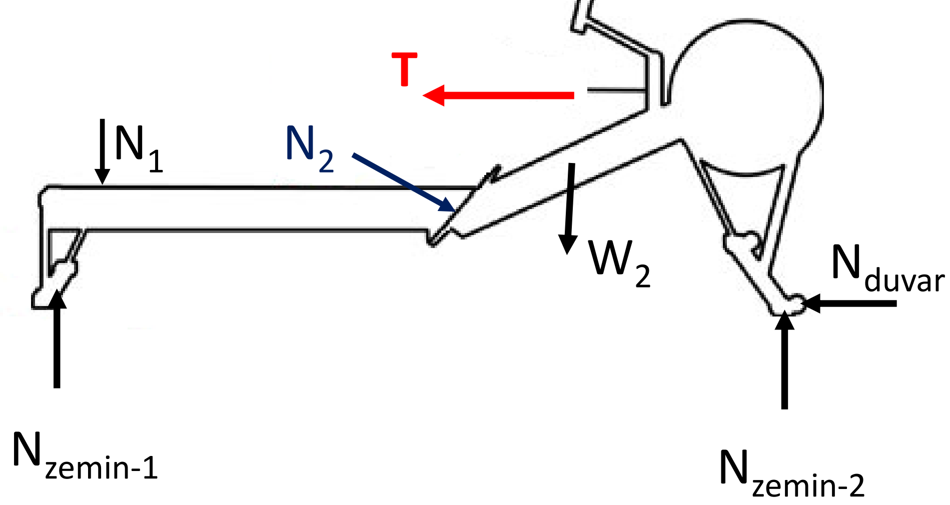
SCD-1 (Tüm sistem)



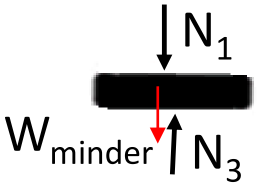
SCD-2 (Sporcu)



SCD-3 (spor aleti)



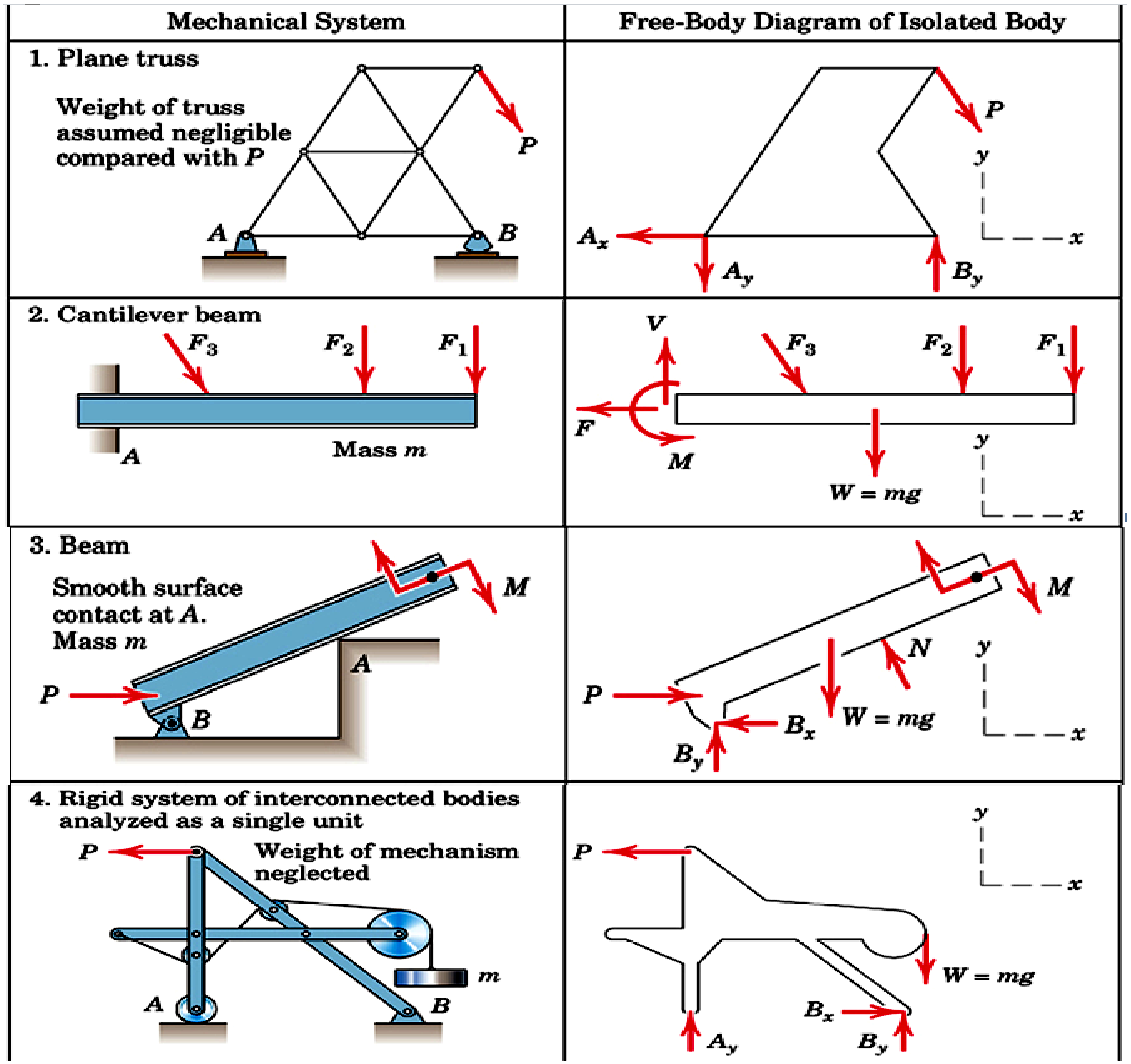
SCD-3 (Minder)



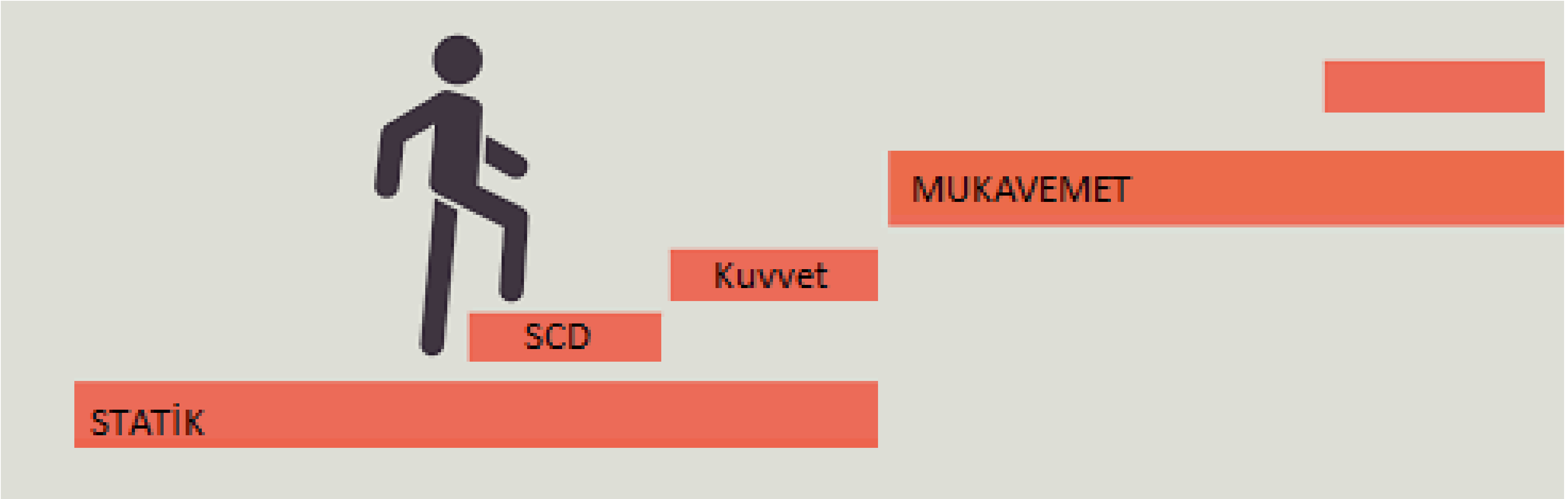
3.6- Bağlantı Elemanları için Serbest Cisim Diyagramı (SCD) örnekleri:

Hatırlatma:

- *Tepki kuvvetinin yönü ilk seferinde keyfi olarak seçilir. Hesaplandığı zaman işareti negatif (-) çıkarsa, seçilen yönün tersineymiş denir.*
- *Dikkat: Bir tepki kuvveti 2nci kez keyfi yerleştirilemez. İlk yerleştirmedeki yönü dikkate alınarak 2nci kez yönü belirlenir. Özellikle bu durum çerçeve sistemleri konusunda önem kazanır.*
- *İşareti negatif çıkan tepki kuvvetinin yönü değiştirilmezse, denklemlerde işaretiyle birlikte kullanılmalıdır.*



3.7 Kuvvet Hesaplarında İşlem Adımları:



Statik dengedeki bir katı sistemde bilinmeyen kuvvetleri bulmak için 2 basamak vardır:

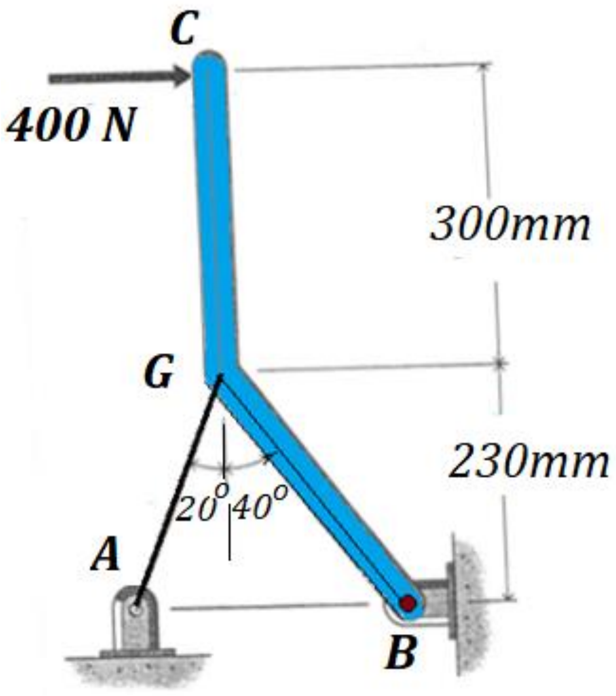
1- Dengesi incelenecek sistemin veya cismin serbest cisim diyagramı (SCD) çizilir.

2- Statik denge denklemleri yazılır ve bilinmeyen kuvvetler bu denklemlerden bulunur.

3.8: İki Boyutlu (Düzlem) Denge Problemi Örnekleri

Bu problemlerde skaler çözümü (D 3.3 denklemlerini) tercih edeceğiz. .

Örnek 3.1 (2016 - 1.vize) Video-3a Örnek : 3a.1

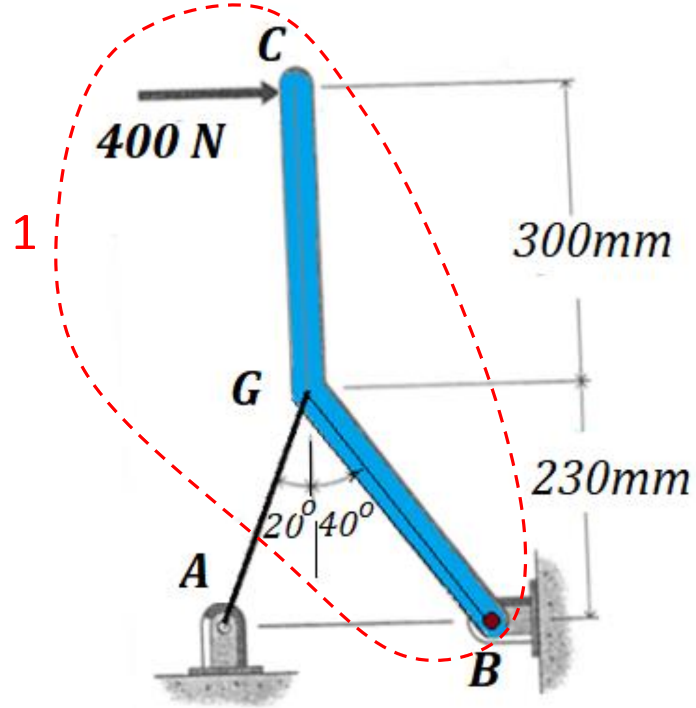


W = 400 N ağırlığındaki dirseğin Ağırlık merkezi G noktasındadır. Dirsek A ucundan sabit mafsala bağlı olup, C ucuna uygulanan 400 N'luk yatay kuvvet, AG kablosu ile dengelenmiştir. Buna göre, kabloda ve B bağlantısında ortaya çıkan kuvvetleri hesaplayınız.

Çözüm

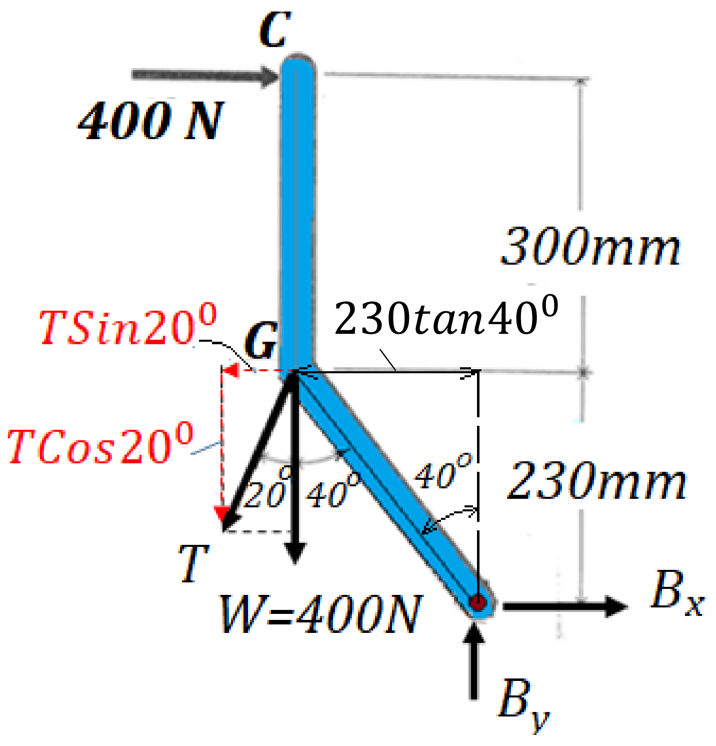
1.Adım (SCD çizimi):

Kablo ve B bağlantısından dirseği izole ediyoruz.



..>>

SCD -1



2.Adım:

Düzlemde Skaler Denge Denklemleri

$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad 400 - TSin20^0 + B_x = 0$

$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad -W - TCos20^0 + B_y = 0$

$\sum M_G = 0 \quad \rightarrow \quad -400 \text{ x} 300 + B_x 230 + B_y 230 \text{ x } tan40^0 = 0$

Bu 3 denklemden, 3 bilinmeyen şu şekilde bulunur:

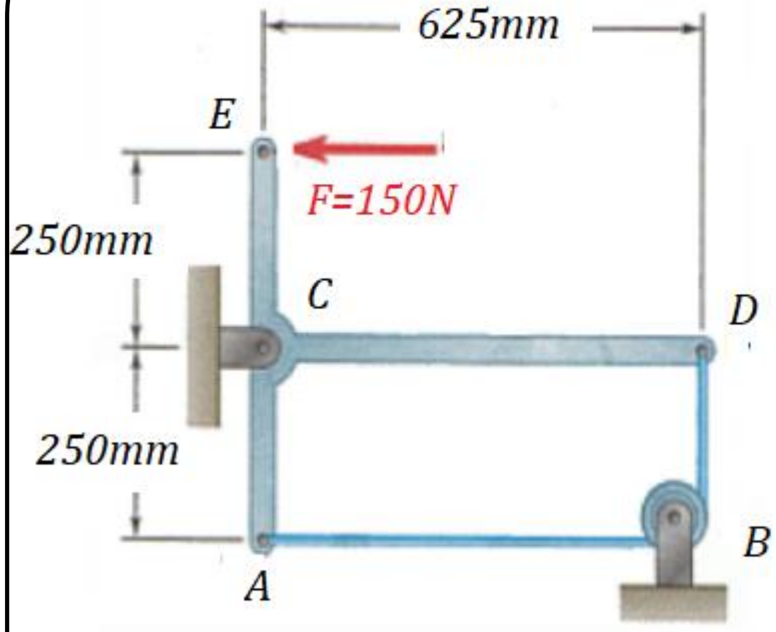
T= 518.71 N, B_x = -222.6 N, B_y = 887.07 N

- B_x, B_y'nin yönleri başlangıçta keyfi seçilebilir. İşareti (–) çıkarsa seçilen yönün tersi imiş denir.
- B_x'in (-) negatif çıkması seçilen yönün tersi yönünde olduğunu gösterir.
- B_x eğer sola doğru seçilseydi işareti + çıkacaktı.

Bir kuvvetin momentinin işaretini ve yönünü belirlemekte zorluk çekenler için pratik bir bilgi: Cismi, moment alınan noktada sadece (dönmeye izin veren) sabit mafsallı gibi düşünün.(Diğer bağlantıları ve diğer kuvvetleri yok sayın.) İncelediğimiz kuvvet cismi bu sabit mafsal etrafında ne yönde döndürür onu hayal edin. Saat ibreleri tersi yönünde döndürürse kuvvetin momenti pozitif, aksi yönde negatiftir (bu kural +x sağa, +y yukarı olması durumunda geçerlidir.) Dik uzaklığın kuvvete dik olduğunu ve moment alınan noktadan geçtiğini unutmayın. Örn: üstteki örnekte 400N luk kuvvetin, G noktasında sadece sabit mafsal varken, bu cismi saat ibreleri yönünde döndüreceğini ve bu sebeple momentinin negatif (-400x300) olacağını görmeye çalışın.

Örnek 3.2

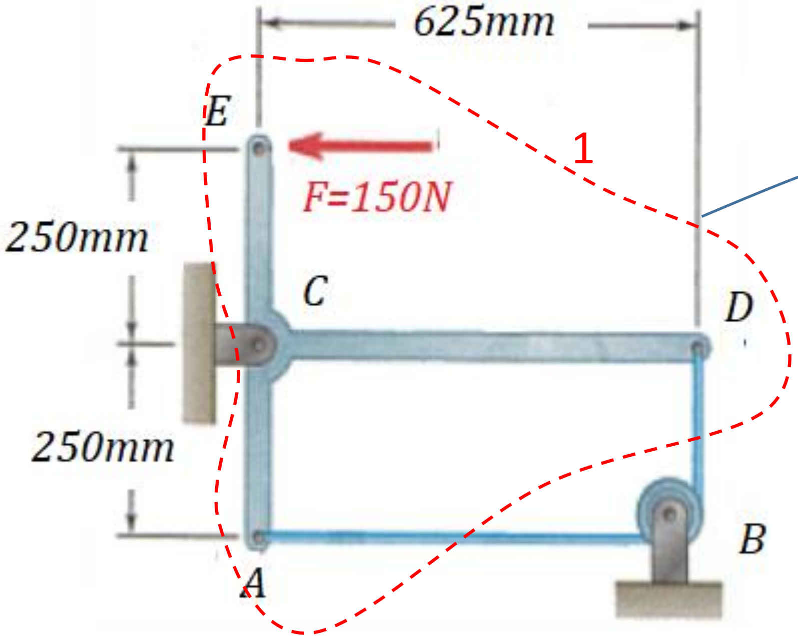
Video-3b1 Örnek : 3b.3

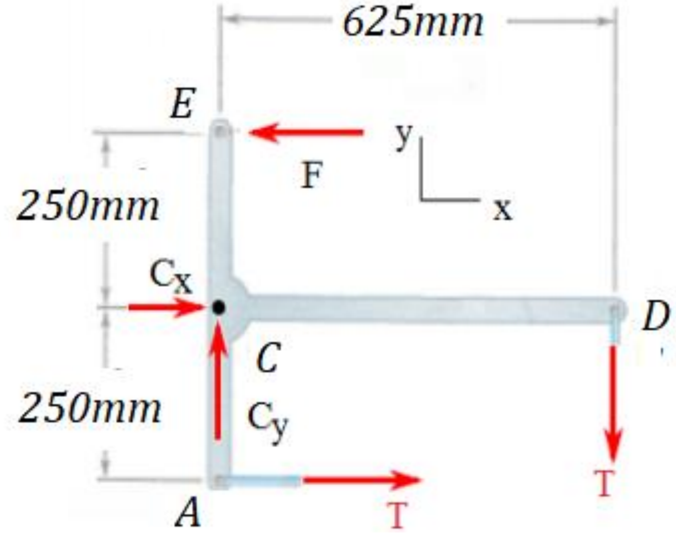


Ağılığı ihmal edilen ⊢ şeklindeki eleman, gösterilen yükleme ve bağlantı durumu için dengededir. Sürtünmesiz B makarasından geçirilen kabloda ve C bağlantısında ortaya çıkan kuvvetleri bulunuz.

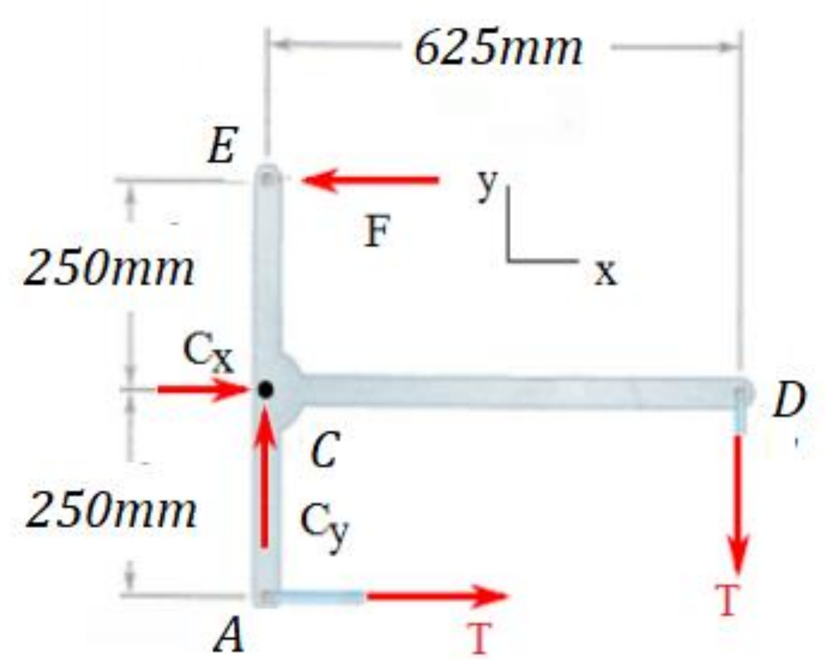
Çözüm:

1.Adım : Serbest Cisim Diyagramı SCD-1





- *1 nolu İzolasyonda AB ve BD kısımları hayali olarak kesildiği için 2 tane T kuvveti oluşacaktır.*
- *C sabit mafsal olduğundan her iki yönde tepki kuvveti oluşur. Tek Kablo olduğu için tüm kısımlarında aynı çeki kuvveti (T) oluşur. (Makarada sürtünme olsaydı kısımlara göre T değişirdi.)*



2.Adım: Denge Denklemlerinden kuvvet hesapları

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \quad T.(250) - T.(625) + F(250)=0$$

$$\rightarrow -T.(375) + 150(250)=0$$

$$\rightarrow T = 100N$$

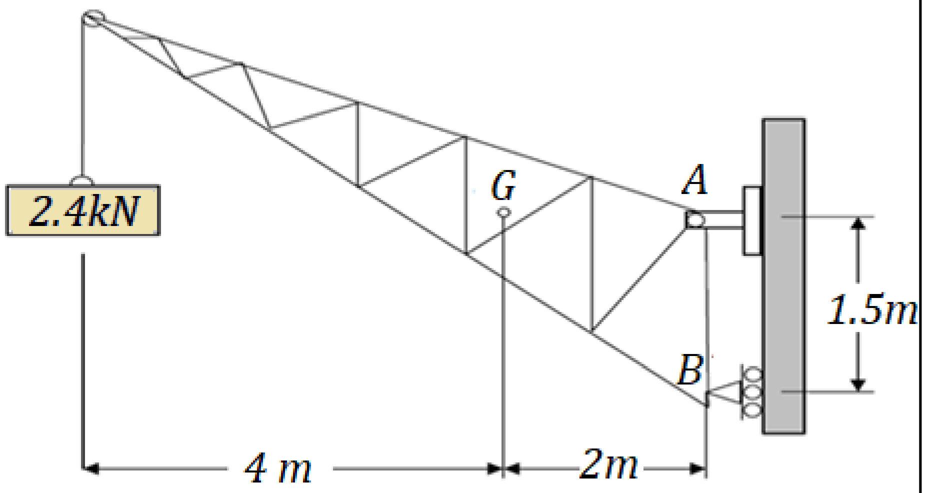
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad C_x + T - F = 0 \rightarrow C_x + 100 - 150 = 0$$

$$\rightarrow C_x = 50 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad -T + C_y = 0 \qquad \rightarrow C_y = 100 \text{ N}$$

$$C = \sqrt{(50)^2 + (100)^2} = 111.8 \text{ N}$$

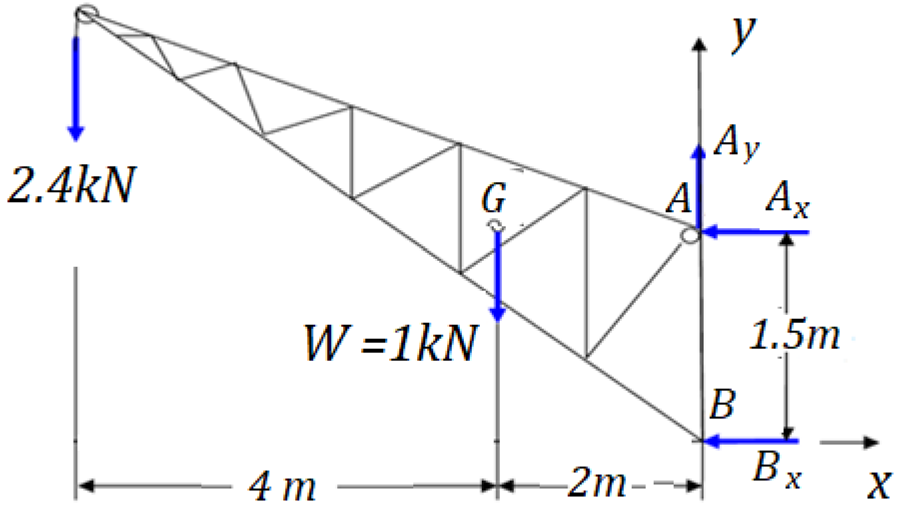
Örnek 3.3 Video-3b1 Örnek : 3b.1,



1kN kütleli bir sabit vinç 2.4 kN kütleli bir cismi kaldırmakta kullanılıyor. Vinç A da sabit B de kayıcı mafsal ile mesnetlenmiştir. Vincin kütle merkezi G noktasıdır. A ve B mesnetlerindeki tepkileri bulunuz.

Çözüm:

1.Adım: *Vinci bağlantılardan izole ederek SCD sini çizelim*



A sabit mafsaldır. B deki bağlantı kayıcı mafsal olduğu için y ekseni yönünde harekete izin verir ve y doğrultusunda kuvvet taşıyamaz. Bundan dolayı B mesnetinde, sadece x ekseni doğrultusunda tepki kuvveti ortaya çıkar.

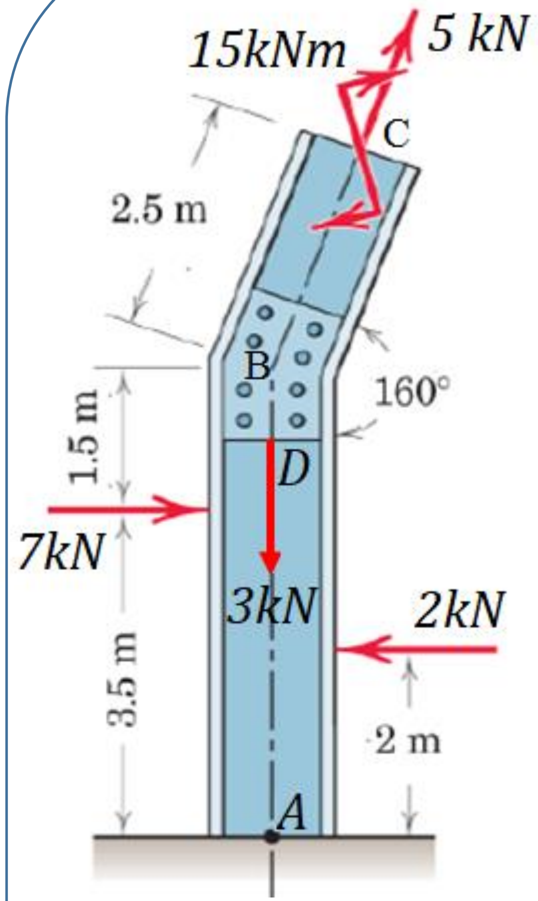
Dönmeye de izin verdikleri için A ve B de tepki momentleri oluşmaz.

2. Adım: *Denge Denklemlerinden Kuvvet Hesaplamaları:*

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \;\Rightarrow -A_x - B_x = 0 \\ &\sum F_y = 0 \;\Rightarrow A_y - 1 - 2.4 = 0 \\ &\sum M_A = 0 \;\Rightarrow -B_x\,x1.5 + 1x2 + 2.4x6 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_x &= -10.93\text{ kN} \\ B_x &= 10.93\text{ kN} \\ A_y &= 3.4\text{ kN} \end{aligned}$$

$$R_A = \sqrt{(-10.93)^2 + (3.4)^2} = 11.44\text{ kN}$$

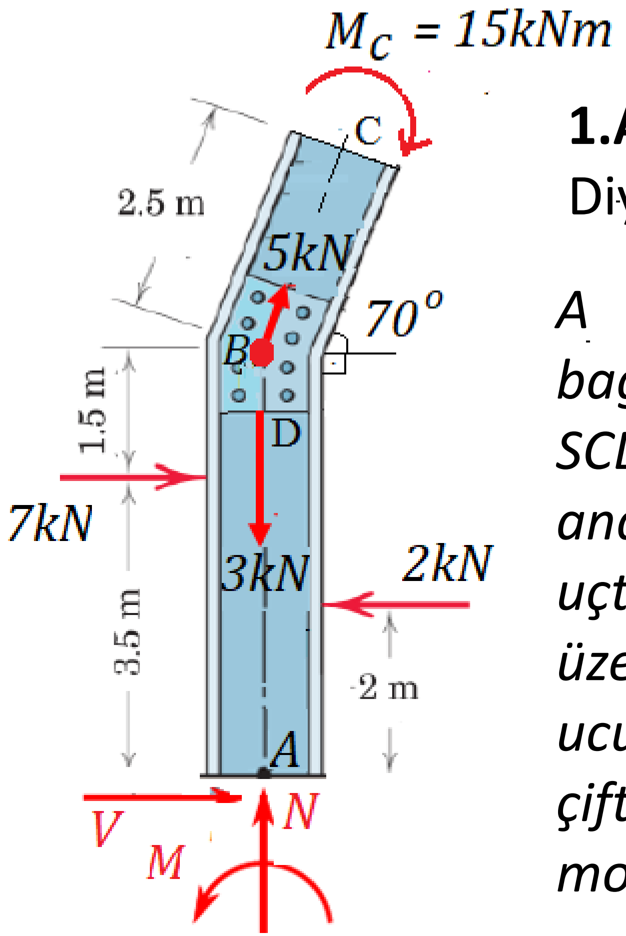
Örnek 3.4



A ucu bir duvara betonlanmış olan kirişe şekildeki gibi 4 adet tekil kuvvet ve serbest ucundan 15 kN-m lik bir kupl uygulanıyor.

A ucunda ortaya çıkacak tepkileri hesaplayınız.

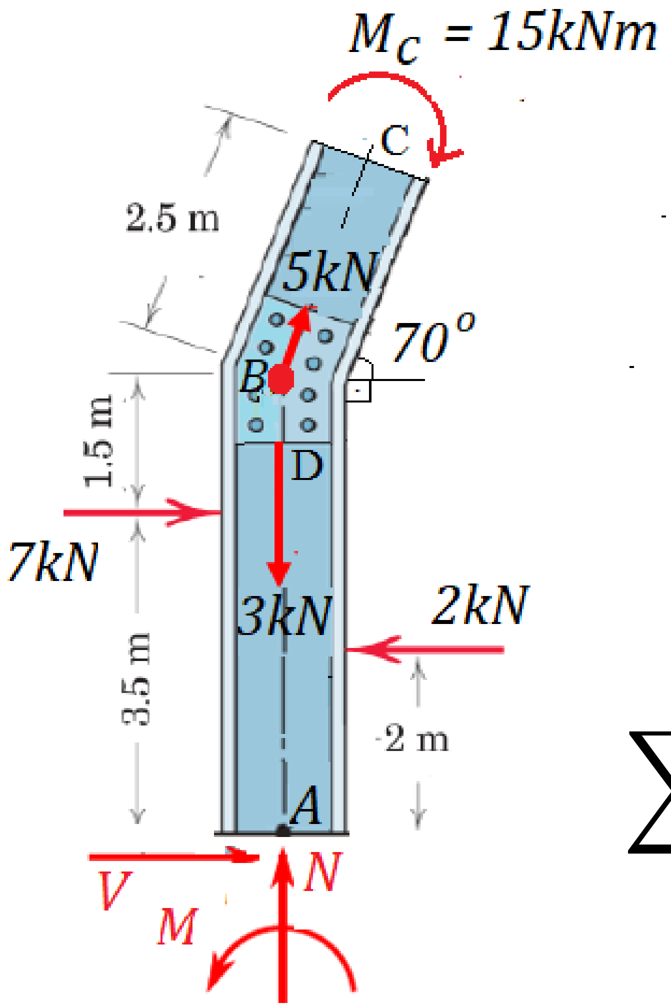
Çözüm:



1.Adım : Kirişin Serbest Cisim Diyagramı (SCD)

A noktasındaki ankastre bağlantıdan kirişi izole ederek SCD sini çizdik. Bu sırada aynı anda C noktasındaki 5kN luk uçtaki kuvveti kendi hattı üzerinde B noktasına kaydırdık. C ucundaki 15kNm lik yük, kuvvet çifti (kupl) olup, sadece döndürme momenti etkisi (M_c) vardır.

A noktası ankastre uçtur. Hiçbir yönde dönmeye ve ötelenmeye izin vermez. Bu sebeple x ve y doğrultularında tepki kuvvetleri (N, V) ve tepki momenti (M) oluşur. (bknz: konu 3.4-d)



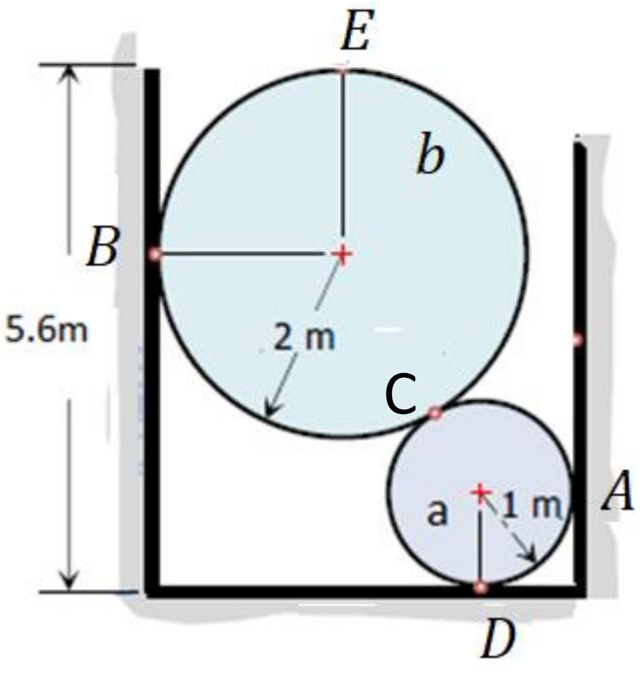
2.Adım: Denge Denklemleri ve Kuvvet hesapları

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow V + 7 - 2 + 5cos70^\circ = 0 \rightarrow V = 6.71\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow N + 5sin70^\circ - 3 = 0 \rightarrow N = -1.7\ kN$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow M - 15 - 5cos70^\circ(1.5 + 3.5) - 7x3.5 + 2x2 = 0$$

$$\rightarrow M = 44.05\ kN.m$$



Örnek 3.5

Ağırlıkları sırasıyla;

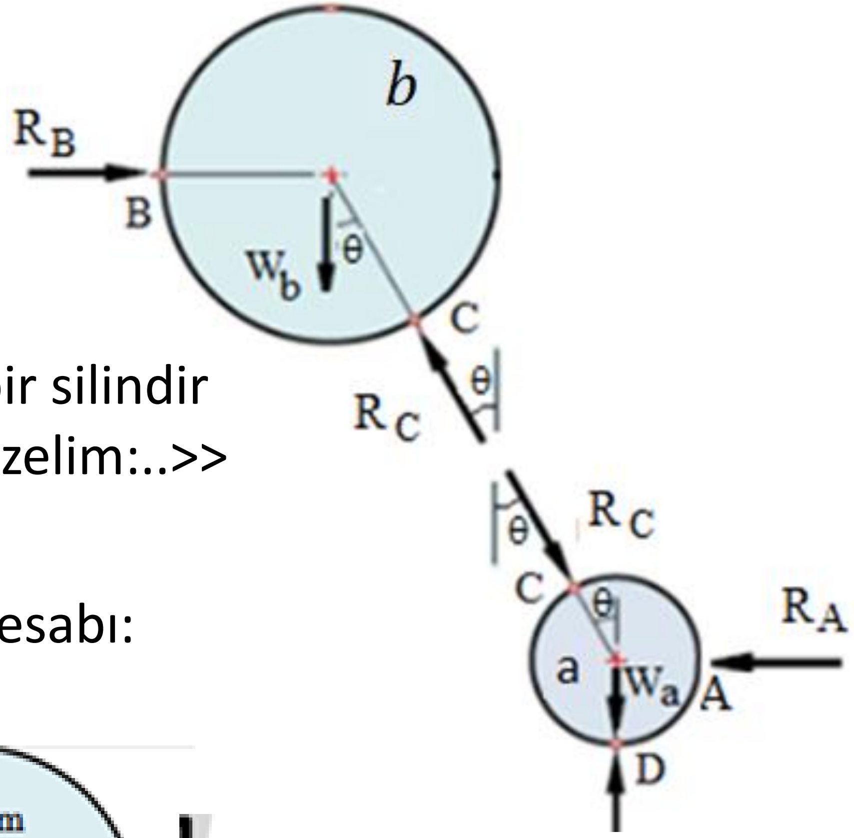
W_a =100 N ve W_b =200 N olan a ve b silindirleri sabit bir kasanın içine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.

Sürtünmeleri ihmal ederek

a-) Silindirlerin birbirlerine uyguladıkları C temas noktasındaki tepki kuvvetini,

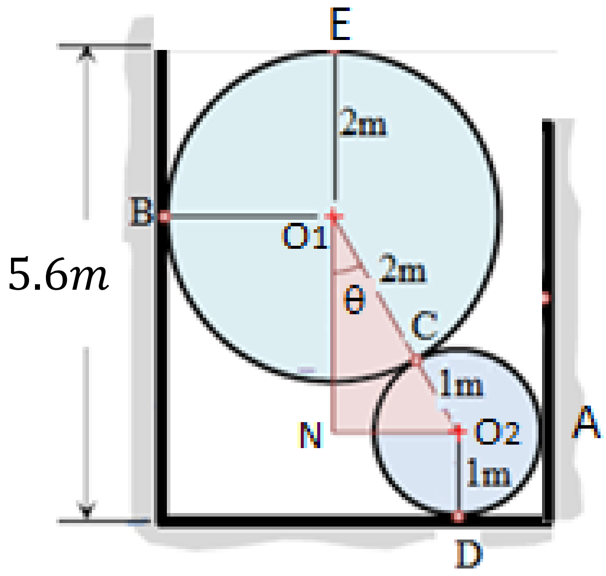
b-) Zemin (B) ve yanal duvarlar (A, D) dan silindirlere gelen tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

Çözüm



1.Adım: Her bir silindir için SCD leri çizelim:..>>

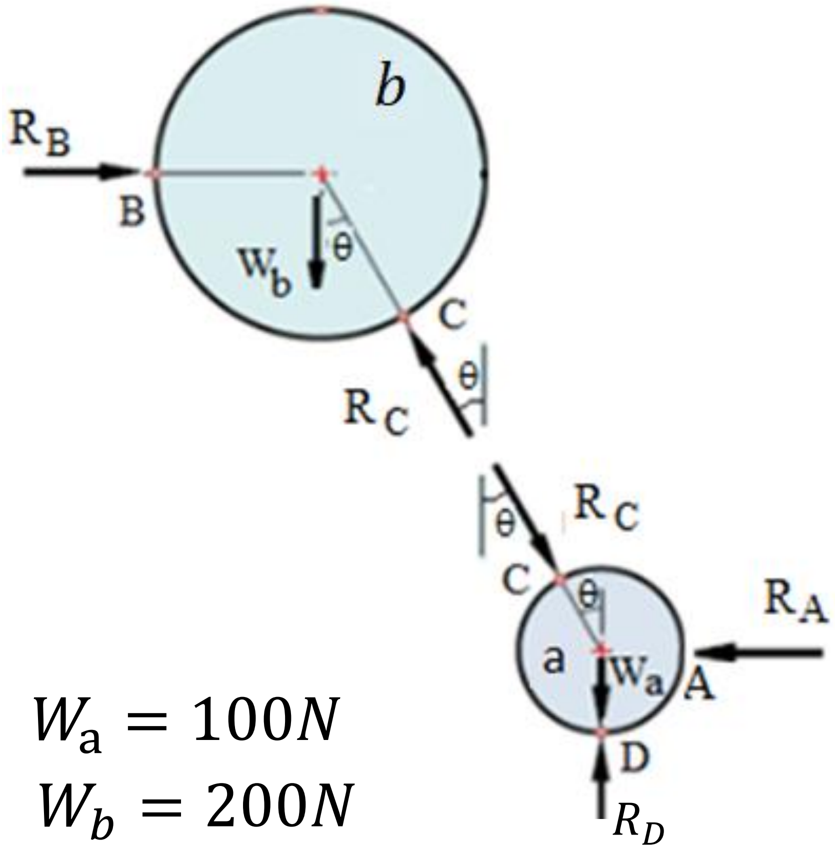
θ açısının hesabı:



$$cos\theta = \frac{\overline{O_1N}}{\overline{O_1O_2}}$$

$$cos\theta = \frac{5.6-2-1}{3} = \frac{2.6}{3}$$

$$\rightarrow \theta = 29.93^o$$



$W_a = 100N$

$W_b = 200N$

$\rightarrow \theta = 29.93^o$(hesaplandı)

2.Adım: Denge Denklemleri

b silindirinin dengesinden;

$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow R_C.Cos\theta\text{-}W_b = 0 \qquad \rightarrow R_C = 230.77kN$

$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow -R_c.Sin\theta + R_B = 0 \qquad \rightarrow R_B = 115.14kN$

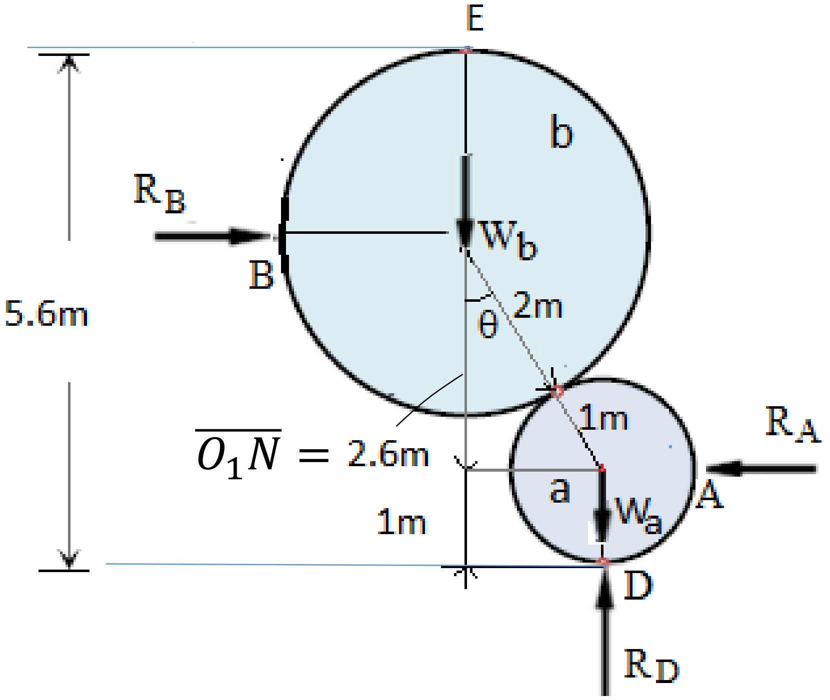
a silindirinin dengesinden;

$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow -R_A + R_c.Sin\theta = 0 \qquad \rightarrow R_A = 115.14kN$

$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow R_D - W_a - R_c.Cos\theta = 0 \qquad \rightarrow R_D = 300kN$

Veya b şıkkını tüm sistemin dengesinden de bulabilirdik. Şöyle ki:

1.Adım
Tüm sistemin SCD si:



Dikkat edilirse sistem, duvar ve zeminden izole edilmiştir. Silindirlerin arayüzeyinden izole edilmediği için C noktasında bir kuvvet gösterilmez. (Çünkü izolasyon yapılmayan kısımlardaki kuvvetler sistemin iç kuvveti olarak kalır.) Ancak daha önceki sayfalarda, her bir silindir diğer silindirden de izole edildiği için her birisinin SCD sine R_c kuvveti koyulması gerekir.

2.Adım
Denge Denklemleri:

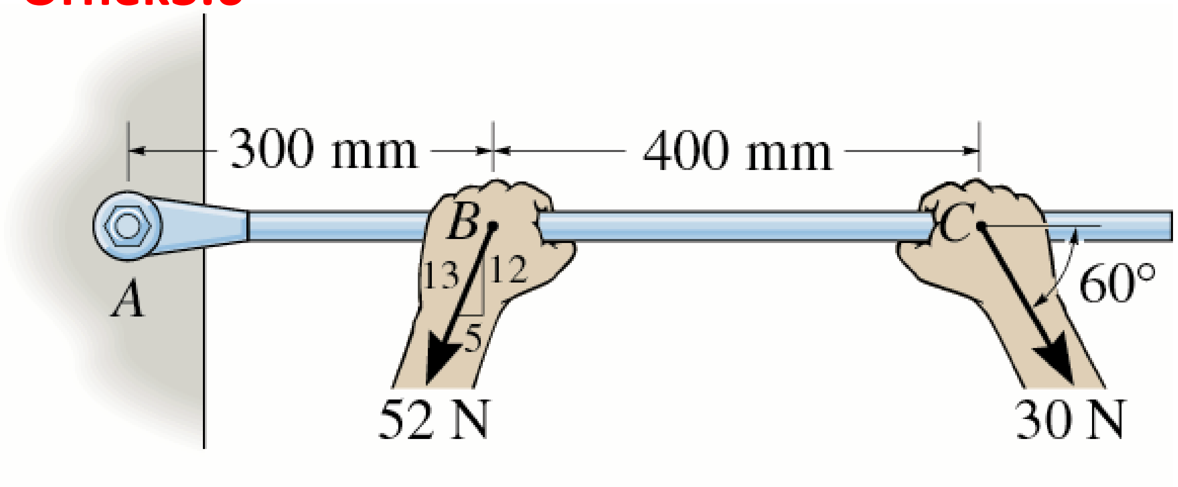
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow R_D - W_b - W_a = 0 \quad \rightarrow R_D - 200 - 100 = 0 \quad \rightarrow R_D = 300N$$

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow -R_B \; x\, 2.6 + W_b x \,(3xSin\theta + 1) + W_a x 1 - R_D x\, 1 = 0$$

$$= -R_B \; x\, 2.6 + 200x\,[3xSin(29.93^o) + 1] + 100x1 - 300x\,1 = 0 \rightarrow R_B = 115.14kN$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow R_A - R_B = 0 \quad \rightarrow R_A = R_B \quad \rightarrow R_A = 115.14kN$$

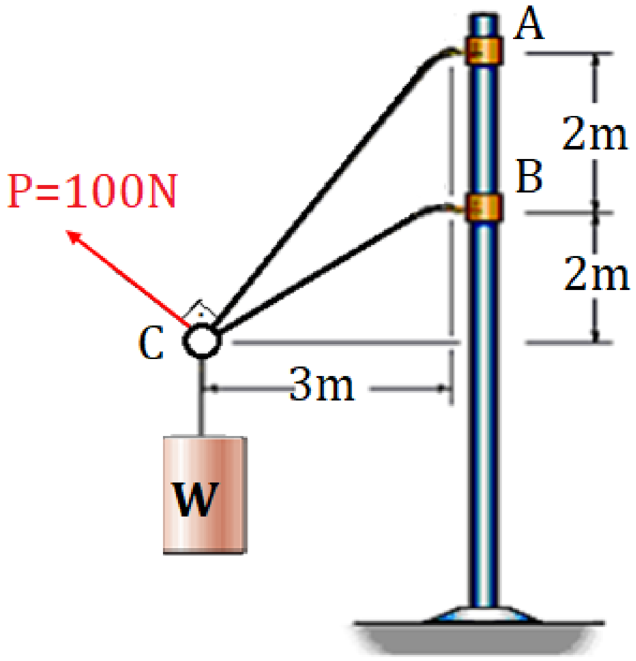
Örnek3.6 Video-3b1 Örnek : 3b.2



Şekildeki AD anahtarı A noktasında tamamen sıkılmış olan bir cıvataya takılmıştır. B ve C noktalarından uygulanan el kuvvetlerinin civatayı daha fazla sıkmak için yeterli olmadığını düşünüyoruz. Bu durumda anahtarın A noktasından oluşan tepkileri hesaplayınız.

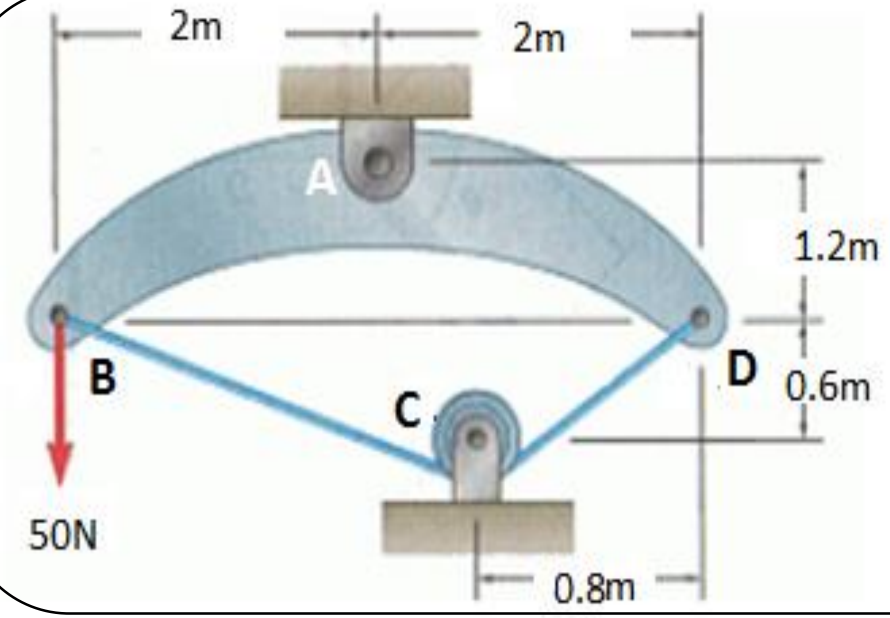
(**Cevap**: A_x= 5N, A_y =73.98N, M_A=32.6Nm)

Örnek 3.7 Video-3b1 Örnek : 3b.4



C halkasına W = 130 N luk ağırlık asılmıştır. Bu ağırlık gösterilen konumda P kuvveti, CA ve CB kablolarıyla dengede tutulmaktadır. Buna göre kablolardaki kuvvetleri hesaplayınız.

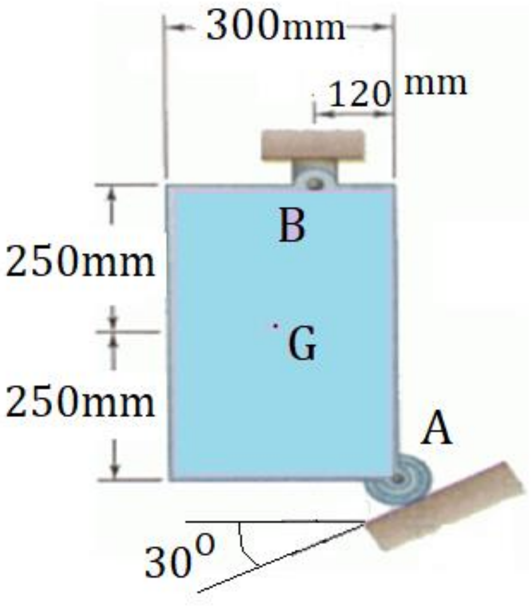
(Cevap: T_{CB} =65.87N, T_{CA} = 42.21N)



Örnek 3.8

Şekildeki eğrisel BAD koluna uygulanan düşey 50N luk kuvvet, A sabit mafsalı ve sürtünmesiz C makarasından geçen BCD kablosu ile dengelenmiştir. Buna göre A mafsalındaki kuvvet bileşenleri ve kabloda ortaya çıkan kuvveti hesaplayınız.

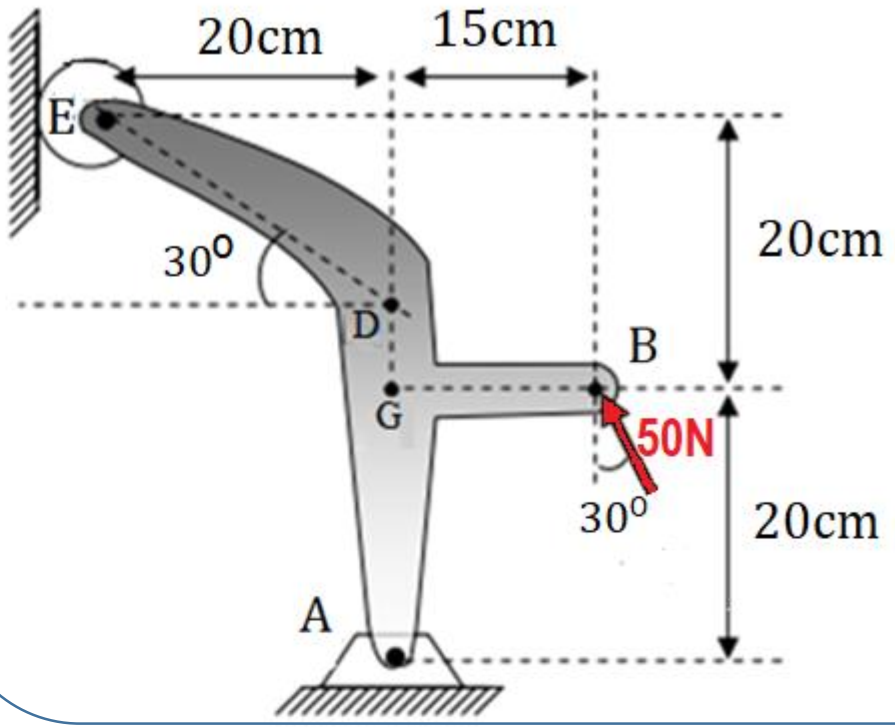
Cevaplar: A_x = -29.88 N, A_y = 177. N, T = 162.33 N



Örnek 3.9

G merkezli 250 N ağırlığındaki kutu B den sabit mafsalla, A dan ise eğik düzlemde harekete izin veren bir tekerlekle desteklenmiştir. Buna göre A ve B bağlantılarında oluşan tepki kuvvetlerini bulunuz.

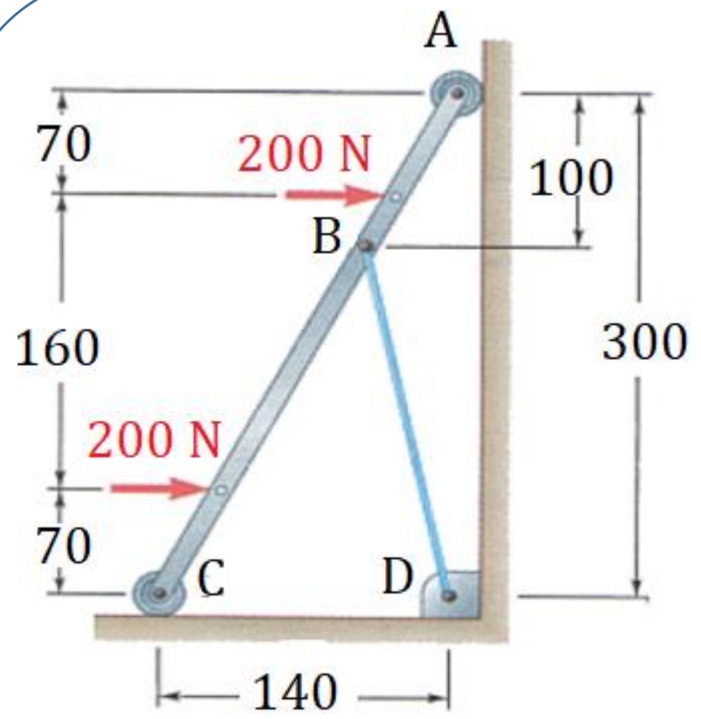
Cevaplar: $F_A = 51.34N$, $F_B = 207.13\ N$



Örnek 3.11 (*)

200 N ağırlığındaki dirseğin B noktasına 50 N luk kuvvet, düşeyle 30^0 lik açı yapacak şekilde uygulanmıştır. Sistem şekilde görülen konumda dengede ise A ve E bağlantılarında ortaya çıkan tepkileri hesaplayınız. (Sürtünmeleri ihmal ediniz) (Dirseğin ağırlık merkezi G noktasıdır.)

Cevaplar: $A = 156.74\ N$, $E = 28.74\ N$



Örnek (Soru) 3.12*

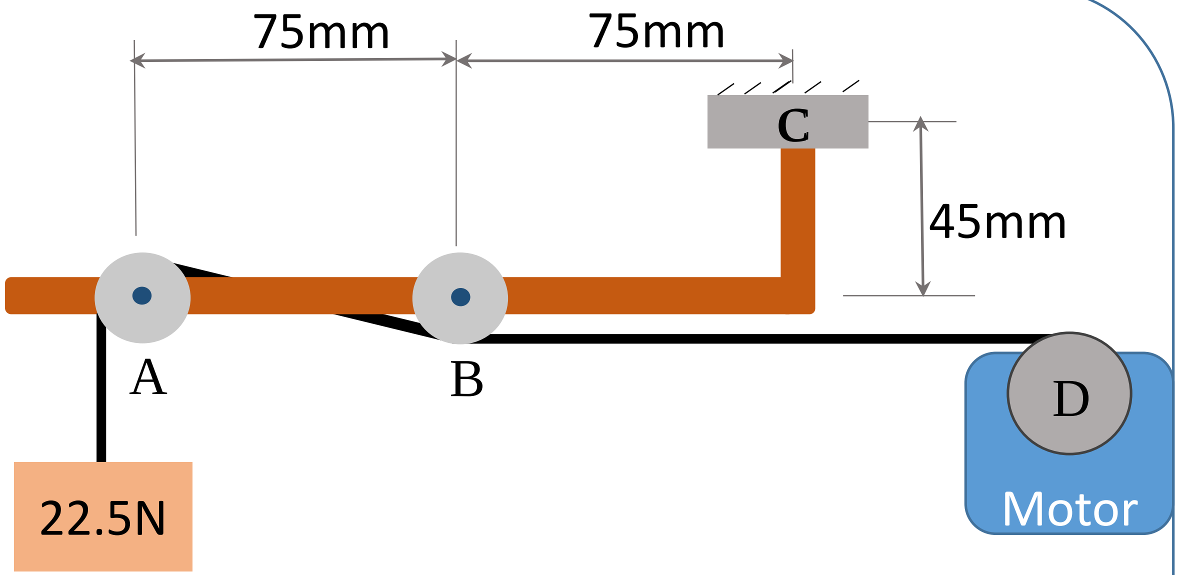
Ağırlığı ihmal edilen, şekildeki gibi mesnetlenmiş ve yüklenmiş olan dengedeki çubuğun *A*, *B* ve *C* noktalarında ortaya çıkan reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız. (boyutlar mm dir.)

Cevaplar:

$$F_A = 877.74N, \quad F_C = 854.91N, \quad F_B = T = 599.24N$$

Örnek 3.13 Video-3b2 Örnek : 3b.5

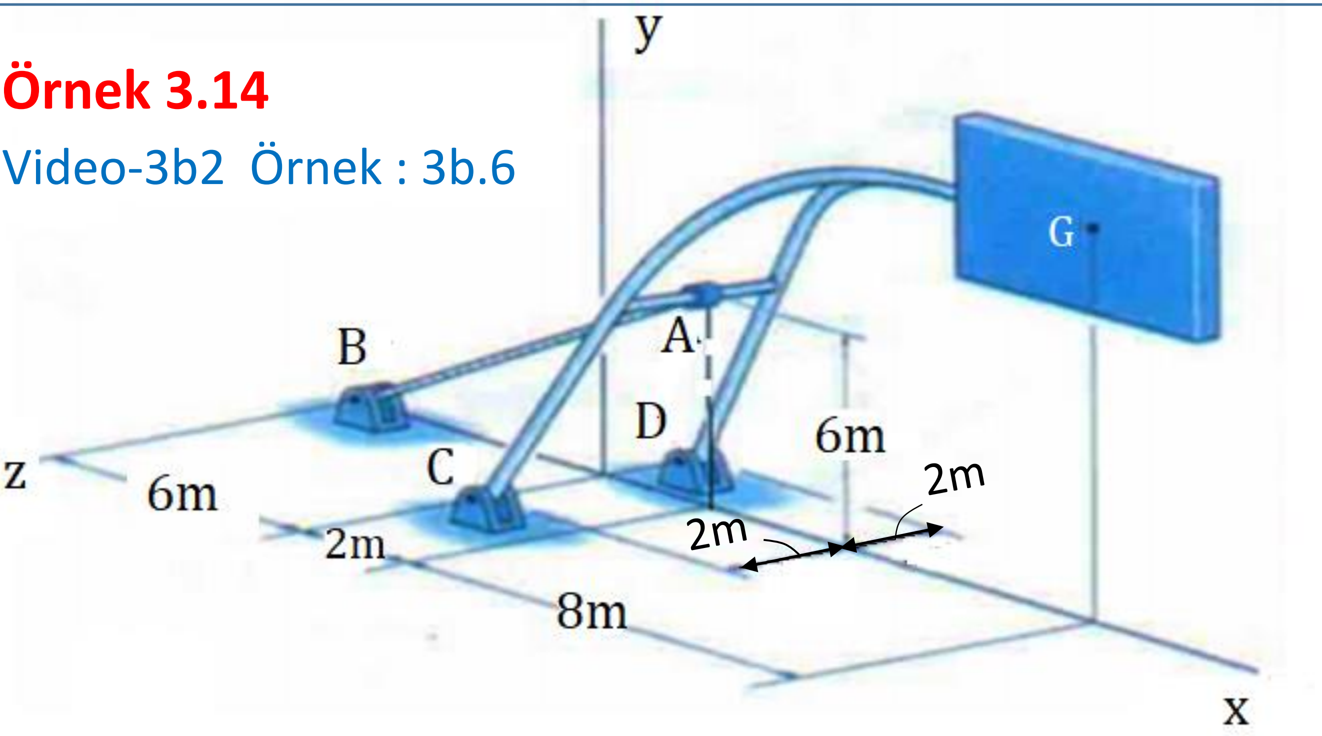
Şekildeki kaldırma sisteminde, 20mm çaplı A ve B makaralarından geçirilen ip bir motora bağlı D silindirine sarılmaktadır. İpin diğer ucuna asılı olan 22.5 N luk yük sabit hızla yukarı doğru çekilmektedir. İpin ağırılığını ve tüm sürtünmeleri ihmal ederek,



a-) makaraları taşıyan çubuğunun betonlanmış olduğu C tavanında oluşan tepkileri,
b-) A makarasının merkezindeki pimde oluşan tepkileri hesaplayınız.
(Cevaplar: a-) C_x = 22.5N, C_y = 22.5N, M_C= 4837.5N, b-)A_x=216.85N, A_y=285N

Örnek 3.14

Video-3b2 Örnek : 3b.6



800N ağırlığındaki otoyol tabelasının ağırlık merkezi G noktasındadır. Deneysel olarak AB ipinin maksimum 1200N'luk bir çekme kuvvetine dayanabileceği tespit edilmiştir. Sistemdeki diğer elemanlar yeterince dayanıklıdır. Tabelanın, D ve C sabit mafsallarına ve AB ipine şekildeki gibi bağlanması tasarlanıyor. Mukavemet (dayanım) açısından böyle bir tasarım sizce doğru mudur? (**Cevap**: bu tasarım doğru olmaz.)

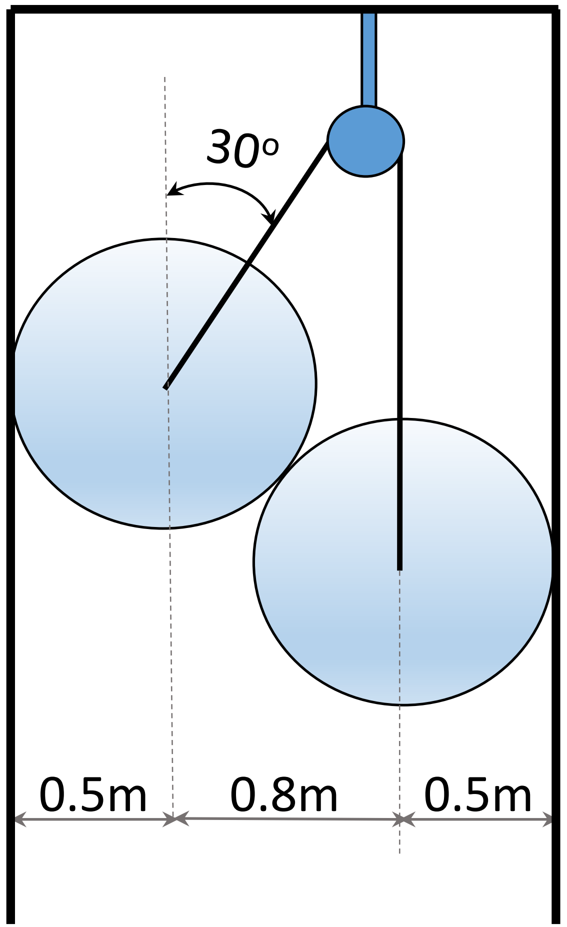
Örnek 3.15 Video-3b2 Örnek : 3b.7

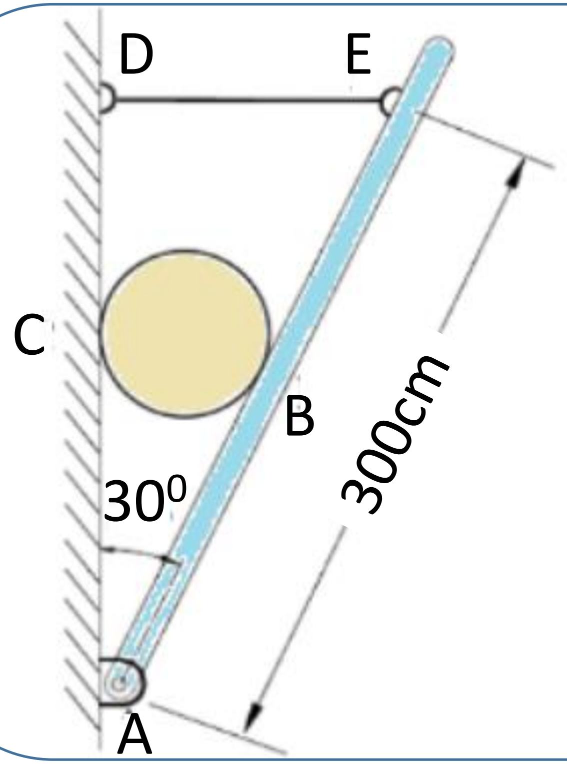
Ağırlıkları sırasıyla 300 N ve 150 N olan A ve B silindirleri yanal duvarlara ve birbirlerine temas edecek şekilde yerleştirilmiş ve makaradan geçirilen bir ip vasıtasıyla dengede tutulmuştur. Sistemdeki tüm sürtünmeleri ihmal ederek;

a-) İpte ortaya çıkan kuvveti,

b-) Silindirlerin birbirlerine uyguladıkları kuvveti bulunuz.

Cevaplar: a-) 241.16 N, b-) 235.26 N





Örnek 3.16 **(End. 2012 1.vize):**

50N ağırlığında, 12cm yarıçapında bir silindir; şekildeki gibi bir duvar, DE kablosu ve düşeyle 30°'lik açı yapan bir çubuk ile gösterilen konumda statik dengede tutulmaktadır.

Buna göre; Halattaki ve A bağlantısındaki kuvvetleri hesaplayınız. Sürtünmeleri ihmal ediniz.

Cevap: T=17.2N, A =85.45N

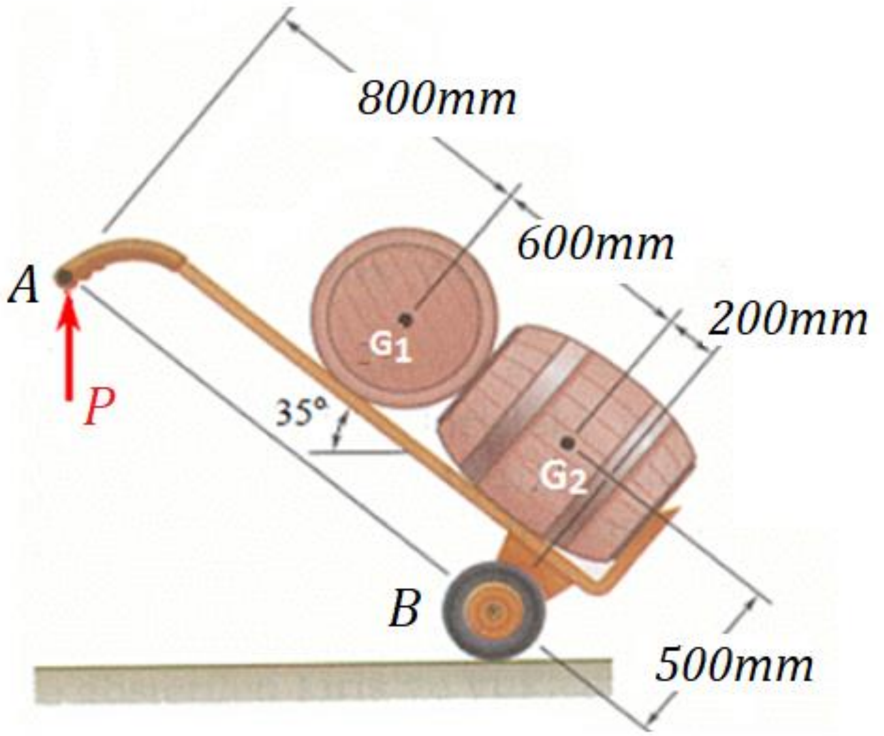
Örnek 3.17 (*) : Her biri 360 N ağırlığında olan 2 fıçı şekildeki gibi bir el arabasına yüklenmiş, düşey P kuvveti ile denge durumu sağlanmıştır. Fıçıların kütle merkezleri G_1 ve G_2 noktalarıdır. Arabanın ağırlığını ve sürtünmeleri ihmal ederek;

a-) *P* kuvvetinin şiddetini hesaplayınız.

b-) Fıçıların birbirlerine uyguladıkları kuvveti bulunuz.

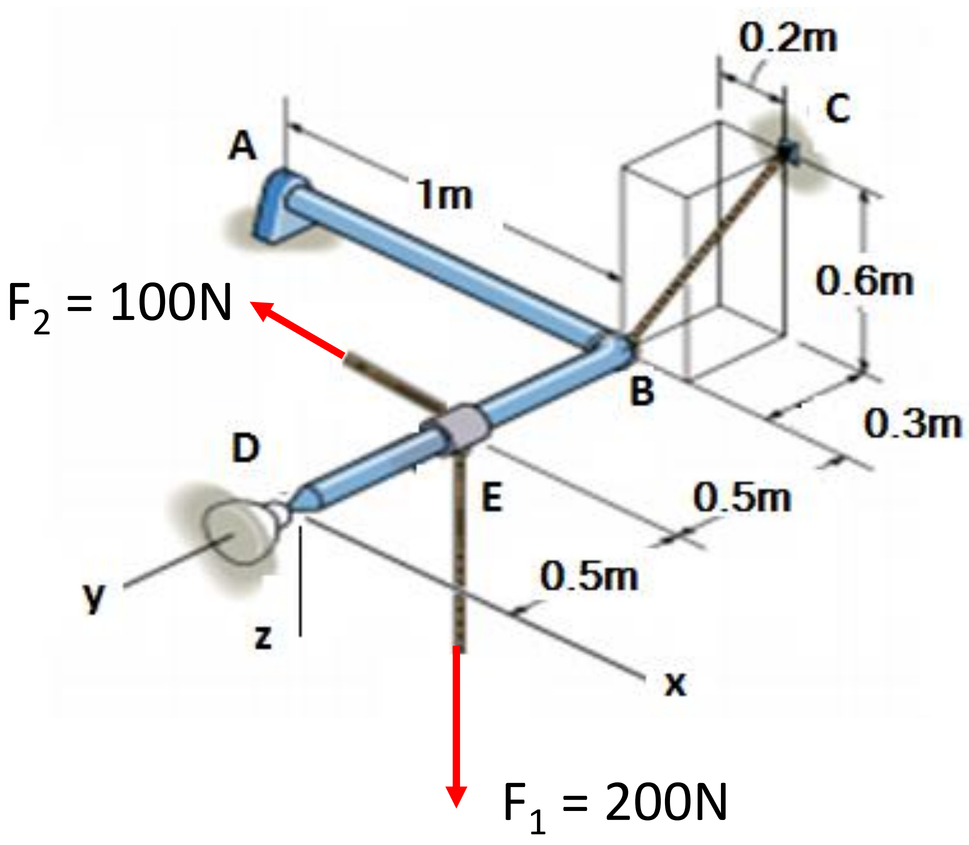
c-) Üstteki fıçıya arabadan gelen reaksiyon kuvvetini hesaplayınız.

Cevap: a-) P=67.45N, b-) 206.48N, c-) 294.89N



3.10 Üç Boyutlu Denge Örnekleri

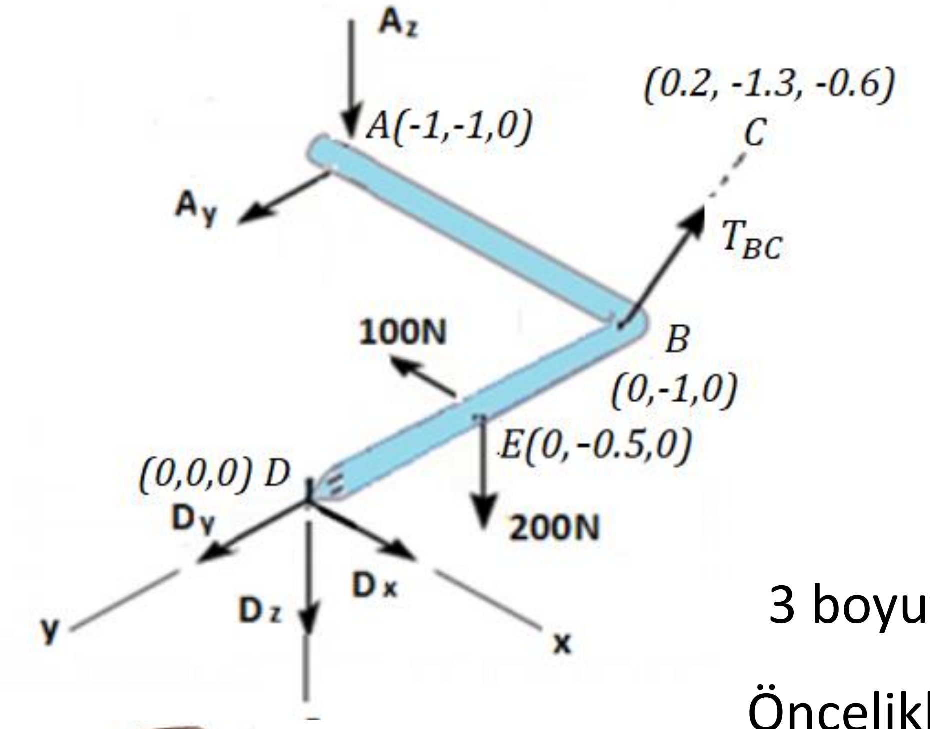
Video-3c



Örnek 3.18v Video-3c Örnek : 3c.1

L şeklindeki ABED çubuğunun E noktasına düşey F_1 = 200N, yatay F_2= 100N'luk kuvvetler uygulanmıştır. Bu kuvvetler, BC kablosu, D küresel mafsalı ve A kaymalı yatağı ile dengelenmiştir. Buna göre; A ve D bağlantılarındaki tepki kuvvetlerinin bileşenlerini; ayrıca BC kablosunda oluşan kuvveti hesaplayınız. *(A yatağı x ekseninde ötelenmeye izin verir ve tüm eksenlerdeki moment tepkileri ihmal edilebilir.)*

Çözüm..>>



Çözüm: 1.adım SCD

- Önce, her bir noktanın koordinatı yazılır.
- A yatağı y ve z eksenlerinde ötelenmeye izin vermiyor.
- D küresel mafsal olduğu için tüm eksenlerde ötelenmeye izin vermiyor. Dönmeye izin veriyor.(bknz:3.4-c)
- T_{BC} kablosu kendi doğrultusunda çeki kuvveti taşır.

2.adım : Denge denklemlerinden kuvvetlerin hesabı:

3 boyutlu problem olduğu için vektörel denge denklemlerinden gideceğiz:

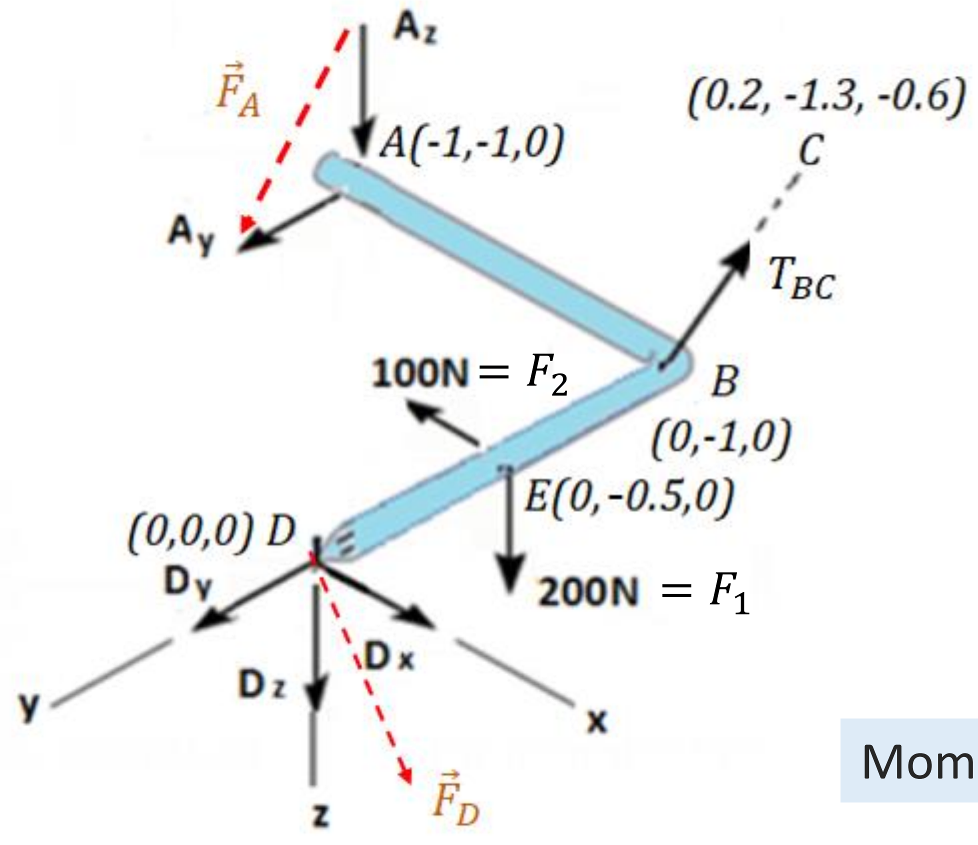
Öncelikle her bir kuvveti vektörel ifade etmeliyiz.

T_{BC} kablo kuvvetinin vektörel ifadesi: şiddeti ile birim vektörün vektörel çarpımdır.

$$\vec{T}_{BC} = T_{BC}\vec{n}_{BC} = T_{BC}\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = T_{BC}\frac{(0.2-0)\vec{\imath} + (-1.3-(-1))\vec{\jmath} + (-0.6-0)\vec{k}}{|\overrightarrow{BC}|}$$

$$= T_{BC}\frac{0.2\vec{\imath} - 0.3\vec{\jmath} - 0.6\vec{k}}{|\sqrt{0.2^2 + 0.3^2 + 0.6^2}|} \quad \rightarrow \vec{T}_{BC} = 0.285T_{BC}\vec{\imath} - 0.428T_{BC}\vec{\jmath} - 0.857T_{BC}\vec{k}$$

$\vec{T}_{BC}$'nin hesabını bir türlü anlayamadım diyorsan, önce örnek 2.1 veya 2.3 ü anlamalısın.



- $\overrightarrow{F_1} = 200\vec{k}$, $\overrightarrow{F_2} = -100\,\vec{\imath}$ olarak ifade edilirler.
- A daki bileşke kuvvet : $\vec{F}_A = A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$
- D deki bileşke kuvvet : $\vec{F}_D = D_x\vec{\imath} + D_y\vec{\jmath} + D_z\vec{k}$

2 vektörel denge denklemi yazacağız:

Önce D noktasına göre toplam moment denklemini yazalım:

$$\overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{DA}x\vec{F}_A + \overrightarrow{DB}x\vec{T}_{BC} + \overrightarrow{DE}x\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{DE}x\overrightarrow{F_2} = 0$$

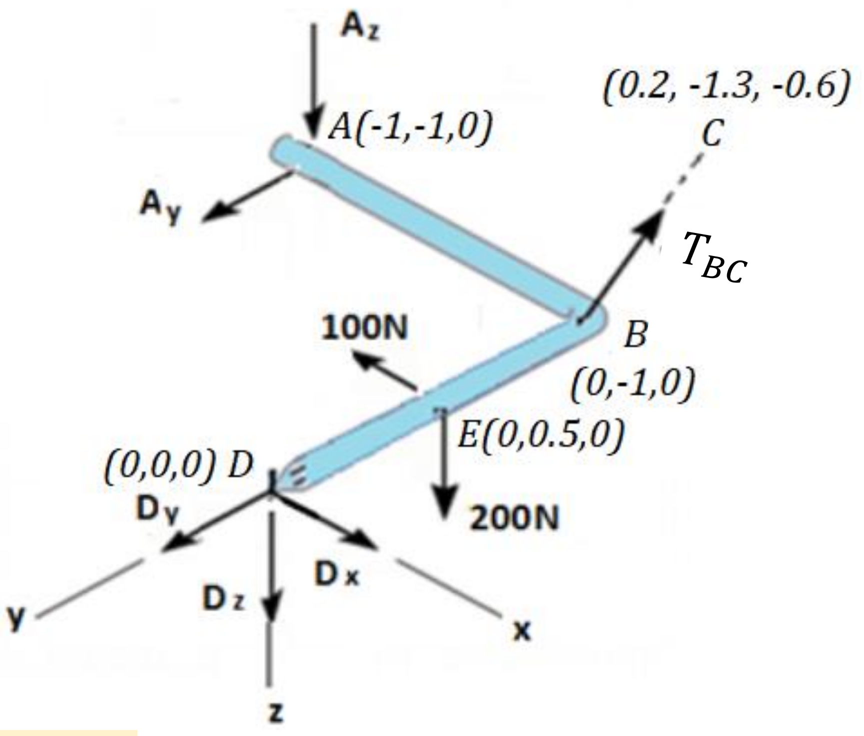
Moment alınan nokta

Kuvvet

Kuvvet hattı üzerindeki koordinatları bilinen herhangi bir nokta

$$\overrightarrow{M_D} = [(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})\text{x}\,(A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k})] + [(-\vec{\jmath})x(0.285T_{BC}\vec{\imath} - 0.428T_{BC}\vec{\jmath} - 0.857T_{BC}\vec{k})] + [(-0.5\vec{\jmath})\text{x}\,(200\vec{k} - 100\vec{\imath})] = 0$$

..>>



$$\overrightarrow{M_D} = -A_y\vec{k} + A_z\vec{j} - A_z\vec{i} + 0.285T_{BC}\vec{k} + 0.857T_{BC}\vec{i} - 100\vec{i} - 50\vec{k} = 0$$

Uzayda bir vektörel denklem elde ettik. Bu denklem sıfıra eşit olduğundan her bir birim vektörün katsayılarının toplamı da ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

$\vec{i}$ *katsayıları toplamı:* $-A_z - 100 + 0.857T_{BC} = 0$

$\vec{j}$ *katsayıları toplamı:* $A_z = 0$

$\vec{k}$ *katsayıları toplamı:* $-A_y + 0.285T_{BC} - 50 = 0$

$A_z = 0$

$T_{BC} = 116.68$ N

$A_y = -16.74N$ bulunur.

$\rightarrow \vec{T}_{BC} = T_{BC}(0.285\vec{i} - 0.428\vec{j} - 0.857\vec{k})$ bulunmuştu. Buna göre:

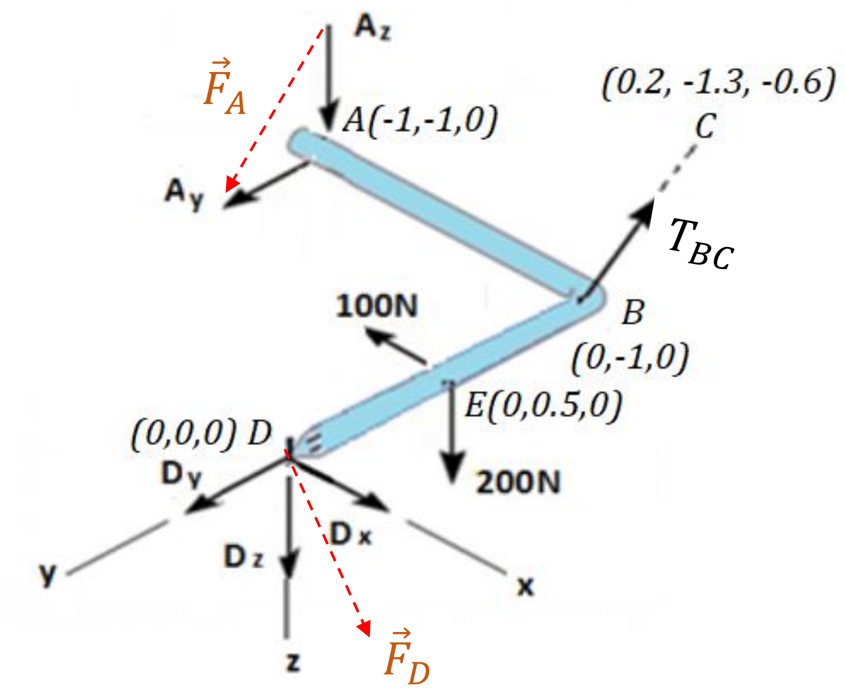
$\vec{T}_{BC} = 116.68\,(0.285\vec{i} - 0.428\vec{j} - 0.857\vec{k})$ $\rightarrow \vec{T}_{BC} = 33.25\vec{i} - 49.94\vec{j} - 99.99\vec{k}$

$\vec{F}_A = A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ $\rightarrow \vec{F}_A = -16.74\vec{j}$

Şimdi 2nci denge denklemi olan Bileşke kuvvet denklemini yazalım.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_D} + \vec{T}_{BC} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$$

$$\vec{R} = -16.74\vec{j} + D_x\vec{i} + D_y\vec{j} + D_z\vec{k} + 33.25\vec{i} - 49.94\vec{j} - 99.99\vec{k} + 200\vec{k} - 100\vec{i} = 0$$



Yine uzayda bir vektörel denklem elde ettik. Bu denklem sıfıra eşit olduğundan her bir birim vektörün katsayılarının toplamı da ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

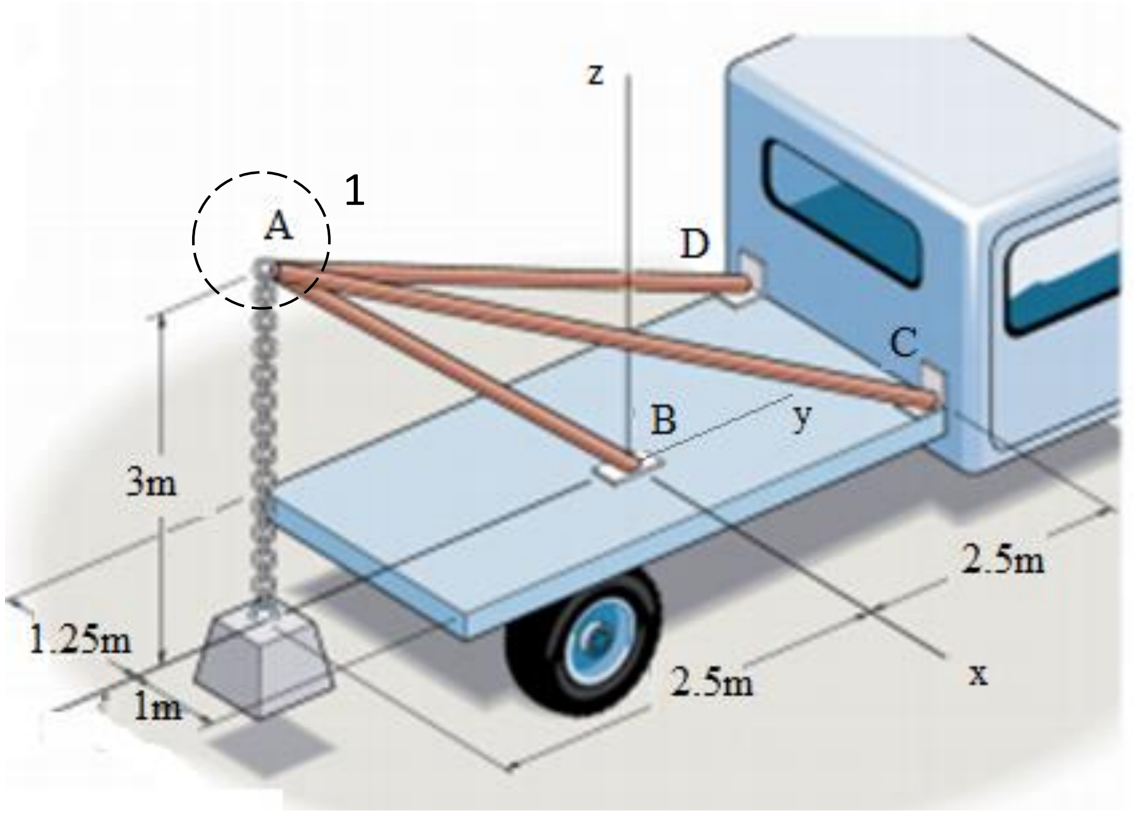
$\vec{i}$: $D_x + 33.25 - 100 = 0$ $\rightarrow D_x = 66.75N$

$\vec{j}$: $-16.74 + D_y - 49.94 = 0$ $\rightarrow D_y = 66.68N$

$\vec{k}$: $D_z - 99.99 + 200 = 0$ $\rightarrow D_z \cong 100N$

$\rightarrow \vec{F}_D = 66.75\vec{i} + 66.68\vec{j} - 100\vec{k}$

Örnek 3.19 Video-3c Örnek : 3c.2

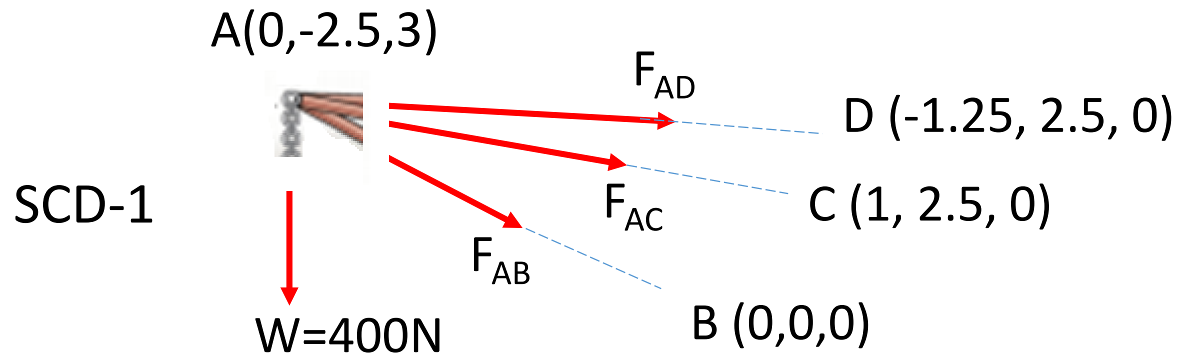


Kamyonete bağlı üç çubuktan oluşan kaldırma sistemine 400 N luk yük asılmıştır. Her bir Çubuğa düşen kuvveti hesaplayınız?

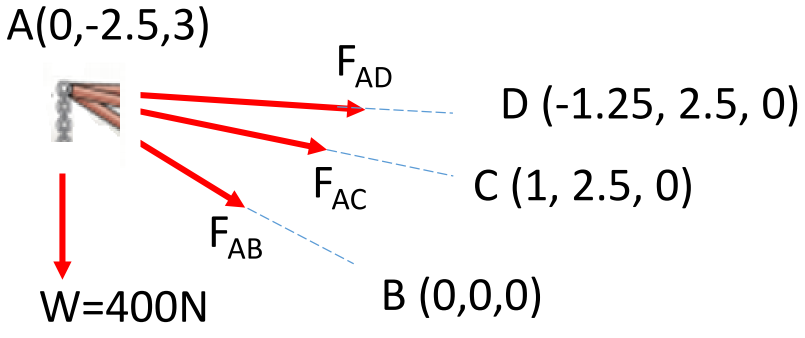
Çözüm:

Tespit 1: Her bir çubuğun bağlantı noktası + bağlantı harici noktalardaki tekil kuvvet sayısı 2'dir. Dolayısıyla her bir çubuk çift kuvvet elemanıdır.

Tespit 2: Tüm kuvvetler tek noktada kesişiyor. O halde 3.3 maddesinde anlatılan durum söz konusudur.



SCD-1: Sadece kesişim noktası olan A noktasının serbest cisim diyagramını çizelim. Yani A noktasını sistemden 1 no'lu çember ile izole edeceğiz. Çember ile hayali olarak kestiğimiz her bir parçada bir kuvvet gösterilmelidir. A ile bağlantısı kesilen cisimler: 3 çubuk ve yükün asıldığı zincirdir.



Şimdi Denge Denklemleriyle kuvvetleri bulmaya çalışacağız.

Problem 3 boyutlu olduğu için vektörel çözümü tercih ediyoruz.

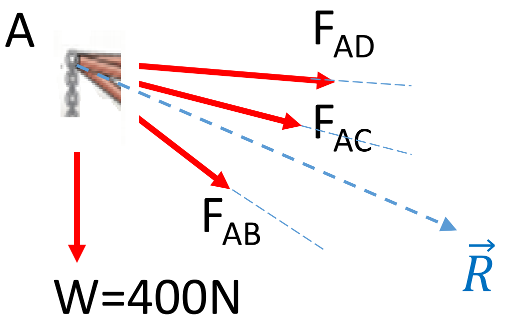
Ancak bu örnekteki gibi tüm kuvvetler aynı noktadan geçerse, sadece kuvvet denklemi yazabiliriz demiştik. (bknz 3.3).Ayrıca moment denklemi yazılamaz. Dolayısıyla sadece 1 vektörel denklem yazılabilir.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \overrightarrow{F_{AB}} + \overrightarrow{F_{Ac}} + \overrightarrow{F_{AD}} + \vec{W} = 0 \quad ; \vec{W} = -400\vec{k}$$

$$\overrightarrow{F_{AB}} = F_{AB}.\overrightarrow{n_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = F_{AB}\frac{2.5\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{2.5^2 + 3^2}} = F_{AB}(0.64\vec{j} - 0.768\vec{k})$$

$$\overrightarrow{F_{AC}} = F_{AC}.\overrightarrow{n_{AC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = F_{AC}\frac{\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2}} = F_{AC}(0.169\vec{i} + 0.84\vec{j} - 0.507\vec{k})$$

$$\overrightarrow{F_{AD}} = F_{AD}.\overrightarrow{n_{AD}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = F_{AD}\frac{-1.25\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{1.25^2 + 5^2 + 3^2}} = F_{AD}(-0.209\vec{i} + 0.838\vec{j} - 0.503\vec{k})$$



$$\vec{R} = (0.169F_{AC} - 0.209F_{AD})\vec{i}$$

$$+ (0.64F_{AB} + 0.84F_{AC} + 0.838F_{AD})\vec{j}$$

$$+(-0.768F_{AB} - 0.507F_{AC} - 0.503F_{AD} - 400)\vec{k}$$

Her bir birim vektörün katsayılarının toplamları ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

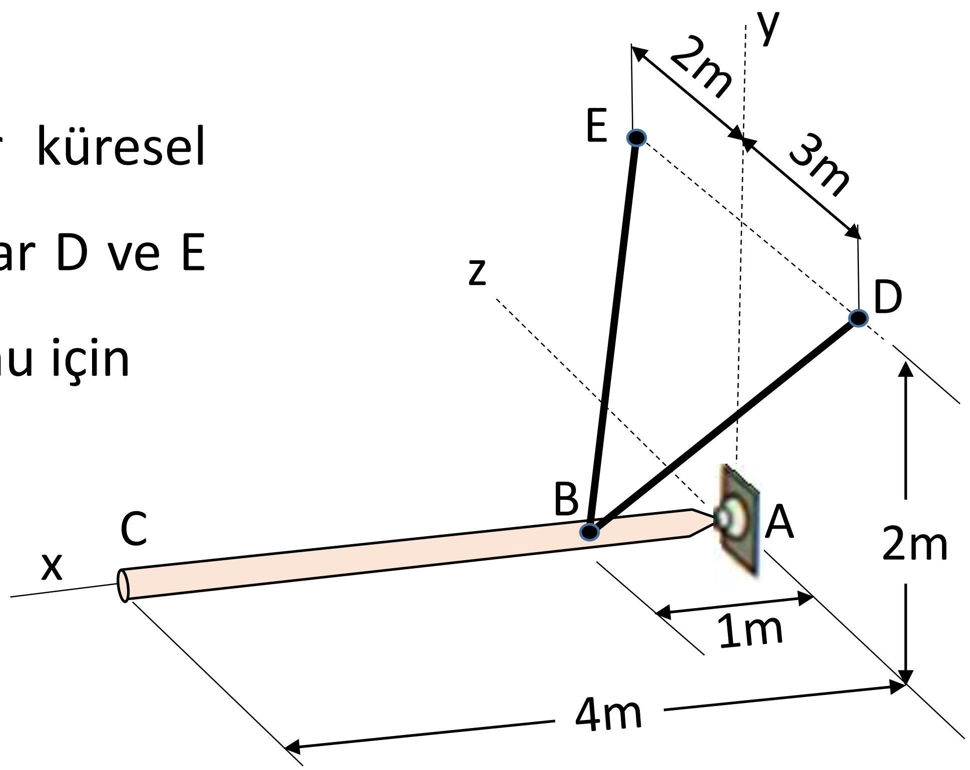
$$\left.\begin{aligned} \vec{i}: &\quad 0.169F_{AC} - 0.209F_{AD} = 0 \\ \vec{j}: &\quad 0.64F_{AB} + 0.84F_{AC} + 0.838F_{AD} = 0 \\ \vec{k}: &\quad -0.768F_{AB} - 0.507F_{AC} - 0.503F_{AD} - 400 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F_{AB} &= -1045.29N \\ F_{AC} &= 441,19N \\ F_{AD} &= 356.95N \end{aligned}$$

Örnek 3.20 (*)

50 N ağırlığındaki homojen AC çubuğu A ucundan bir küresel mafsala, B noktasından ise iki kabloya bağlanmıştır. Kablolar D ve E uçlarından bir duvara sabitlenmiştir. Şekildeki denge konumu için

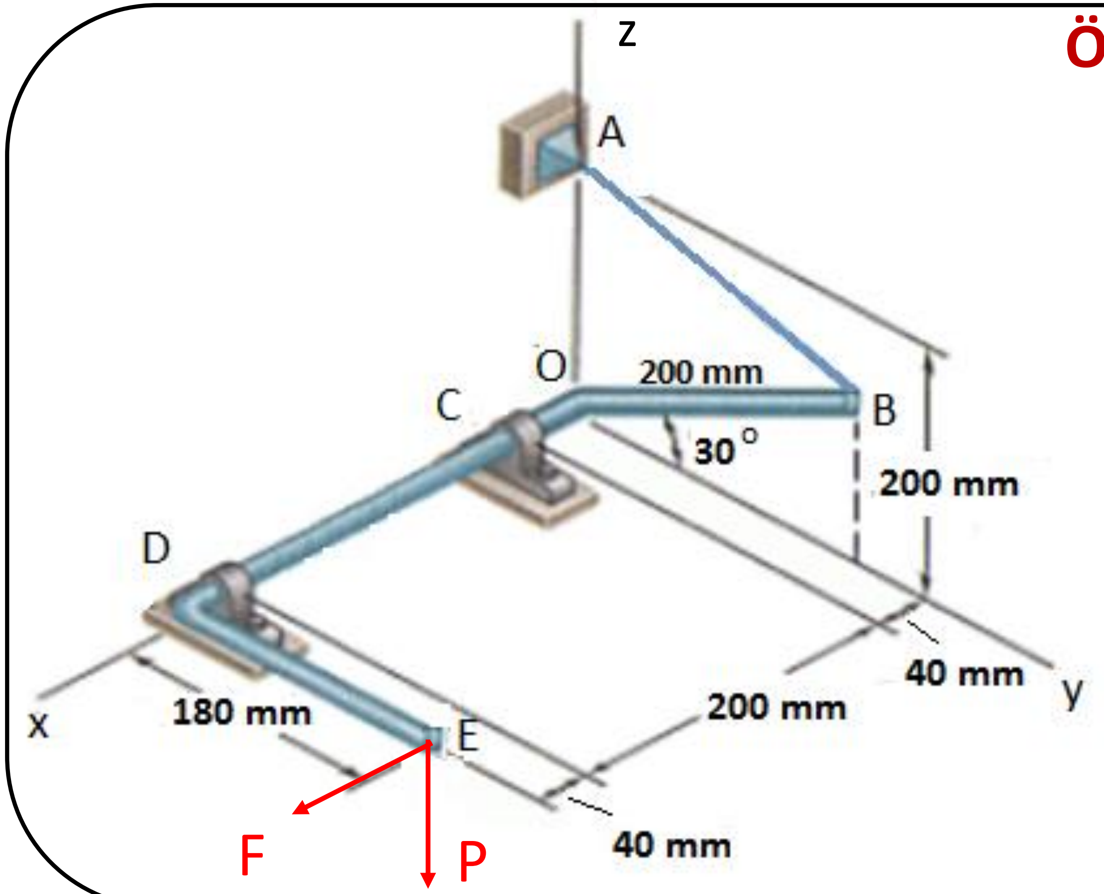
a-)kablolarda,

b-)küresel mafsalda ortaya çıkan kuvvetleri tespit ediniz.



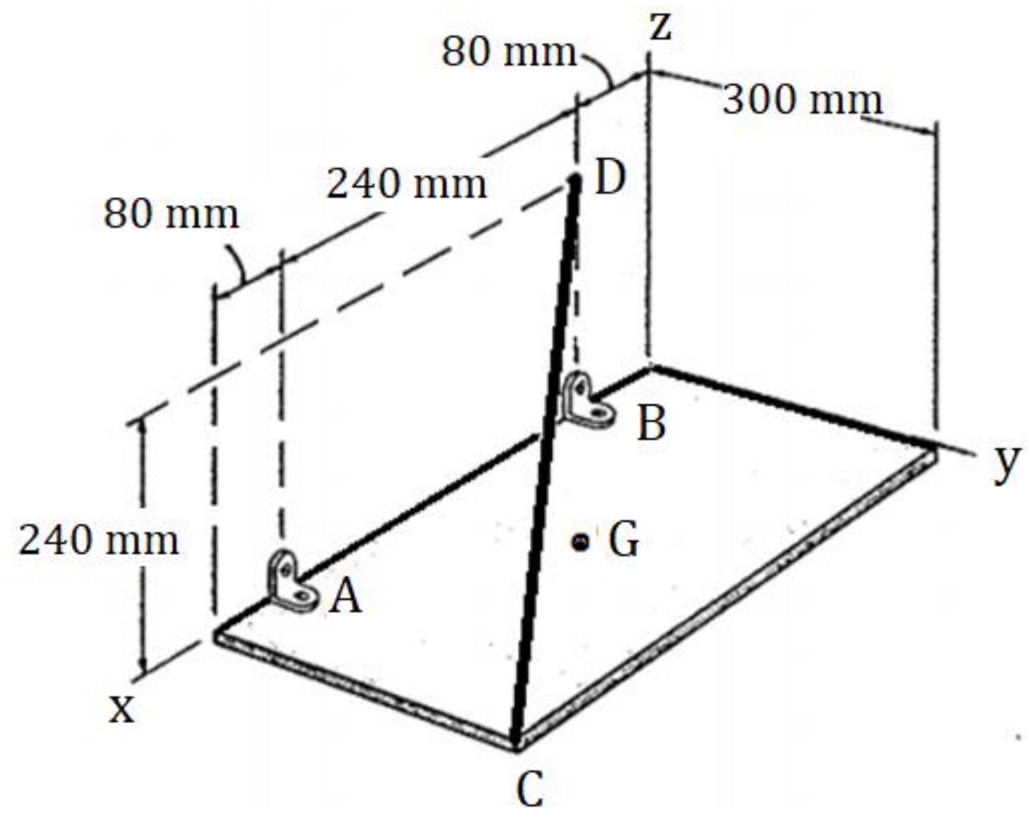
Cevaplar:

a-) $T_{BD} = 149.6$ N, $T_{BE} = 180$ N, b-) A_x=A_y =100N, $A_z = 0$



Örnek 3.21(*) Video-3c Örnek : 3c.3

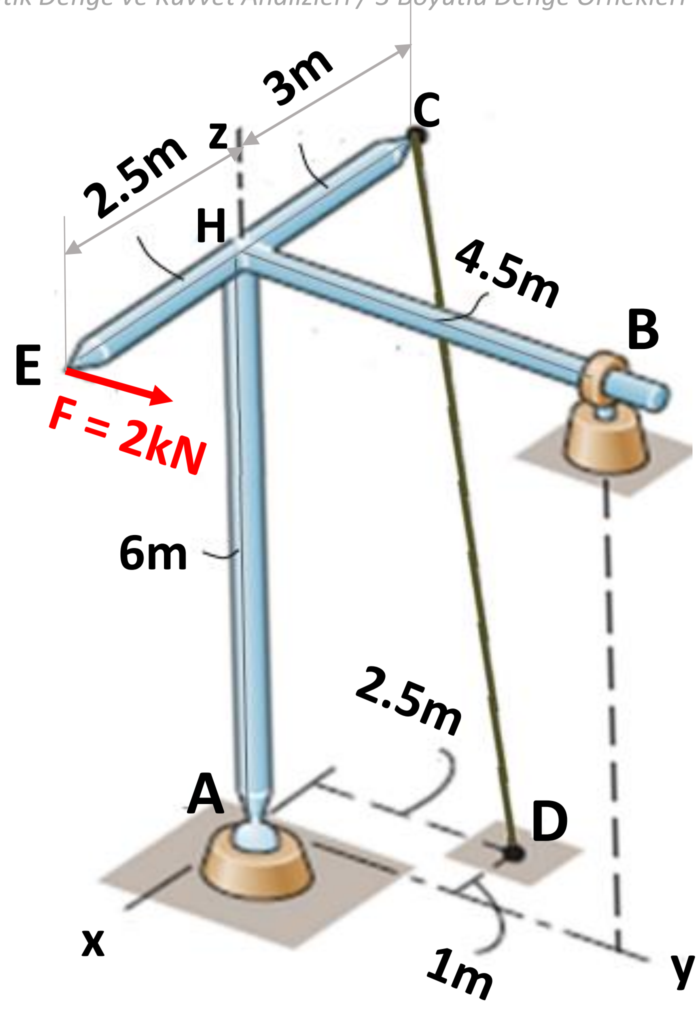
Şekildeki gibi bükülmüş olan EDCOB çubuğunun E noktasına P =3kN ve F = 4kN luk kuvvetler uygulanmıştır. Çubuk C, D yatakları ve BA kablosu ile dengede tutulmaktadır. Yatakların her ikisi de hiçbir eksende ötelenmeye izin vermemektedir. Yataklardaki tepki momentleri ihmal edilebilir. Buna göre BA kablosunda ortaya çıkan çekme kuvveti T yi hesaplayınız. **Cevap:** T=3.11kN



Örnek 3.22

Şekildeki homojen kapak 20kN ağırlığında olup ağırlık merkezi tam orta noktası olan G noktasıdır. Kapak A ve B den menteşelerle duvara bağlı olup, CD kablosuyla ayrıca dengelenmiştir. (D noktası duvara sabitlenmiştir.) Sürtünmeler ve menteşelerdeki tüm moment tepkileri ihmal edilebilir. Ayrıca A menteşesi x doğrultusunda harekete izin vermektedir. Buna göre CD kablosunda ortaya çıkan kuvveti vektörel çözümle hesaplayınız.

Cevap: T_{CD} = 20.83kN



Örnek 3.23 Video-3a Örnek : 3a.2

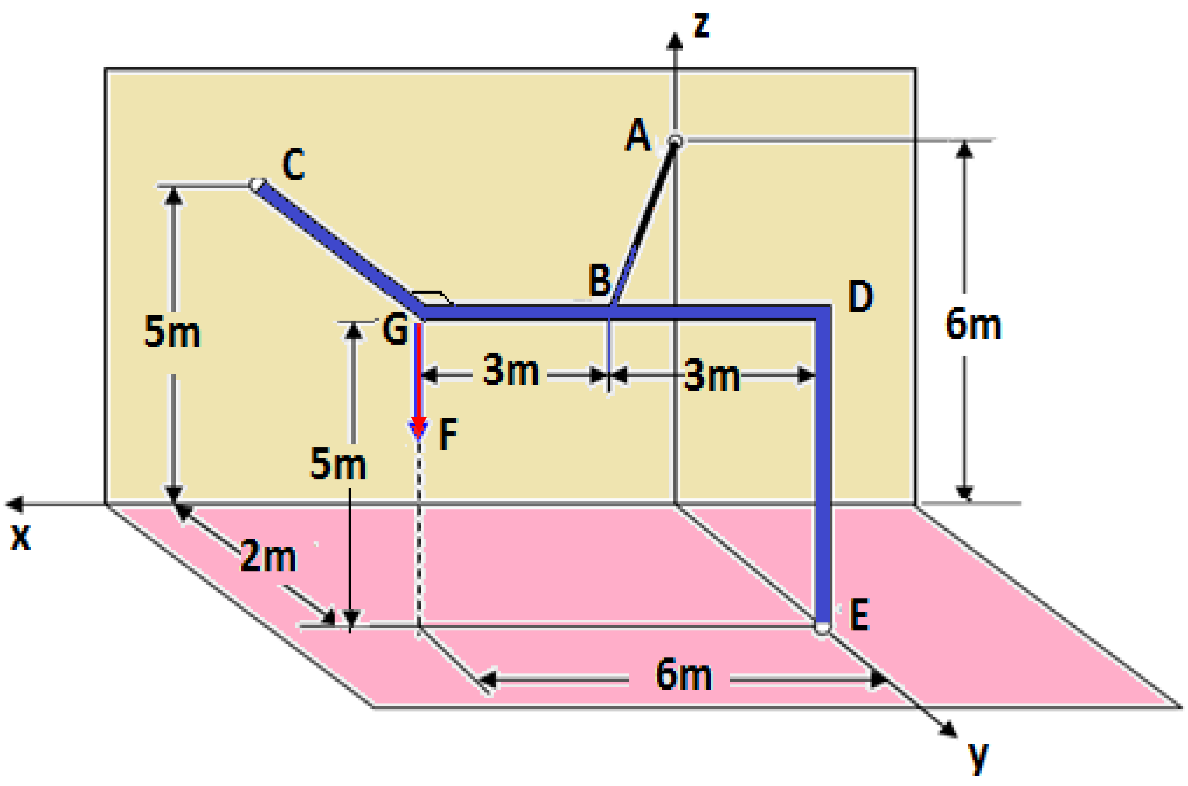
Şekildeki çerçeveye E noktasından y eksenine paralel F =2kN luk kuvvet uygulanmıştır. Bu kuvvet A daki küresel mafsalla, CD kablosu ile ve B deki halka ile desteklenmiştir. B halkası, dönmeye ve HB doğrultusunda ötelenmeye izin vermektedir. Tüm sürtünmeleri ihmal ederek,

a-) CD kablosundaki kuvveti,

b-) A ve B bağlantılarındaki tepkileri bulunuz.

Cevaplar : a-) T_{CD} = 2.85kN,

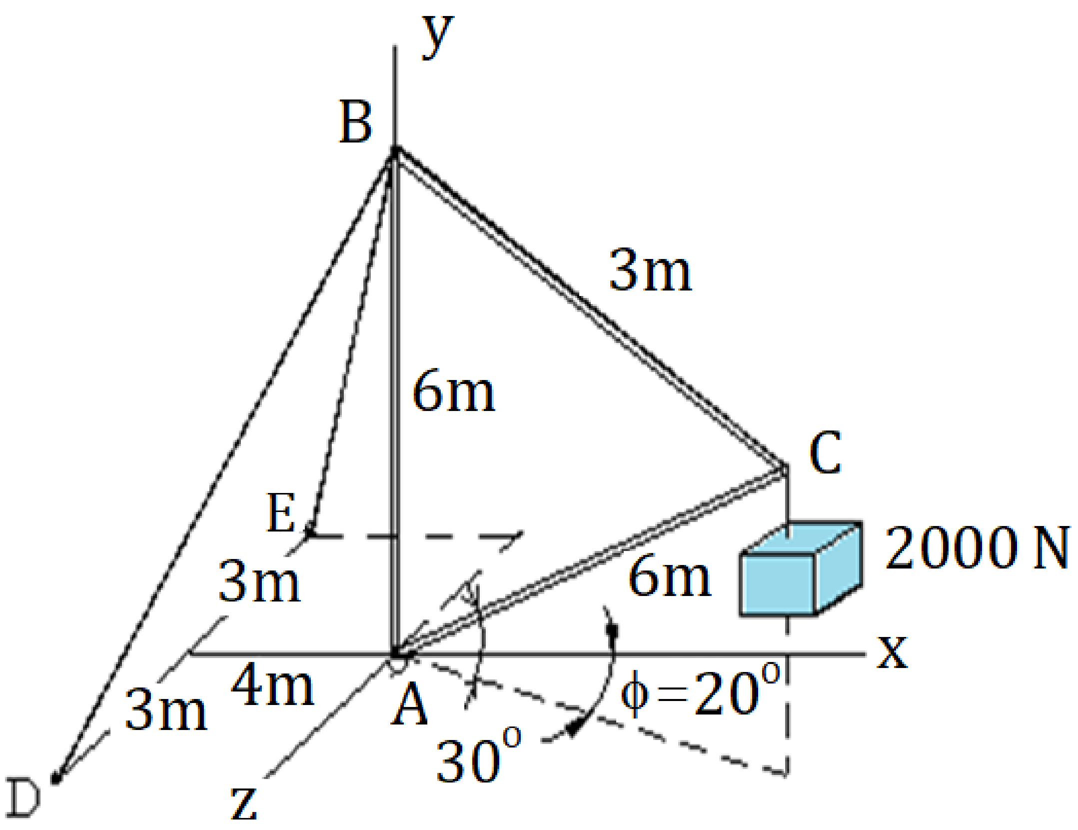
b-) B_x =0.27kN, B_z=4.037kN, A_x=-1.253kN, A_y=-3.026kN, A_z=-1.53kN



Örnek 3.24

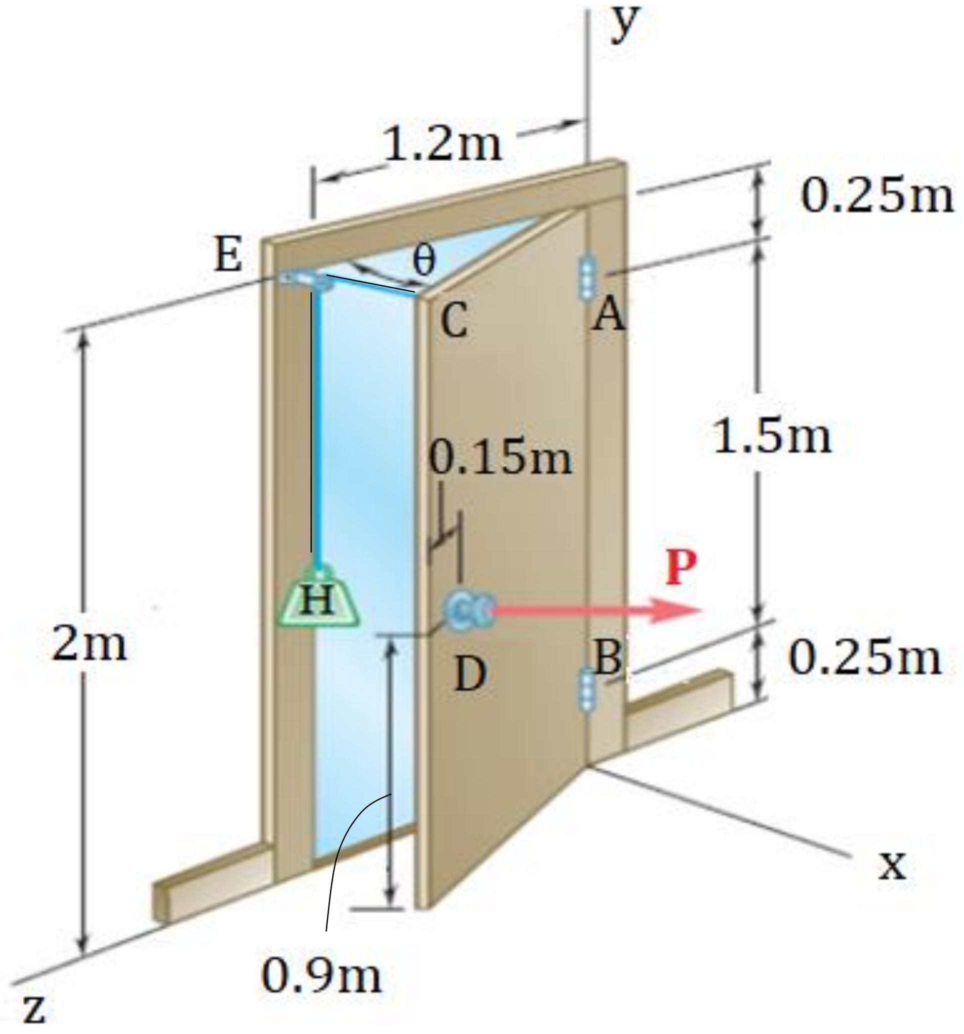
F = 600 N'luk bir yük şekildeki gibi bükülmüş bir rijit borunun G köşesine uygulanmıştır. Boru E de zemine ve C de düşey duvara küresel mafsalla bağlanmış, B de ise BA kablosu yardımı ile sabit duvara tespit edilmiştir. Buna göre, BA kablosunda oluşan kuvvetin şiddetini bulunuz. **Cevap: 409.2 N**

Örnek 3.25



Rijid ABC üçgen elemanının ucuna 2000N luk bir yük asılmıştır. Yük, A noktasında bir küresel mafsal, BD ve BE kabloları yardımı ile şekildeki konumda dengede tutulmaktadır. (D ve E noktaları xz düzlemindedir.) Kablolardaki kuvvetleri ve A noktasındaki tepkilerin bileşkesini bulunuz.

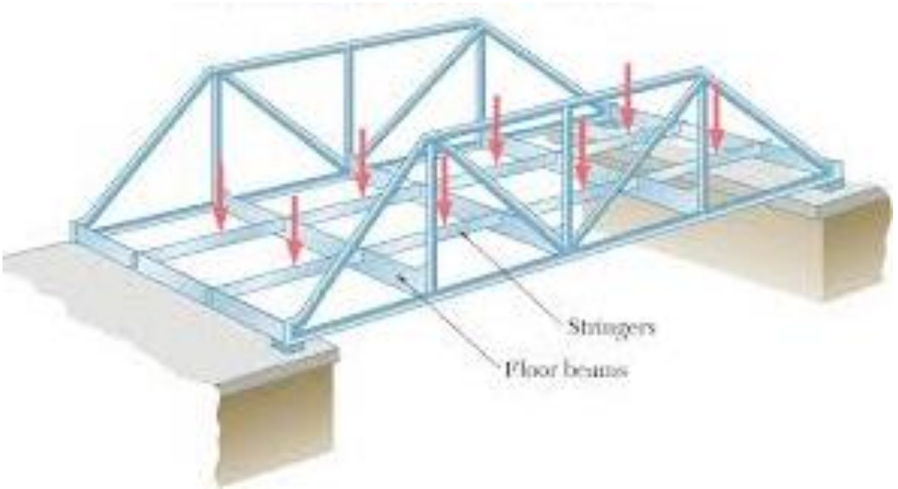
Cevaplar: T_{BD}= 2360N, T_{BE} = 820N, A =4766.5N



Örnek 3.26

20kg kütleli kapı açıldığında, otomatik olarak kapanması için, HEC ipine bağlı 15kg kütleli H ağırlığı kullanılıyor. Kapıyı $\theta = 90^o$ açık durumda tutmak için, D tokmağına dik yönde uygulanması gereken P kuvvetini ve bu sırada A ve B menteşelerinde oluşan reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız. (A menteşesi düşey yönde harekete izin vermektedir. $g=9,81 m/s^2$)

Cevaplar: P= 118.9N, A=82N, B=222.26N



4- KAFES SİSTEMLER

(Düzlem Kafes Sistemler - Örneklerle Konu Anlatımı)

Kafes Sistemler

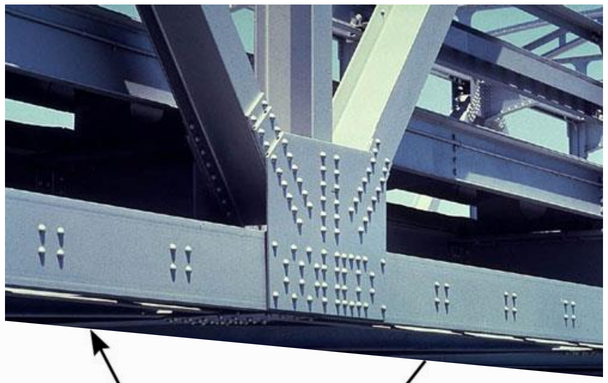
Birbirlerine uç noktalarından bağlanmış çubuk elemanların oluşturduğu taşıyıcı sistemlerdir.

Video 4

Birçok uygulama alanları vardır.

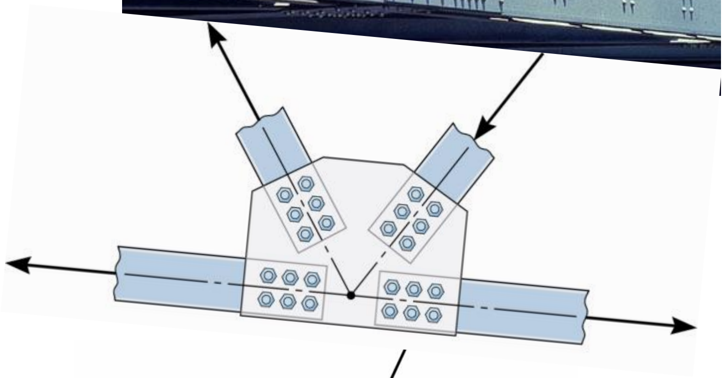
- Çatı sistemlerinde,
- Köprülerde,
- Kulelerde,
- Ve benzeri bir çok yapılarda kullanılır.

4.1 Kafes Sistemlerin Başlıca Özellikleri:



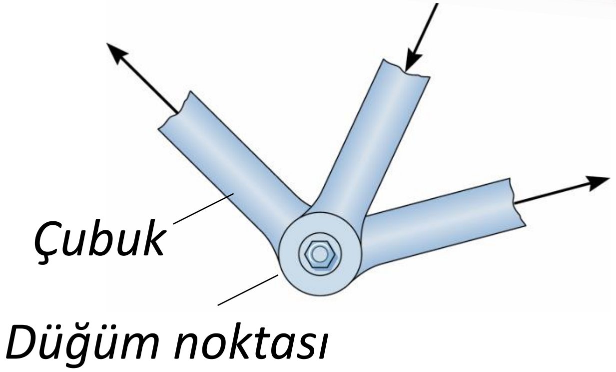
a. Çubuklar uçlarından bağlıdır ve bu uç bağlantı noktalarına «düğüm noktası» ismi verilir.

b. Dış kuvvetler, sadece düğüm noktalarından etki eder.



c. Dış bağlantılar (mafsallar, mesnetler vb.) sadece düğüm noktalarında olmalıdır.

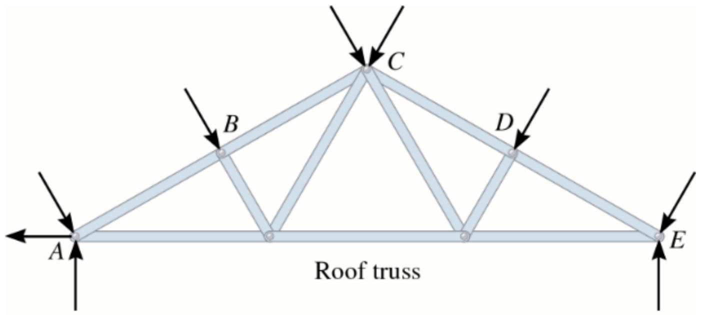
d. Bağlantı noktalarında (düğümlerde) sadece tekil kuvvetler oluşur.



e. Bağlantılardaki moment tepkileri ihmal edilir.

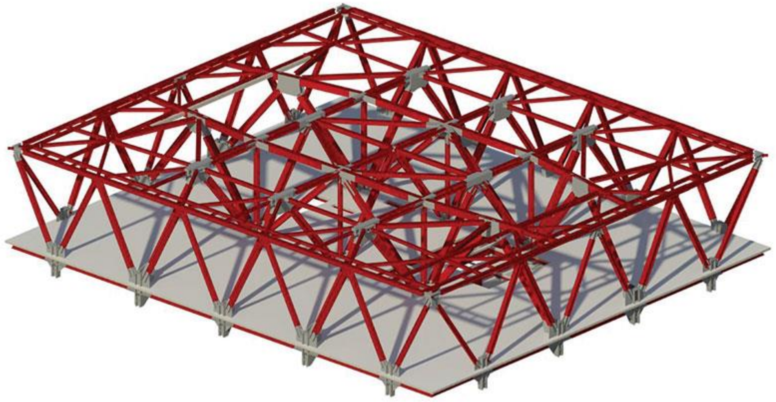
f. Çözümlerde çubuk ağırlıkları ihmal edilir.

g. Her bir çubuğa kendi doğrultusunda kuvvet düşer (çeki veya bası kuvveti).



Bu özelliklerden en az birisini taşımayan sistemler kafes sistem olarak nitelendirilmez.

4.2 Kafes Sistemlerin Tipleri:



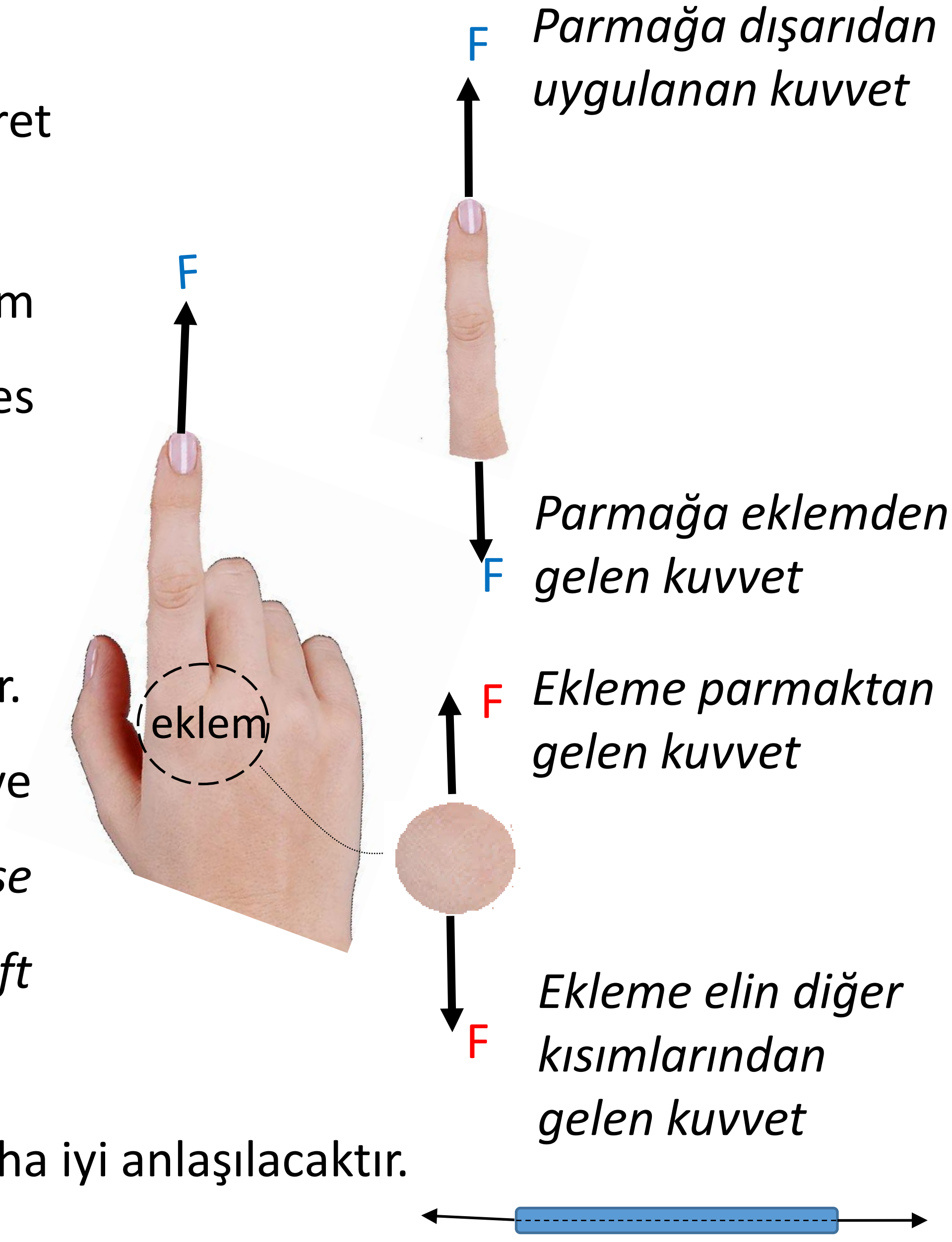
1- Uzay Kafes Sistemleri: 3 Boyutlu sistemlerdir.

2- Düzlem Kafes Sistemleri: 2 boyutlu sistemlerdir.

4.3 Statik Dersi kapsamında amacımız: Kafes Sistemin geometrisi ve dış kuvvetler belli iken, her bir çubuğa veya belirli çubuklara düşen kuvvetleri hesaplamaktır. Ders kapsamına sadece düzlem kafes sistemler dahil edilmiştir.

4.4 Kafes Sistemlerde Kuvvet Dağılımı Mantığı

- Kafes sistemlerde kuvvet dağılımı iyi anlayabilmek için, işaret parmağınızı diğer elinizle çekin.
- Şekildeki kuvvet dağılımını anlamaya çalışın. Bu sırada, hem parmağın hem eklemin dengede olduğunu fark etmelisiniz. İşte kafes sistemler için, Parmak = çubuk, eklem = düğüm … denebilir.
- Kuvvetler bu mantıktaki gibi kafes sistemlerde dağılır.
- Herbir çubuk kendi ekseni doğrultusunda çeki veya bası kuvveti taşır.
- Kuvvetler, çubuğun düğüm noktalarından, eşit şiddette, zıt yönde ve düğüm noktalarını birleştiren çizgi (çubuk ekseni) üzerindedir. *(Bu ise herbir çubuğun çift kuvvet elemanı olduğu anlamına gelir.. Çift kuvvet elemanı çerçeveler konusunda daha detaylı anlatılacaktır.)*

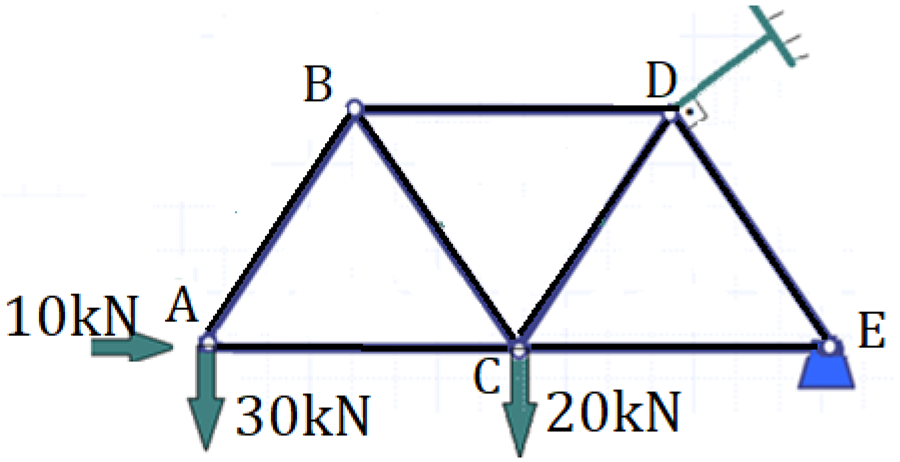


- Örnek 4.1 de kuvvet dağılımı ve kuvvetleri hesaplama yöntemleri daha iyi anlaşılacaktır.

4.5 Çubuk Kuvvetleri ve Hesaplama Yöntemleri :

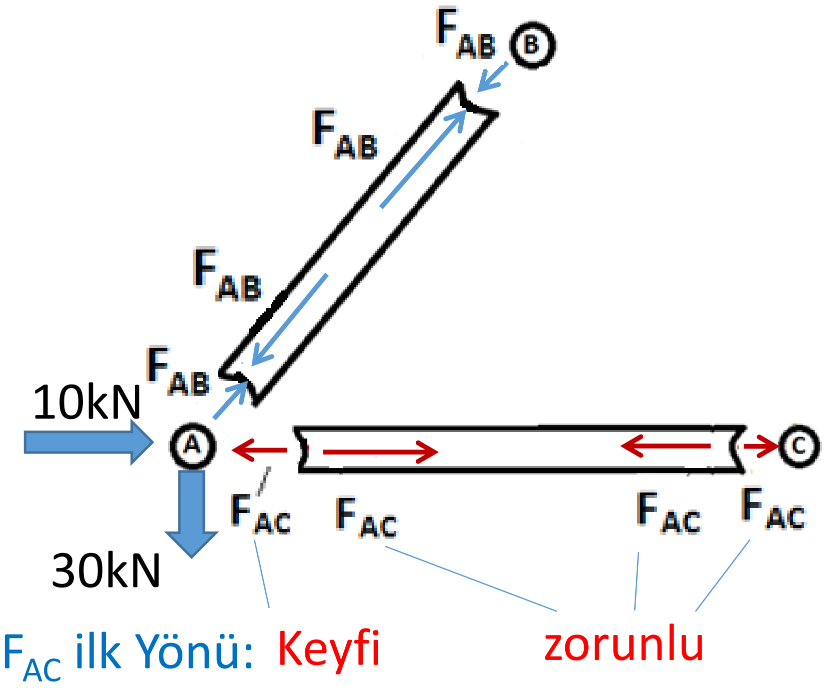
Bu durumu bir örnekle anlamaya çalışacağız.

Örnek 4.1) 5'er metrelik çubuklarla oluşturulmuş olan şekildekidüzlem kafes sistemde herbir çubuğa düşen kuvveti hesaplayınız.



Çözüm:

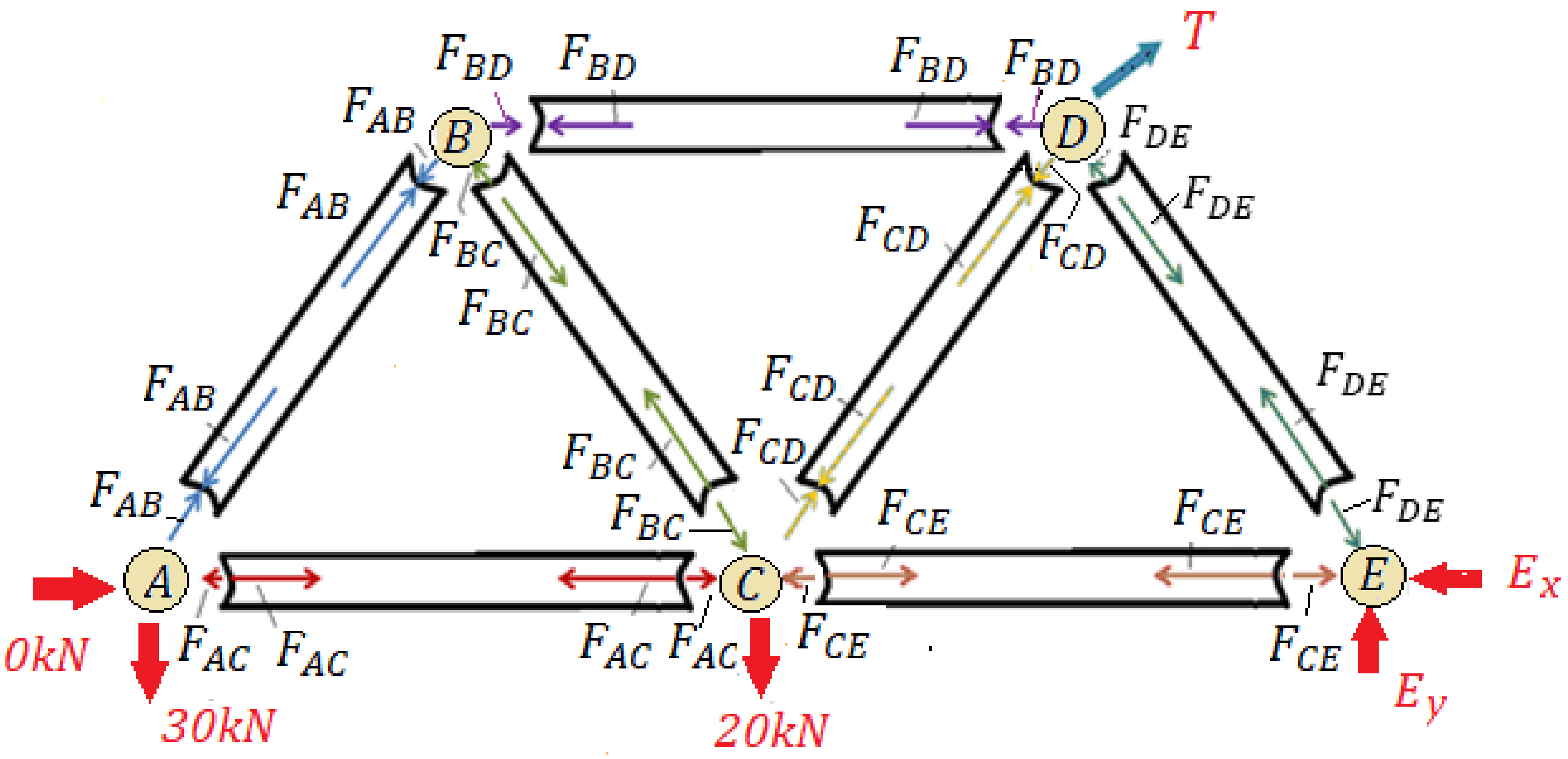
Önce çubuk ve düğümlerdeki kuvvet dağılımı mantığını anlamalıyız:
Bir önceki sayfadaki parmak örneğinden faydalanarak AB ve AC çubukları ve A,B ve C düğümleri arasındaki kuvvet dağılımını çizelim:



P.N.5.1) Kuvvetlerin yönünü nasıl seçiyoruz?

Bir çubuk kuvveti yerleştirilirken çubuk eksenine paralel olmak kaydıyla keyfi bir yönde (çeki veya bası) seçilir. Ancak aynı kuvvetin yönü 2., 3., yerleştirmede keyfi seçilemez. İlk yerleştirmeye bağlı olarak seçilir. Örneğin F_{AC} kuvveti ilk kez yerleştirilirken keyfi olarak A düğümüne sola doğru etki ettirilmiş. AC çubuğunun A ucunda mecburen sağa olmalıdır (etki-tepki). AC çubuğunun C ucuna sola doğru olmalıdır ki çubuk dengede olsun. C düğümüne ise sağa olmalıdır (etki-tepki). Hesaplar sonucu kuvvetin işareti «- » çıkarsa seçtiğimiz yönün tersine yönde olduğunu gösterir. Ancak bu durumda kuvvetin yönü çevrilmez, hesaplarda «-» işareti ile birlikte kullanılır. Çevrilirse işareti de değiştirilmelidir.

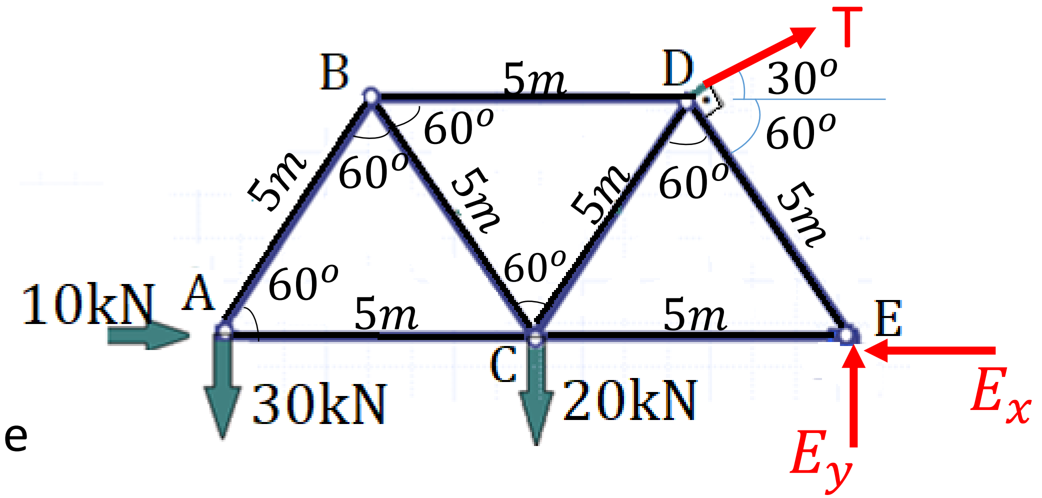
Tüm sistemdeki kuvvet dağılımı:



- *Dikkat edilirse her bir düğüme, kendisine bağlı çubukların her birinden bir kuvvet gelir.*
- *Ayrıca düğümlere dış kuvvetler de gelebilir. (Dış kuvvetler düğüm dışındaki orta kısımlarından etki etmez.)*
- *Çubuklara ise eşit şiddette-zıt yönde bağlı olduğu her bir düğümden bir tepki kuvveti gelir (etki-tepki).*
- *Tüm düğüm ve çubuk kuvvetleri sistemin iç kuvvetleri olarak isimlendirilir ve toplamları sıfırdır..*
- *Bir çubuk kuvvetinin mutlaka çubuk ekseni doğrultusundadır.*
- *Çünkü her bir çubuk çift kuvvet elemanıdır. (Çift kuvvet elemanı 5.4 konusunda açıklanacaktır.)*

Aynı örneğe devam ediyoruz…

Öncelikle bağlantı noktalarındaki kuvvetler tüm sistemin dengesinde hesaplanır:



Tüm sistemin dengesinde sistem sadece dış bağlantılardan izole edilir. Çubuklardan kesilmez ve bu sebeple tüm sistemin dengesinde çubuk kuvvetleri iç kuvvet olarak kalır ve hesaba katılmaz.

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x=0 \rightarrow -E_x + T\cos 30^o + 10 = 0 \\ &\sum F_y=0 \rightarrow E_y + T\sin 30^o - 30 - 20 = 0 \\ &\sum M_E=0 \rightarrow -T.5 + 20x5 + 30x10 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} T &= 80kN \\ E_x &= 79.28kN \\ E_y &= 10kN \end{aligned}$$

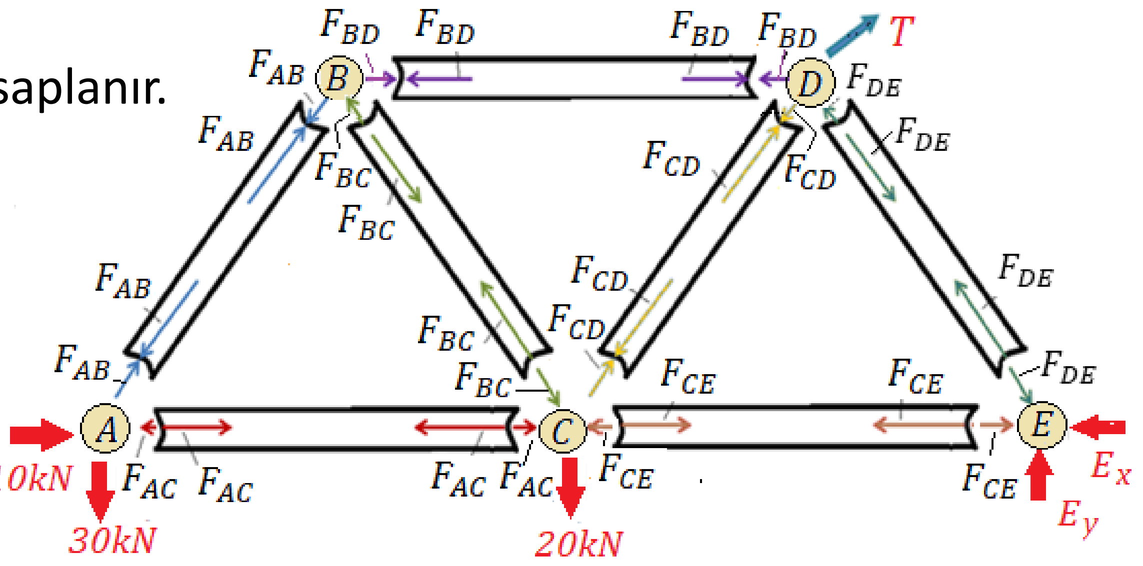
bulunur.

P.N 5.2: Bazı problemlerde mesnet tepkilerini hesaplamaya gerek kalmadan, istenen çubuk kuvvetleri bulunabilir. Bu durumu görebilmek ve alışmak için bol soru çözülmesinde fayda vardır. Kesim yönteminde, mesnetlerin tümü kesimin bir tarafında kalıyorsa mesnet tepkilerini bulmaya gerek kalmaz… .kesimin diğer tarafı incelenir ve çubuk kuvvetleri bulunabilir.

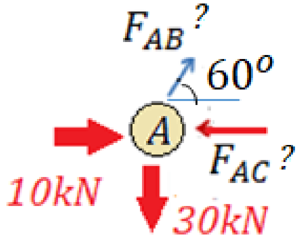
Şimdi iç kuvvet ismi verdiğimiz çubuk ve düğümlere düşen kuvvetleri hesaplayacağız. Bunun için 2 yöntem vardır:

4.5.1) 1. Yöntem : Düğüm Yöntemi

Bu yöntemde her bir düğümün dengesi yazılır ve kuvvetler hesaplanır.

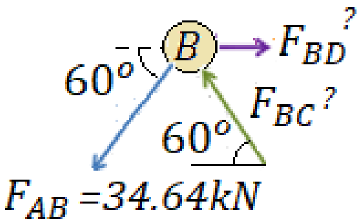


- Her bir düğüm için $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$ olmak üzere 2 denklem yazılabilir. Tüm kuvvetler aynı noktadan geçtiği için moment denklemi yazılamaz.
- Bu nedenle bir düğümde en fazla 2 bilinmeyen olması gerekir. Çözüm aşamasında düğüm sırası önemlidir. Önce 2 bilinmeyenin olduğu A düğümünden başlayabiliriz:



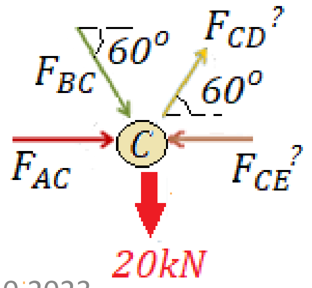
$$\left.\begin{aligned} \sum F_x=0 \quad &\rightarrow \; -F_{AC}+F_{AB}\cos 60^o + 10 = 0 \\ \sum F_y = 0 \quad &\rightarrow \; -30 + F_{AB}\sin 60^o = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow F_{AC}= 27.32kN, \qquad F_{AB}= 34.64kN$$

A'dan sonra B düğümüne geçilebilir. Çünkü F_{AB} bulunduğu için B de 2 bilinmeyen kuvvet kalmıştır.



$$\left.\begin{aligned} \sum F_x=0 \quad &\rightarrow \; -F_{BC}\cos 60^o + F_{BD} - 34.64\cos 60^o = 0 \\ \sum F_y=0 \quad &\rightarrow \quad F_{BC}\,.\,sin\,60^o - 34.64.\,sin\,60^o=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow F_{BC} = F_{BD}= 34.64\text{kN}$$

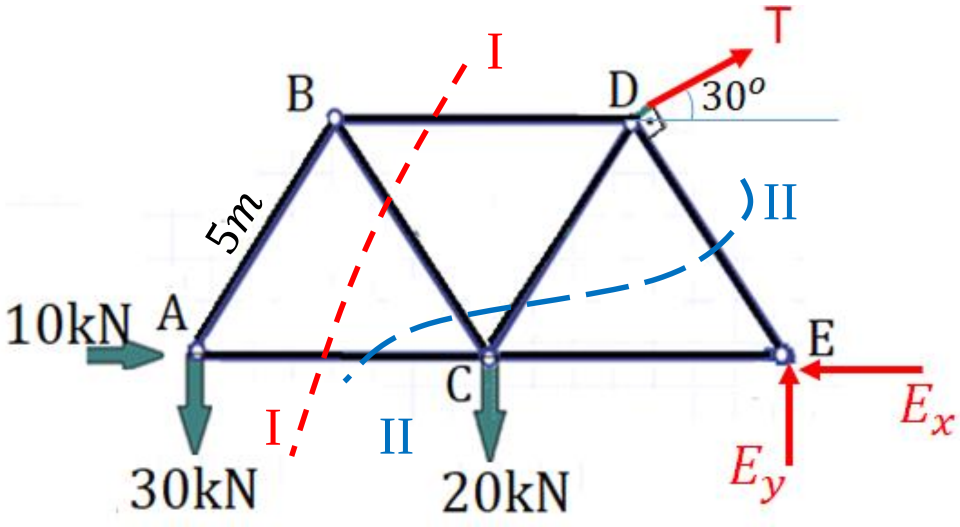
C düğümünde 2 bilinmeyen kuvvet kaldığı için C'ye geçilebilir.



$$\left.\begin{aligned} \sum F_x=0 \quad &\rightarrow F_{BC}\cos 60^o + F_{AC} - F_{CE} + F_{CD}\cos 60^o = 0 \\ \sum F_y=0 \quad &\rightarrow \; -F_{BC}.\,sin\,60^o + F_{CD}\,sin\,60^o - 20 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} F_{CD}&= 57.74kN, \\ F_{CE}&= 73.51\text{kN} \end{aligned}$$

$F_{DE}= 11.55kN$
Çıkmaktadır.
Bulmaya çalışınız.

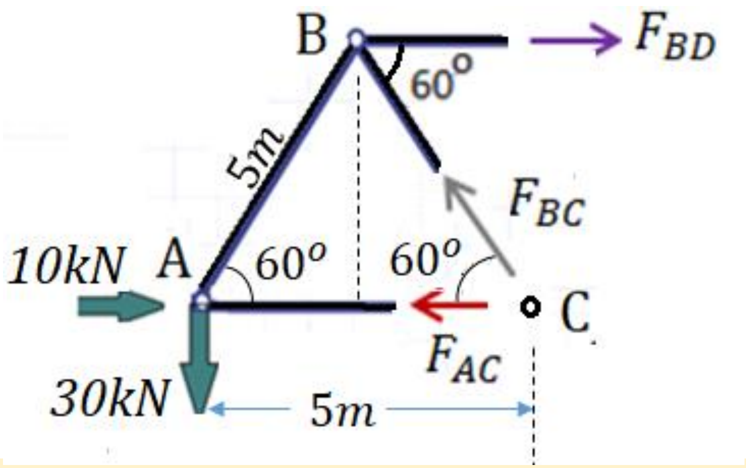
4.5.2 2. Yöntem : Kesim Yönetimi



İncelediğimiz örnekteki kafes sistem dış kuvvetlerin etkisi ile dengededir. O halde hayali olarak yaptığımız kesimlerin sol veya sağ parçaları (kısımları) da ayrı ayrı dengededir. (Ayırma Prensibi)

Bu kısımların birisinin SCD si çizilir. 3 Denge denklemiyle ($\sum F_x$=0,$\sum F_y$=0, $\sum M_E$=0) kesilen çubuklardaki kuvvetler bulunabilir.

I-I kesimi Sol kısım (SCD)



Sol kısmın dengesinden:

$\sum F_y$=0 $\rightarrow F_{BC}.\,sin\,60^o - 30 = 0$ $\rightarrow F_{BC} = 34.64kN$

$\sum M_C$=0 $\rightarrow -F_{BD}(5sin\,60^o) + 30x5 = 0$ $\rightarrow F_{BD} = 34.64kN$

$\sum F_x$=0 $\rightarrow -F_{BC}\cos 60^o + F_{AC} + F_{BD} + 10 = 0$

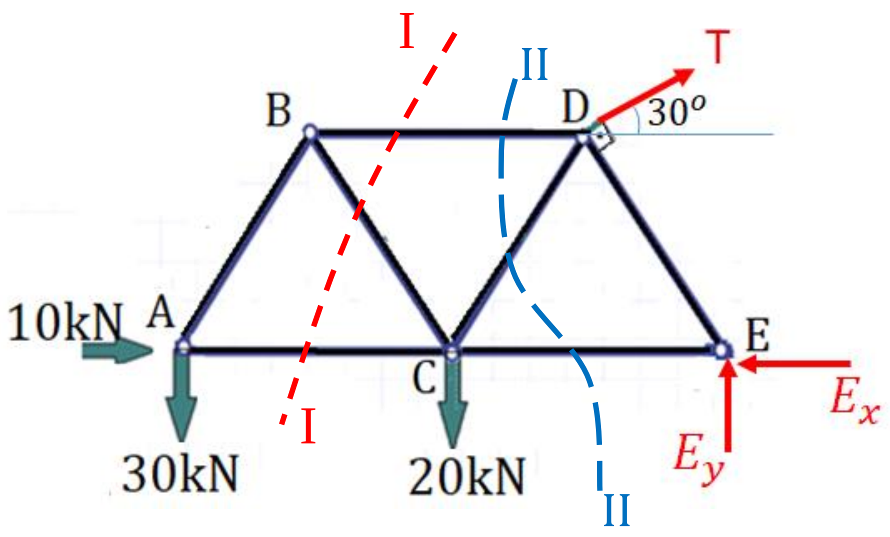
$-34.64\cos 60^o - F_{AC} + 34.64 + 10 = 0$ $\rightarrow F_{AC} = 27.32kN$

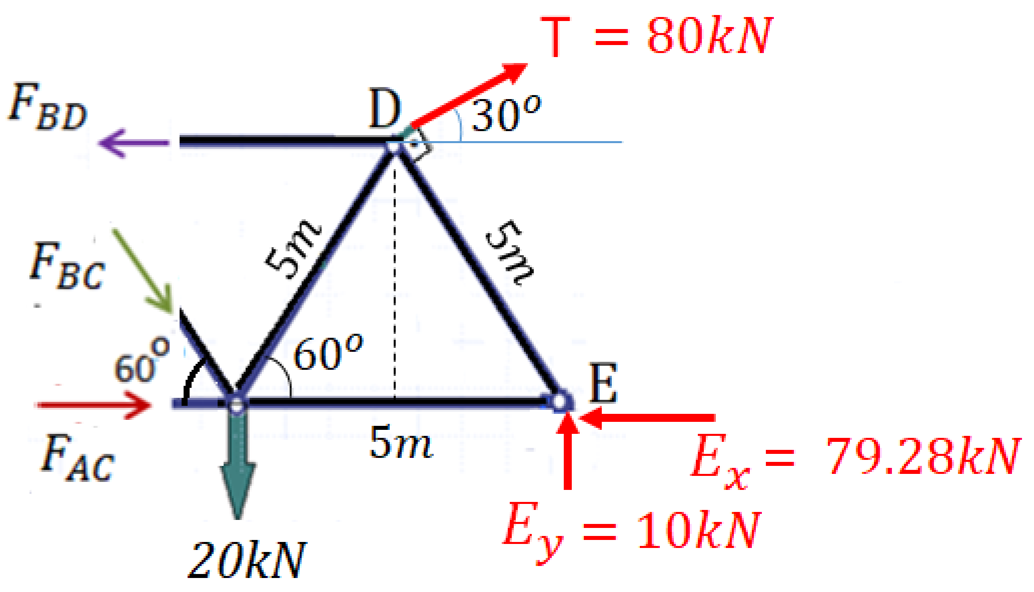
Düğüm Yöntemindeki aynı sonuçları bulduk.

Dikkat: İlk kez yerleştirdiğimiz için bir çubuk kuvvetini zıt yönde seçebilirdik. Bu durumda şiddeti değişmezdi, işareti ise zıt çıkardı. Örneğin F_{BC} yi B den C'ye doğru seçmiş olsaydık, değeri -34.64kN çıkardı.

Bir kesimde 3 tane denge denklemi uygulayabileceğimiz için, 3 tane çubuk kuvveti bilinmeyeni olması gerekir ki hepsi bulunabilsin. Örneğin <u>önce</u> II-II kesimini inceleseydik, kesilen 4 çubuğun tümünün kuvvetlerini bulamazdık.

I-I kesiminde Sağ kısmı alsaydık aynı sonuçları bulmamız gerekirdi. Bunu ispat edelim:





$\sum F_y$=0 $\rightarrow$ $-F_{BC}.\,sin\,60^o + 80.\sin 30^o - 20 + 10 = 0$ $\rightarrow$ $F_{BC} = 34.64kN$

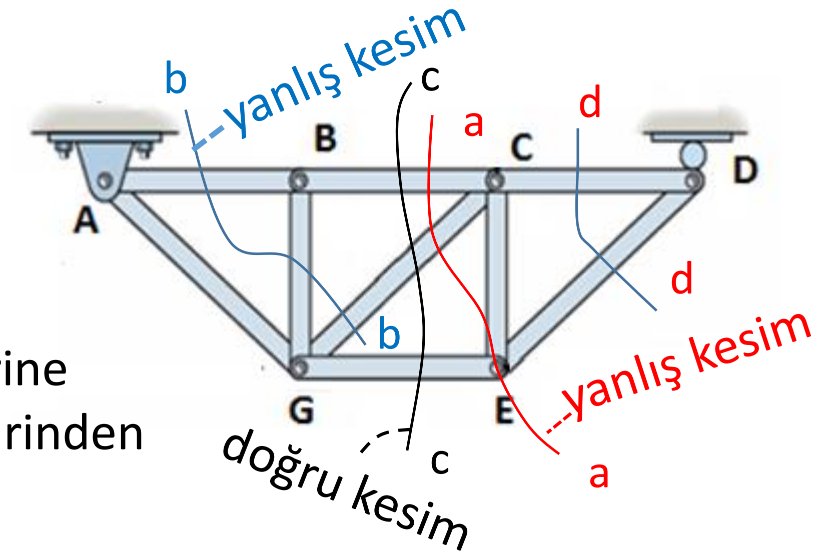
$\sum M_E$=0 $\rightarrow$ $F_{BD}(5x\sin 60^o) - 80x5 + 20x5 + F_{BC}\sin 60^o x\ 5 = 0$ $\rightarrow$ $F_{BD} = 34.64kN$

$\sum F_x$=0 $\rightarrow$ $F_{BC}\cos 60^o - F_{BD} - F_{AC}$ - $79.28 + 80\cos 30^o = 0$ $\rightarrow$ $F_{AC} = 27.32kN$

(Aynı sonuçlar)

- Soru: II –II kesiminden F_{CD}, F_{CE} ve F_{BD} çubuk kuvvetlerini bulmaya çalışınız.

4.6 Yanlış Kesimler:



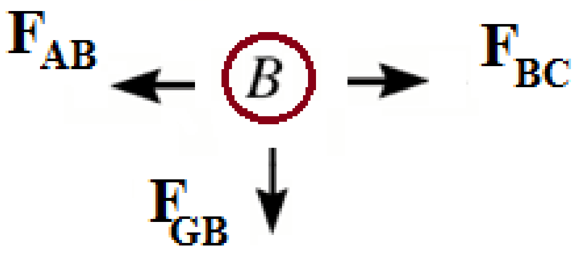
1. a-a kesimi gibi   bir veya birkaç düğümden geçen kesim yapılamaz.
2. b-b kesimi gibi yarıya kadar kesim yapılamaz.
3. Kesim (c-c kesimi gibi) iki düğümü arasında kalan, çubukların orta bölgelerine denk gelen yerlerden ve boydan boya yapılmalıdır. Sağ veya sol parça birbirinden tamamen ayrılmalıdır. Öyle ki sol veya sağ parça alıp götürülebilmelidir.

Soru: d-d kesimi sizce doğru bir kesim midir?

4.7 Boş Çubuk: Üzerine kuvvet gelmeyen çubuklara denir.

Nasıl tespit edilir?

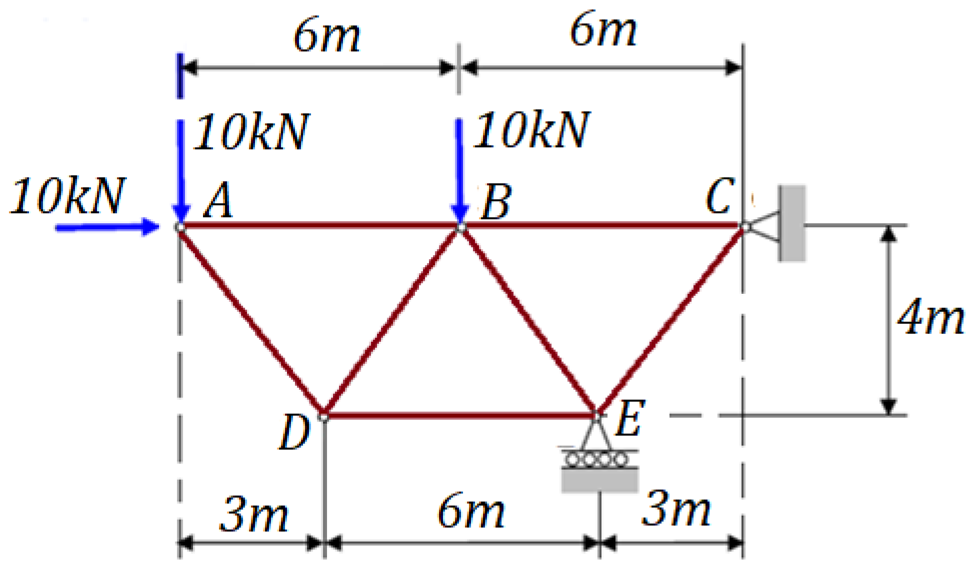
Genel olarak; boş çubuk, bir düğümdeki diğer çubuklarla 90^0 açı yapar ve o düğüme çubuk yönünde dış kuvvet gelmez. Üsteki örnek için B düğümünün dengesini düşünürsek:



$\sum F_y=0 \quad \rightarrow F_{GB}=0$

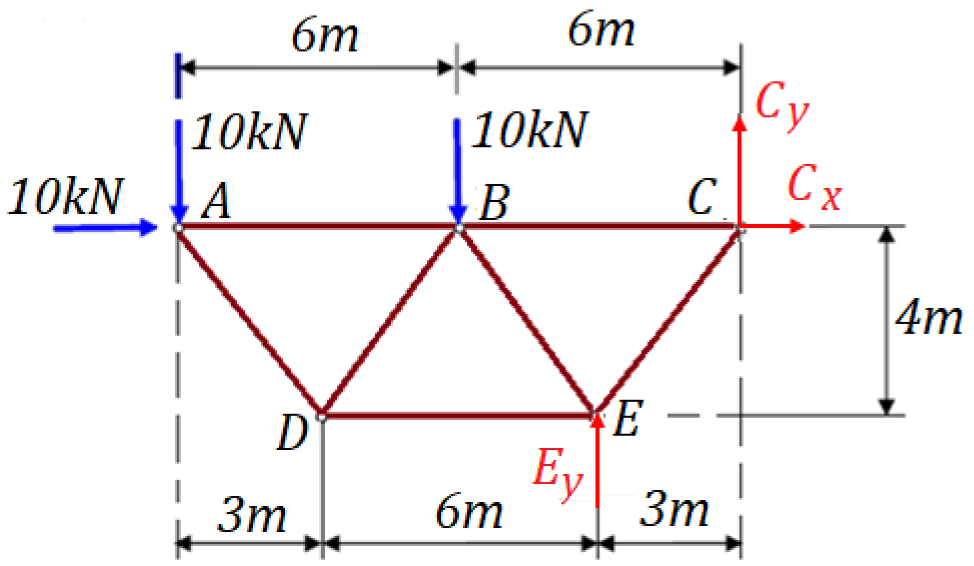
GB çubuğu boş çubuktur.

Örnek 4.2 : Verilen kafes sistemindeki çubuk kuvvetlerini düğüm metodunu kullanarak bulunuz.



Çözüm: Öncelikle tüm sistemin dengesinde mesnet tepkileri bulunur.

SCD (tüm sistem)

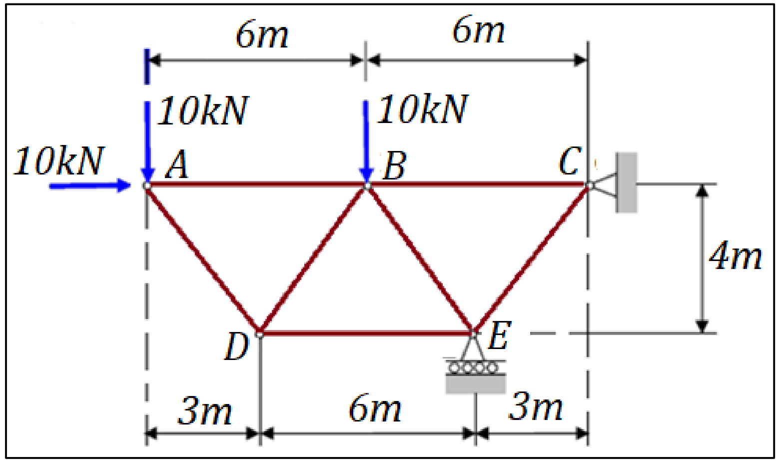


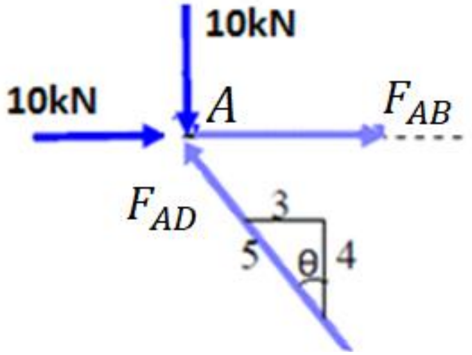
$\sum M_c=0$

$\rightarrow -E_y \,.\, 3 + (10)\,(12) + (10)\,(6) = 0 \qquad \rightarrow E_y = 60\ kN$

$\sum F_x=0 \quad \rightarrow \quad C_x+10 = 0 \qquad \rightarrow C_x = -10\ kN$

$\sum F_y=0 \quad \rightarrow \quad C_y+E_y - 10 - 10 = 0 \qquad \rightarrow C_y = -40\ kN$

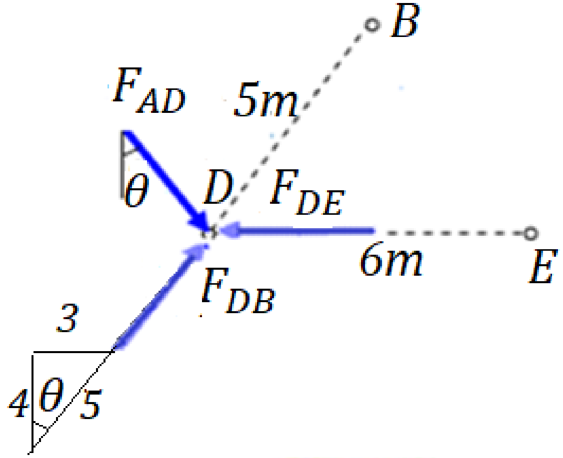




$$\sum F_x=0 \rightarrow F_{AB} - F_{AD}\sin\theta + 10 = F_{AB} - F_{AD}\frac{3}{5} + 10 = 0$$

$$\sum F_y=0 \rightarrow F_{AD}\cos\theta - 10 = F_{AD}\frac{4}{5} - 10 = 0$$

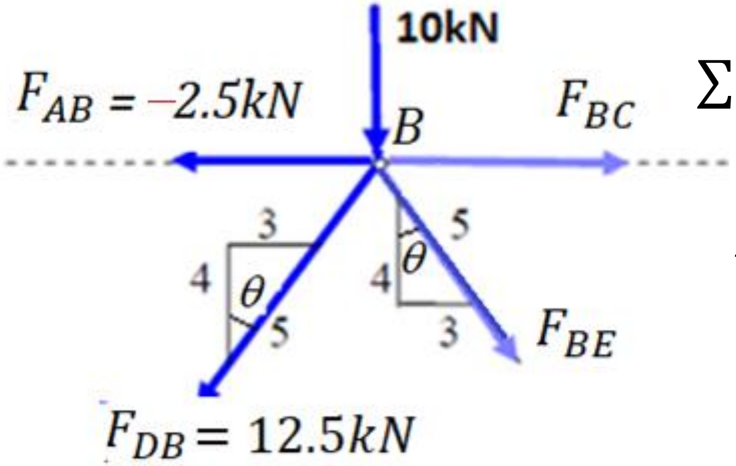
$$\rightarrow F_{AB} = -2.5kN \ , \quad F_{AD} = 12.5kN$$



$$\sum F_x=0 \quad \rightarrow -F_{DE} + F_{AD}\sin\theta + F_{DB}\,\mathrm{Sin}\,\theta = -F_{DE} + 12.5\left(\frac{3}{5}\right) + F_{DB}\frac{3}{5} = 0$$

$$\sum F_y=0 \quad \rightarrow -F_{AD}\,\mathrm{Cos}\,\theta + F_{DB}\,Cos\,\theta = -12.5\left(\frac{4}{5}\right) + F_{DB}\frac{4}{5} = 0$$

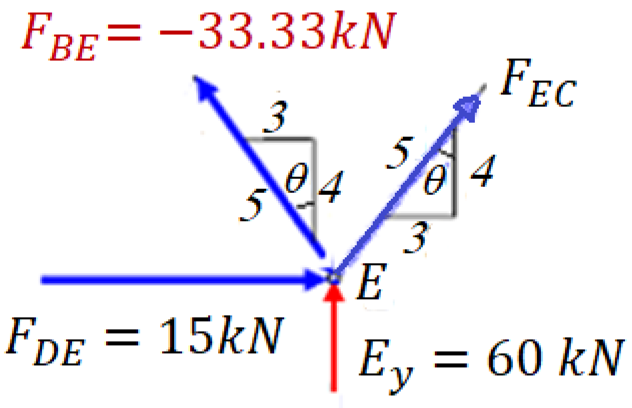
$$\rightarrow F_{DB} = 12.5kN \ , \quad F_{DE} = 15kN$$



$$\sum F_x=0 \rightarrow F_{BC} + F_{BE}\sin\theta - F_{DB}\,\mathrm{Sin}\,\theta - F_{AB} = F_{BC} + F_{BE}\frac{3}{5} - 12.5\left(\frac{3}{5}\right) - (-2.5) = 0$$

$$\sum F_y=0 \quad \rightarrow -F_{BE}\,Cos\,\theta - F_{DB}\,\mathrm{Cos}\,\theta - 10 = -F_{BE}\frac{4}{5} - 12.5\left(\frac{4}{5}\right) - 10 = 0$$

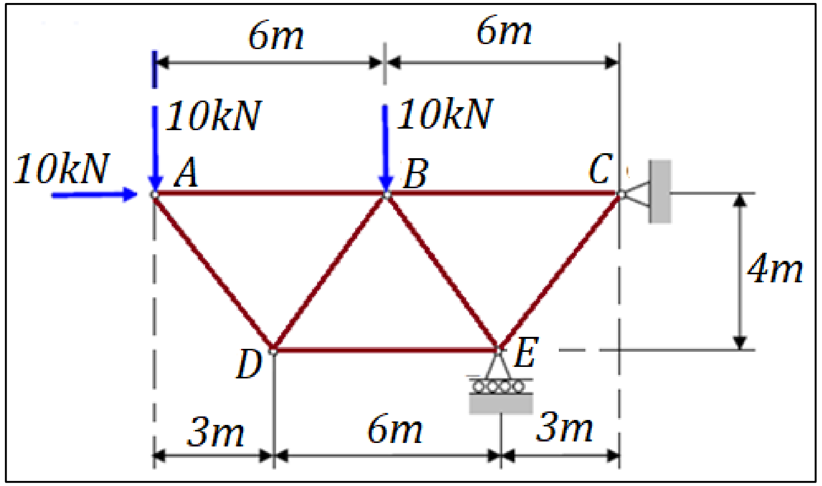
$$\rightarrow F_{BE} = -25kN \quad ; \quad F_{BC} = 20kN$$



$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow F_{EC}\,\text{Sin}\,\theta - F_{BE}\,\text{Sin}\,\theta + F_{DE} = 0$$

$$= F_{EC}\frac{3}{5} - (-25)\frac{3}{5} + 15 = 0$$

$$\rightarrow F_{EC} = -50kN$$

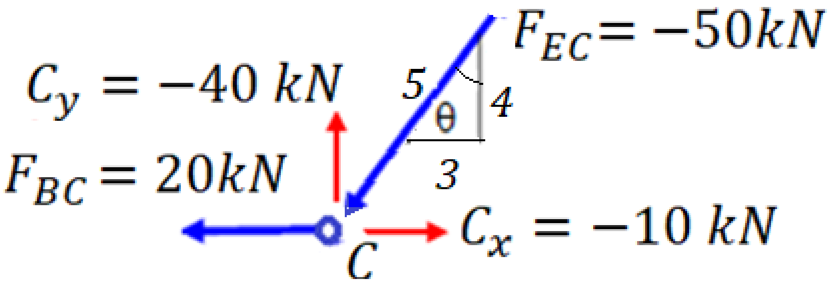


(Kontrol amaçlı)

$\sum F_y = 0$ ..çıkmalıdır

$$\rightarrow F_{EC}\,\text{Cos}\,\theta + F_{BE}\,\text{Cos}\,\theta + E_y = -50\,\frac{4}{5} - 25\left(\frac{4}{5}\right) + 60 = 0$$

C düğümünü kontrol amaçlı inceleyelim:

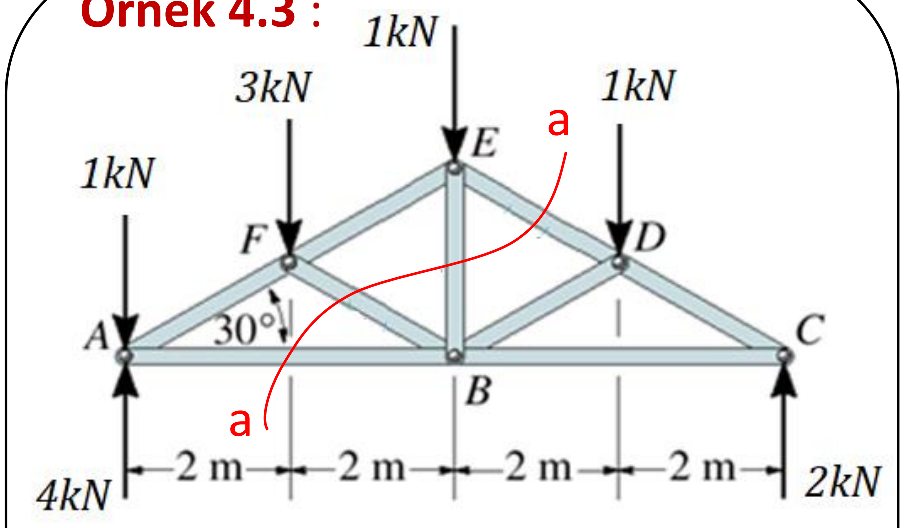


$\sum F_x = 0$ Çıkmalıdır $\rightarrow -F_{EC}\,\text{Sin}\,\theta - F_{BC} + C_x = -(-50)\frac{3}{5} - 20 - 10 = 0$

$\sum F_y = 0$ Çıkmalıdır $\rightarrow -F_{EC}\,\text{Cos}\,\theta + C_y = -(-50).\frac{4}{5} - 40 = 0$

Bu denklemler de sağlanıyor. Üstte bulduğumuz sonuçların doğruluğunu destekliyor.

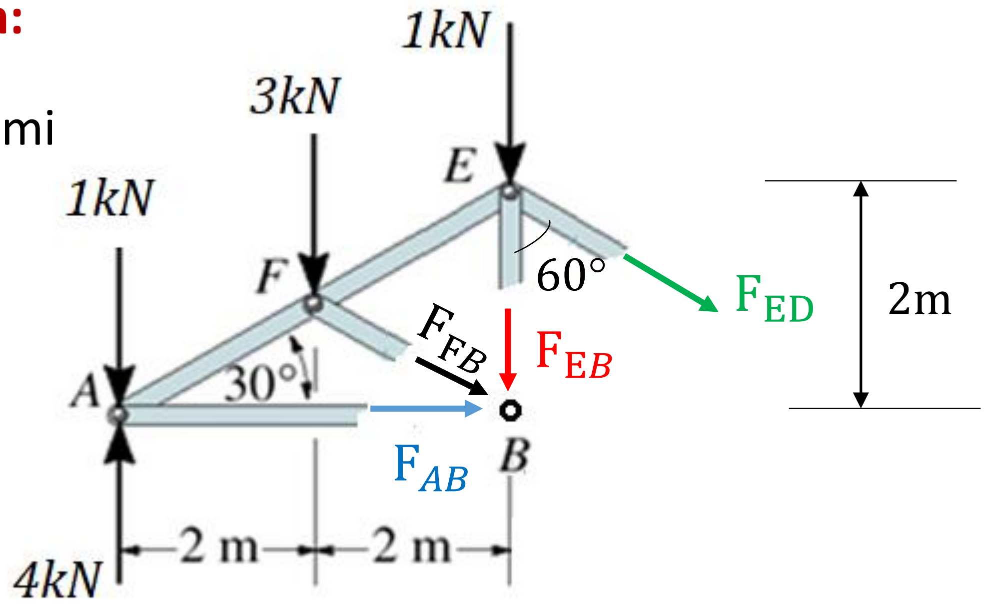
Örnek 4.3 :



a-a kesimini de kullanarak ED ve EF çubuk kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm:

a-a kesimi



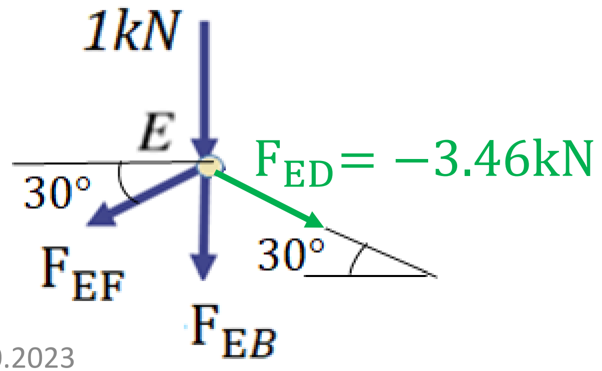
$$\Sigma M_B = 0$$

$$1x4 + 3x2 - 4x4 - \overbrace{F_{ED}\sin60°}^{F_{ED}\text{ nin yatay bileşeni}}(2) = 0 \quad \rightarrow F_{ED} = -3.46\text{kN}$$

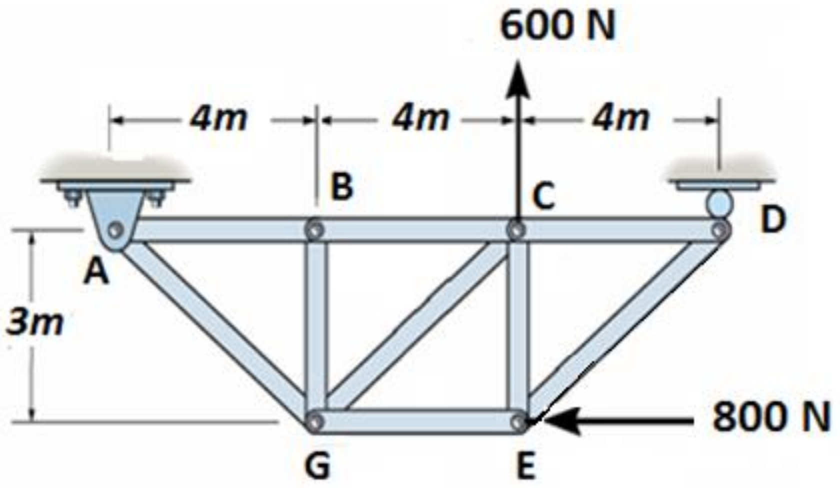
(Diğer çubuk kuvvetleri sadece a-a kesiminden bulunamaz.)

E düğümünün dengesini incelersek: $\Sigma F_x = 0 \rightarrow \ -F_{EF}\cos30° + F_{ED}\cos30° = -F_{EF}\cos30° - 3.46\cos30° = 0$

$$\rightarrow F_{EF} = -3.46\text{k N}$$

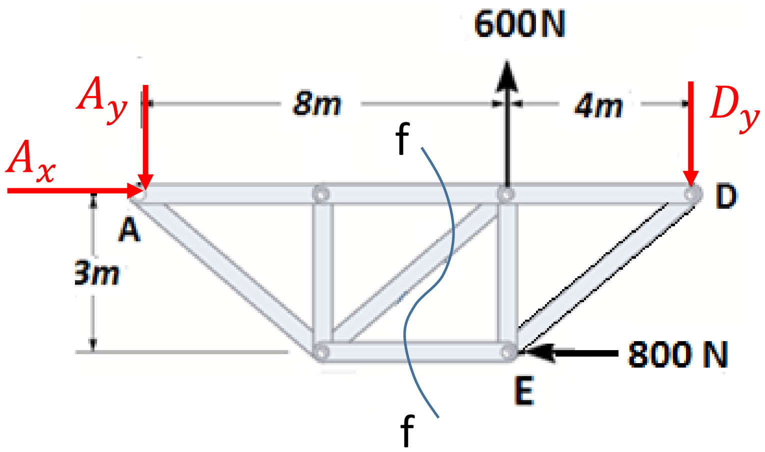


F_{ED} nin işaretini eksi bulmamız seçtiğimiz yönün tersine olduğunu gösterir. Fakat yönünü değiştirmeden işaretiyle birlikte diğer işlemde kullandığımıza dikkat ediniz. Yönünü değiştirseydik, işaretini de değiştirmemiz gerekecekti.



Örnek 4.4 Şekildeki kafes sistemde, (video 4a , ornek 4.2)
a-)**GE, GC ve BC** çubuklarındaki kuvvetleri bulunuz.
b-) sistemde boş çubuk var mıdır? Tespit ediniz.

Çözüm: Tüm sistemin dengesinden mesnet tepkilerini bulalım:

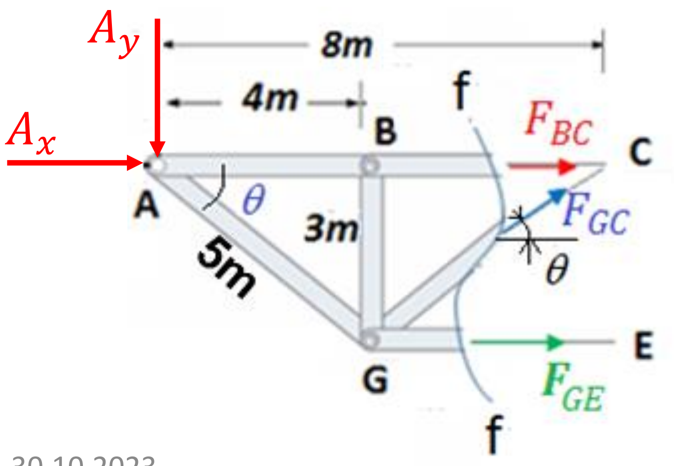


$\sum F_x=0 \quad \rightarrow A_x - 800 = 0 \quad \rightarrow A_x = 800\ N$

$\sum M_A=0 \quad \rightarrow -D_y.12 + 600x8 - 800x3 = 0 \quad \rightarrow D_y = 200\ N$

$\sum F_y=0 \quad \rightarrow -A_y + 600 - D_y = 0 \quad \rightarrow A_y = 400\ N$

f-f kesiminin sol kısmının dengesini inceleyelim:



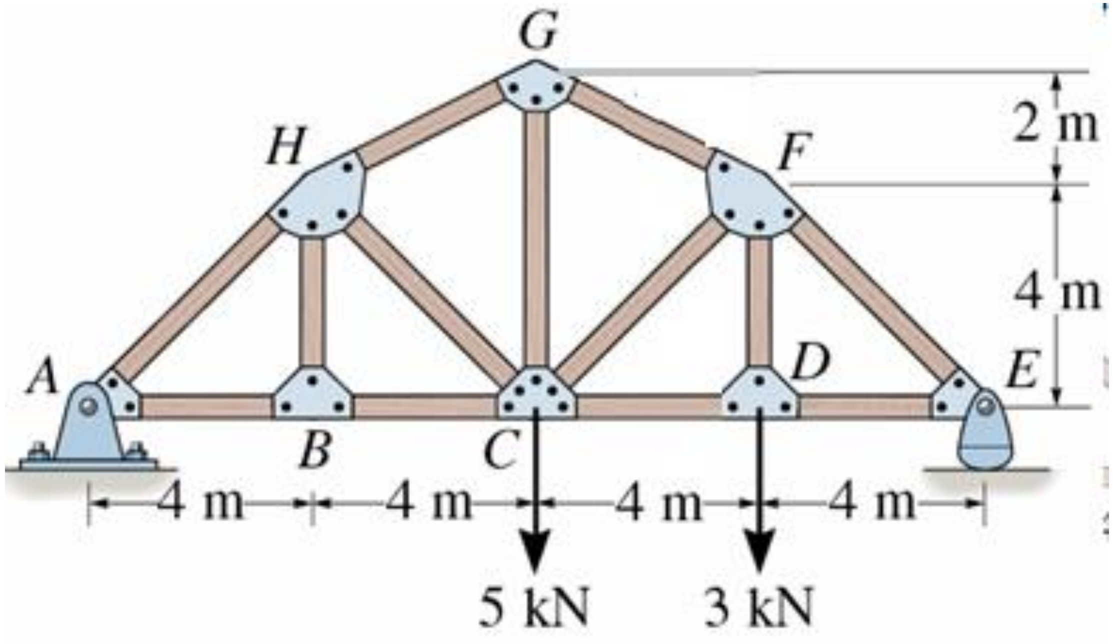
$\sum F_y=0 \quad \rightarrow -A_y + F_{GC} Sin\theta \quad = -400 + F_{GC}\frac{3}{5} = 0 \quad \rightarrow F_{GC} = 666.67N$

$\sum M_C=0 \quad \rightarrow A_y\ x8 + F_{GE}.3 \quad = 400x8 + F_{GE}x3 = 0 \quad \rightarrow F_{GE} = -1066.67N$

$\sum M_G=0 \rightarrow A_y\ x\ 4 - A_x\ x\ 3 - F_{BC}x\ 3 \quad = 400x4 - 800x3 - F_{BC}\ x\ 3 = 0$

$\rightarrow F_{BC} = -266.67\ N$

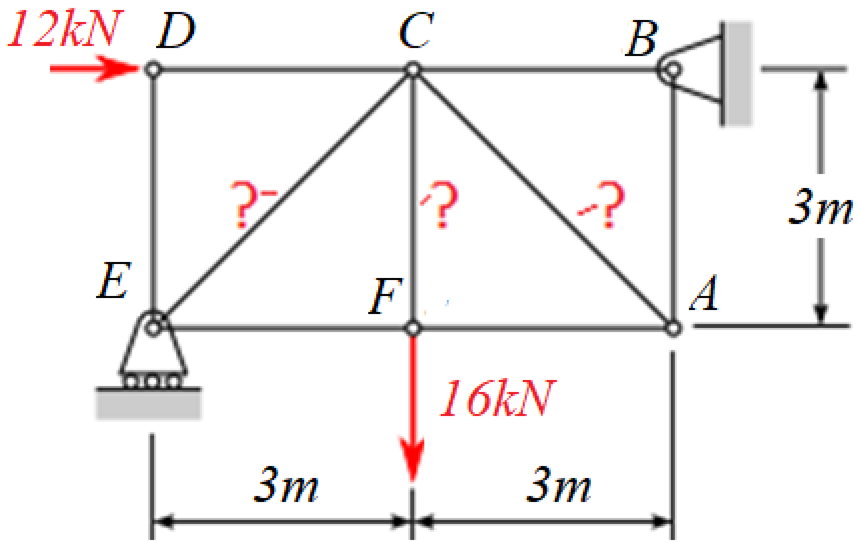
Örnek 4.5 (*): Şekildeki kafes sistemde **CF** çubuğundaki kuvveti bulunuz.



Cevap: $F_{CF} = 0.589 \text{ kN}$

Alttaki Kafes Sistemlerde a-) Soru işareti olan çubuklardaki kuvvetleri hesaplayınız. b-)Varsa boş çubukları tespit ediniz. (Cevapları soruların yanında verilmiştir. Yöntem Serbesttir.)

Örnek 4.6(*):



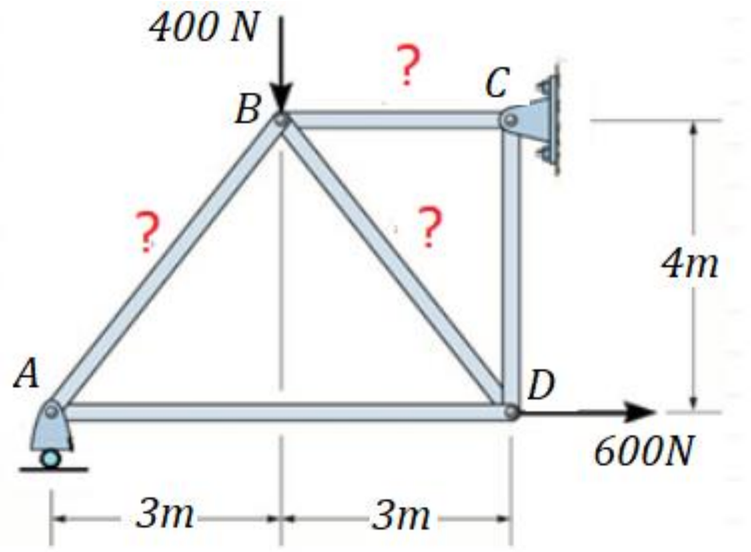
Cevaplar:

CF= 16kN,

CE = CA= 11.31kN

Boş çubuk: DE

Örnek 4.7



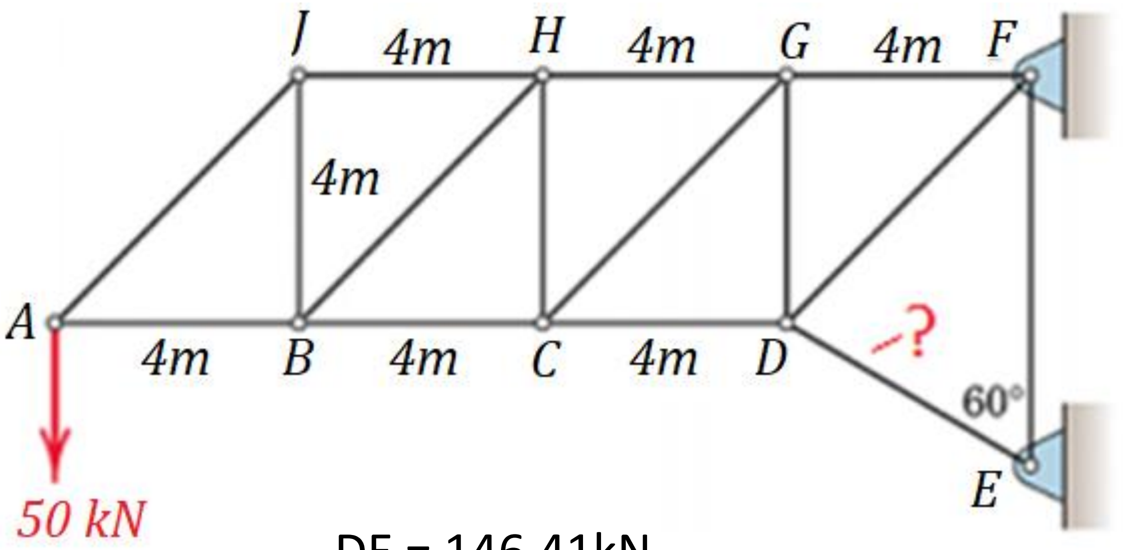
Cevaplar:

AB= -750N,

BC = -600N,

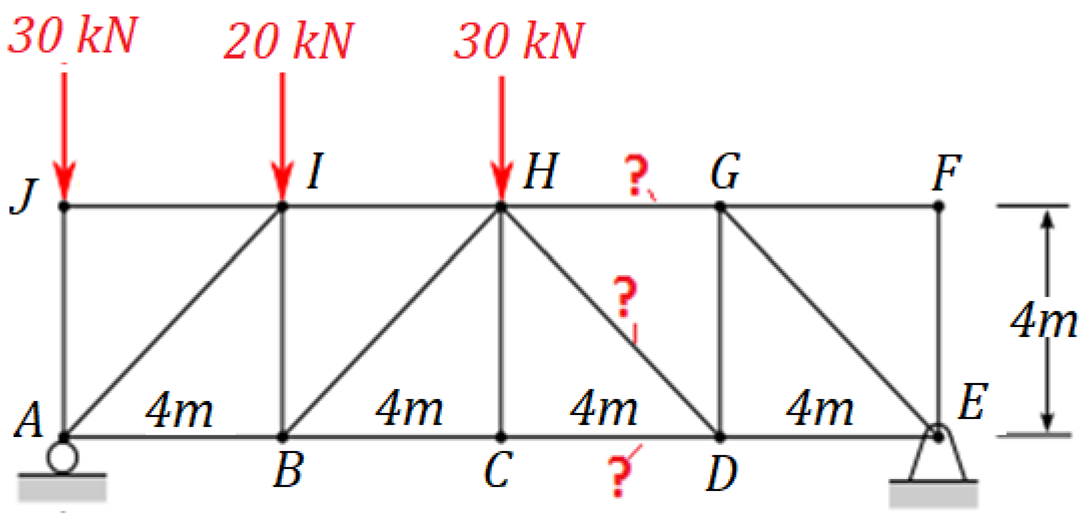
BD = 250N

Örnek 4.8



DE = 146.41kN

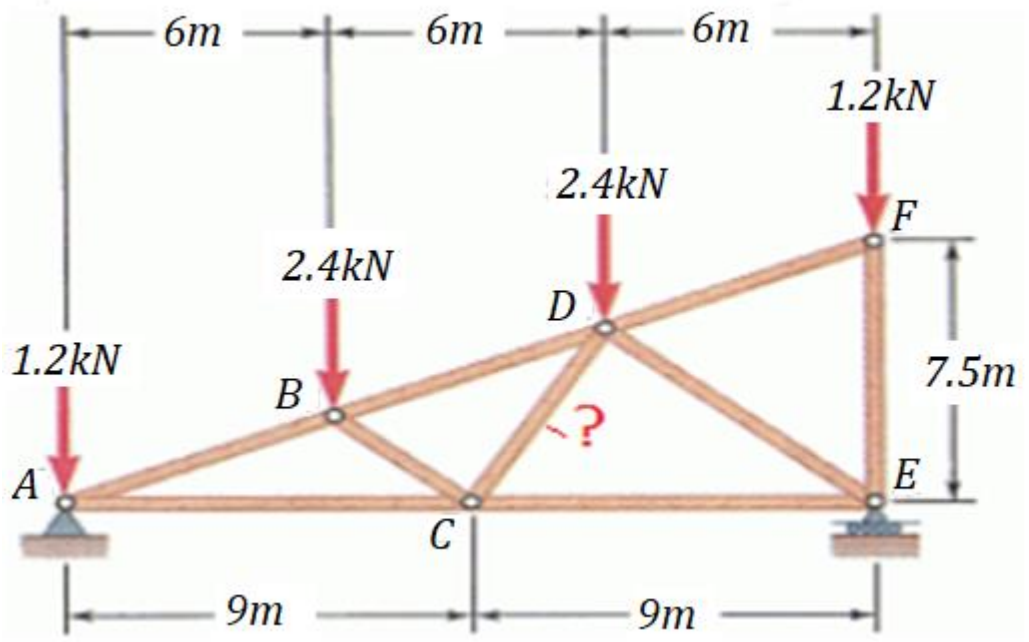
Örnek 4.9



GH = 20kN, CD =40kN , DH =14.14 kN

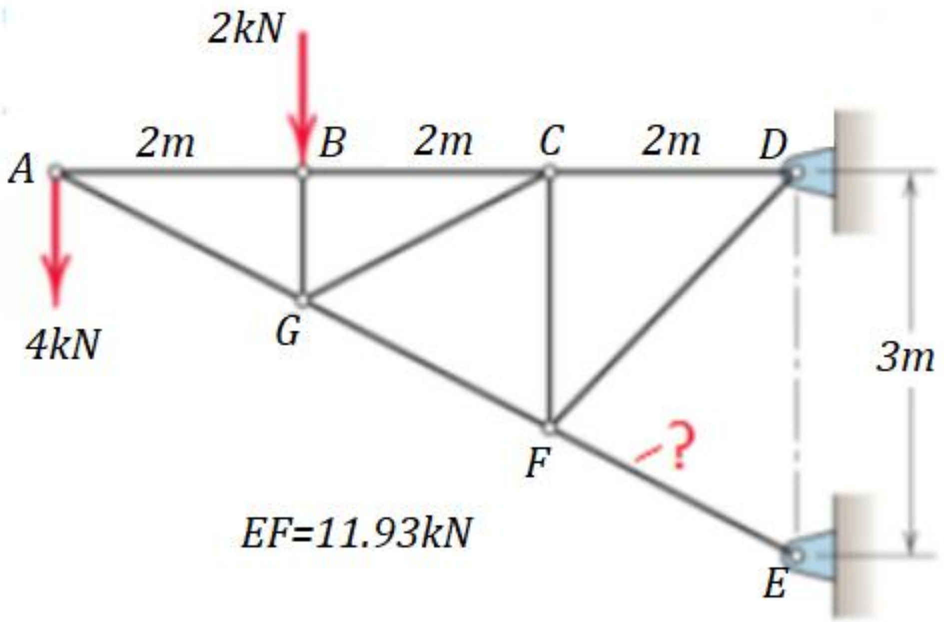
Boş çubuklar: CH, JI, GF, EF

Örnek 4.10

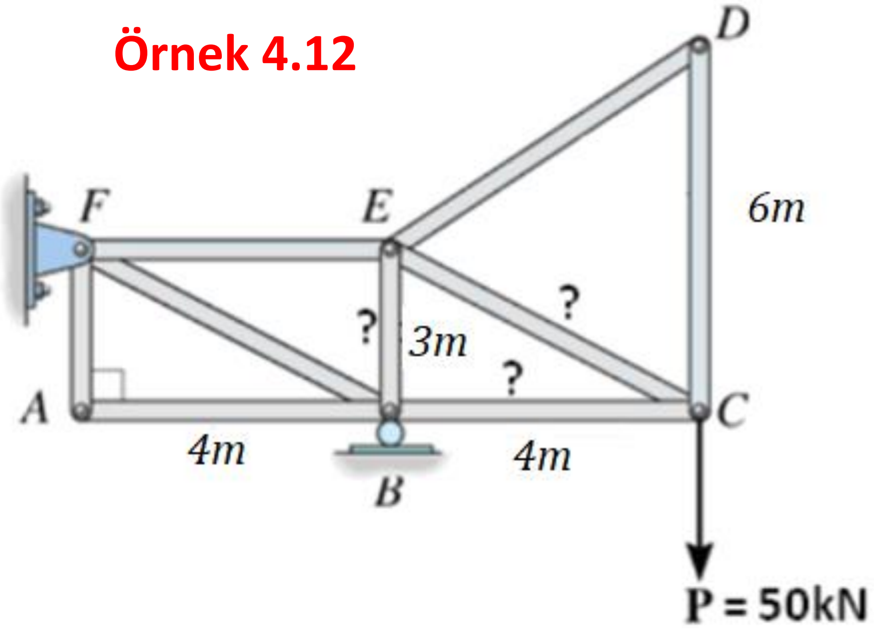


CD=1.87kN

Örnek 4.11



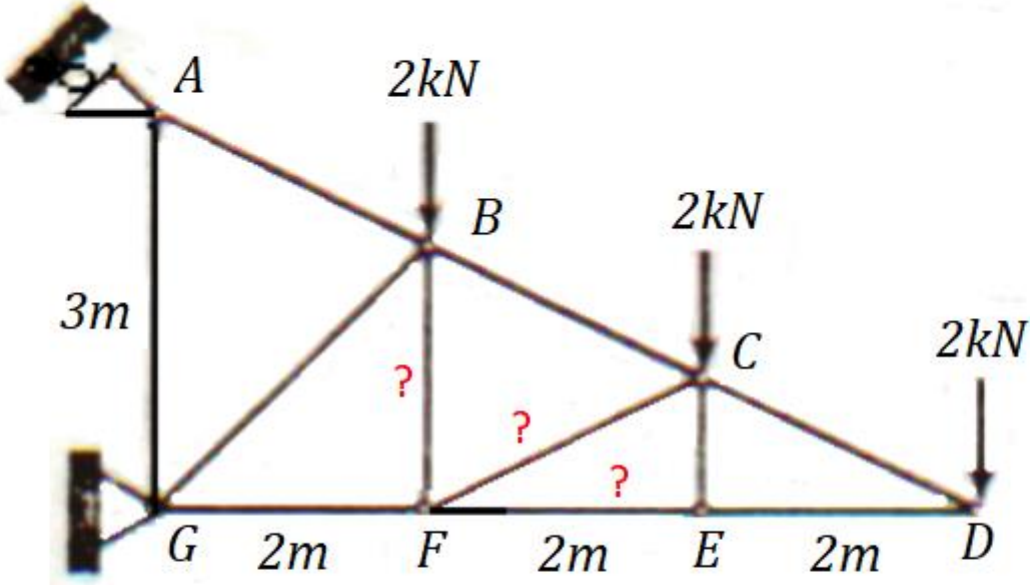
Örnek 4.12



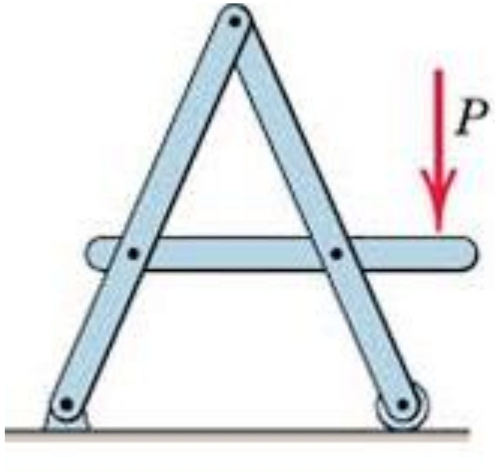
CB = 66.6kN ; EC = 83.3kN; EB = -50kN

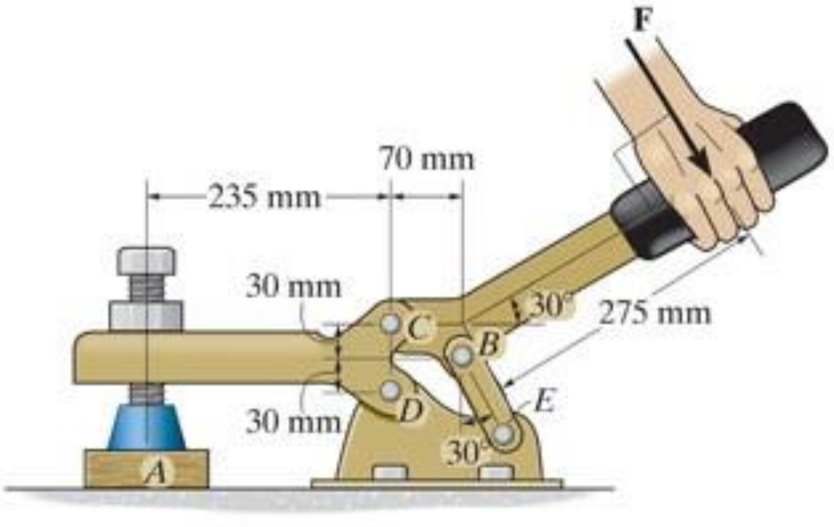
Boş çubuklar: AF, AB, DE, DC

Örnek 4.13



EF = -4kN ; CF = -2.237kN; FB = -1kN





5. ÇERÇEVELER VE BASİT MAKİNALAR

[Video 5]

5.1 Tanım: Çeşitli katı parçaların (elemanların) birbirlerine bağlanması (montajlanması) ile oluşan sistemlerdir. Kafes sistemlerden farklı olarak, elemanlar birbirlerine 2 den fazla noktadan bağlanabilir ve dış kuvvetler sadece bağlantı noktalarından değil farklı noktalardan da elemanlara etki edebilir.

4.1 maddesinde bahsedilen Kafes Sistemlerin Şartlarından birisi ihlal edilirse artık bu sistem çerçeve sistem veya basit makine haline dönüşmüş olur ve bu kapsamda incelenir.

5.2 Amacımız: Her bir elemanın (parçanın) bağlantı noktalarında oluşan kuvvetlerin hesaplanabilmesidir.

5.3 Çözüm Yöntemi: Kuvvetleri bulabilmek için toplam 3 adımımız vardır:

1-Sistemdeki Çift Kuvvet Elemanları (ÇKE) tespit edilir.

2- Sistemin bütünü, belli bir kısmının veya belli elemanlarının SCD si çizilir.

3- SCD lere uygulanacak denge denklemleri ile bilinmeyen kuvvetler belirlenir.

5.4 Çift Kuvvet Elemanı (ÇKE):

Problemleri çözerken başlangıçta Çift Kuvvet Elemanlarını tespit etmek son derece önemlidir. Aksi halde kuvvetler bulunamaz.

Çift Kuvvet Elemanı Nedir*?*

Cevap: *Sadece ve sadece 2 noktasından tekil kuvvete maruz kalan elemanlardır.*

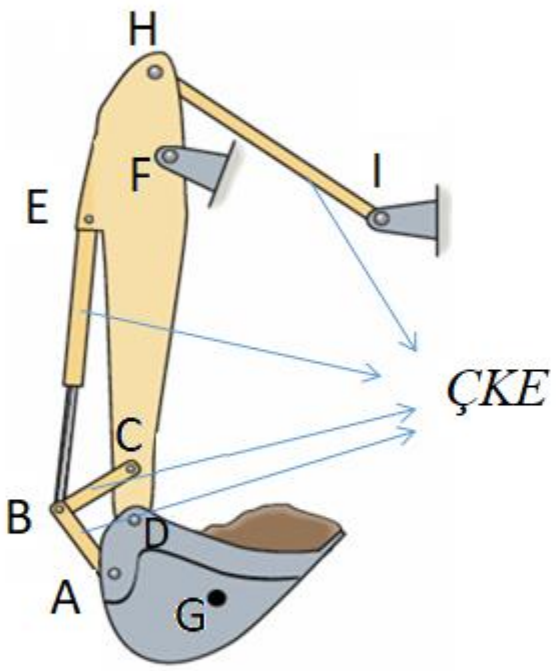
Bu kuvvetler dış kuvvetler olabileceği gibi bağlantı noktalarında oluşan tepki kuvvetleri de olabilir.

Sonuçta çift kuvvet elemanlarının iki özelliği:

- *Bağlantı sayısı + bağlantı harici kuvvet sayısı = 2 dir.*
- *Ağırlıkları ve bağlantılardaki tepki momentleri ihmal edilir. (Aksi söylenmedikçe bu ihmaller yapılır.)*

Ç.K.E için bir örnek

5.4.1 Çift Kuvvet Elemanı (ÇKE) Örnekleri:



Şekildeki kepçe sisteminde, EB, CB, AB, IH çift kuvvet elemanlarıdır. Çünkü her birisi için,

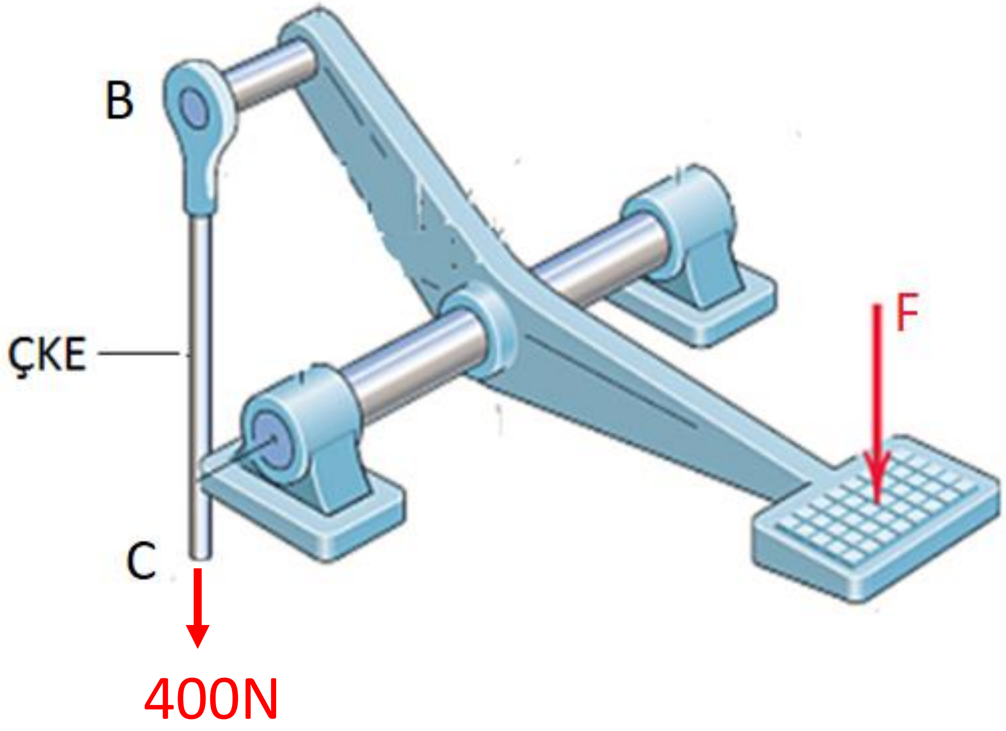
Bağlantı sayısı = 2

Bağlantı harici dış kuvvet sayısı = 0

+
___

Toplam: = 2

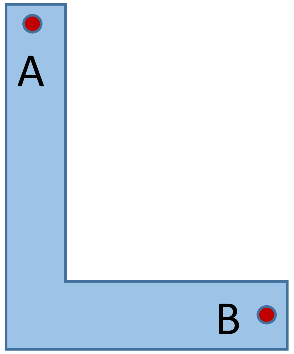
Hatırlatma: Kafes sistemlerdeki tüm çubuklar çift kuvvet elemanıdır. Nedenini aranızda tartışınız.



Şekildeki pedal mekanizmasında BC kolu çift kuvvet elemanıdır. Çünkü;

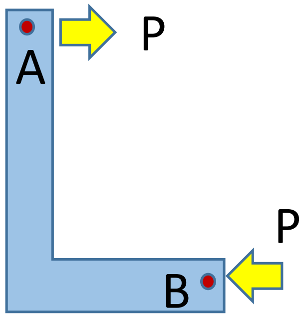
Bağlantı sayısı (B noktası)	= 1
Bağlantı harici dış kuvvet sayısı (C noktasındaki P kuvveti)	= 1
	+
Toplam:	= 2

5.4.2 Çift Kuvvet Elemanlarının Denge Şartı:



Soru: L şeklindeki elemanın sadece A ve B noktalarına 2 tekil kuvvet uygulanacaktır. Başka bir bağlantı noktası da yoktur. O halde bu bir çift kuvvet elemanıdır. Bu elemanın dengesi aşağıdaki durumlardan hangisinde sağlanır?

a-)



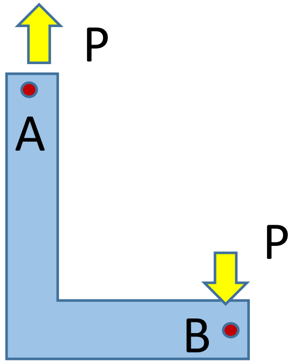
$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

$\sum M_A \neq 0$

Dengede değil

b-)



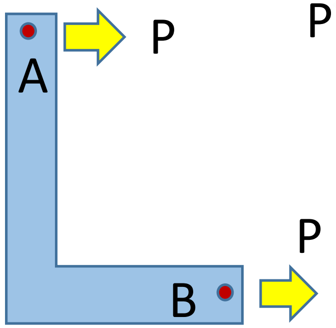
$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

$\sum M_A \neq 0$

Dengede değil

c-)



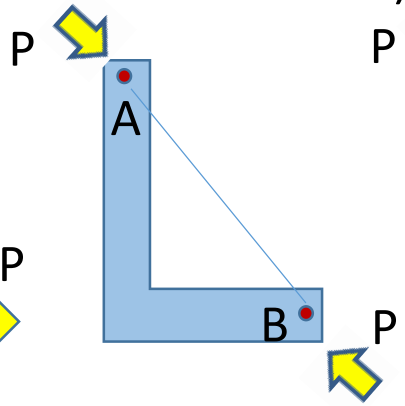
$\sum F_x \neq 0$

$\sum F_y = 0$

$\sum M_A \neq 0$

Dengede değil

d-)



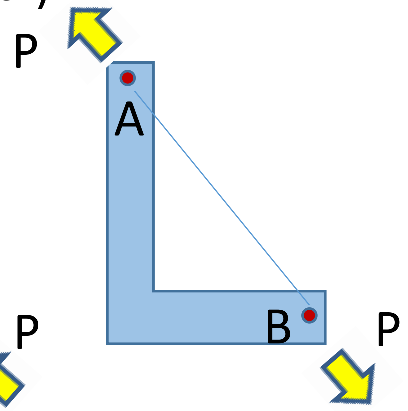
$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

$\sum M_A = 0$

Dengede

e-)



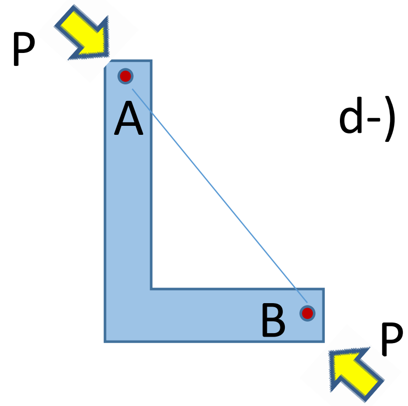
$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

$\sum M_A = 0$

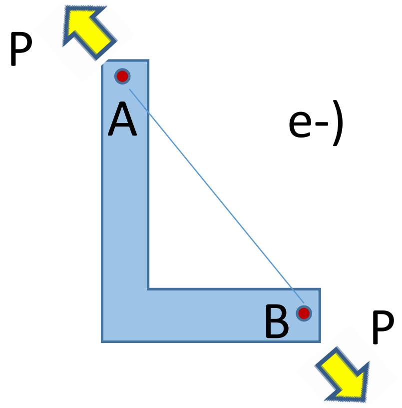
Dengede

Denge ancak d ve e şıklarında sağlanır.
O halde çift kuvvet elemanlarının dengede olmasının tek şartı vardır:



ÇKE için Denge Şartı: Etki eden kuvvetler, etkime noktalarını birleştiren doğrultu üzerinde, eşit şiddette ve zıt yönde olmalıdır.

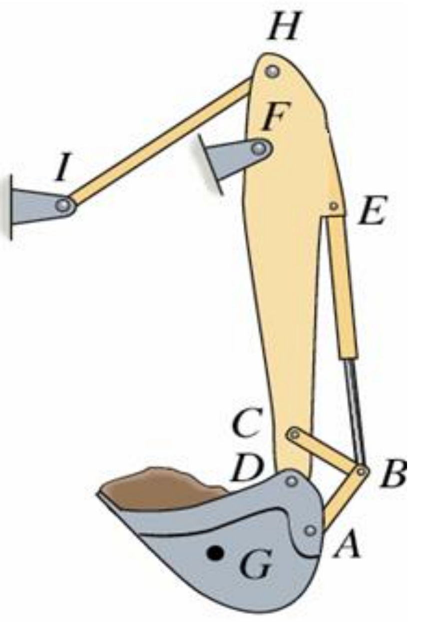
ÇKE de kuvvetleri yönü:
Yukarıdaki şart sağlanacak şekilde, **kuvvetlerin yönü** birbirlerine doğru (d şekli) ya da dışa doğru (e şekli) yerleştirilirler. Ancak hesaplamalar sonucu işareti negatif çıkarsa, seçtiğimiz yönün tersine imiş denir.

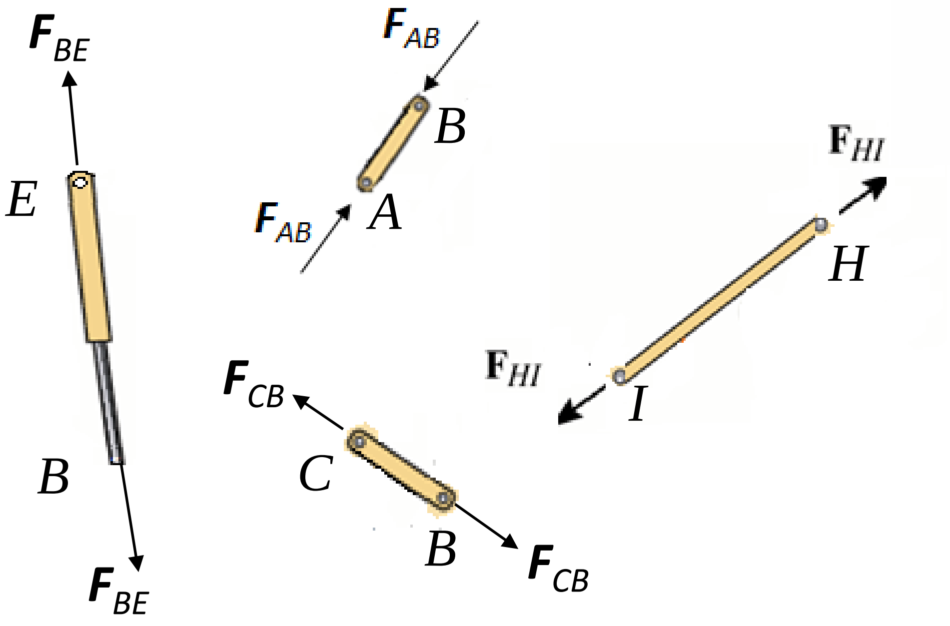


Diğer sayfadan itibaren gösterilen SCD örneklerinde şu noktalara dikkat edin:

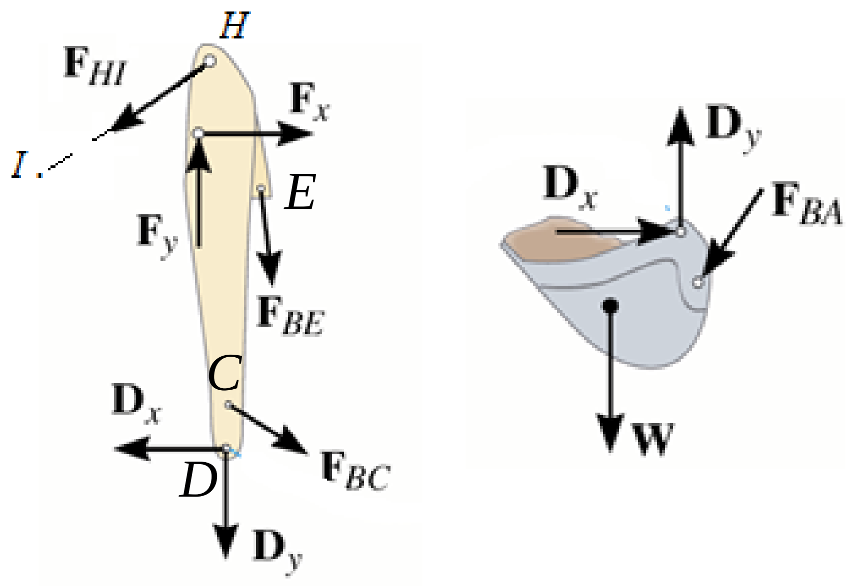
1. *Sistemdeki ÇKE leri öncelikle görmeye çalışın.*
2. *Çift kuvvet elemanlarında, etki eden kuvvetlerin etkime noktalarını birleştiren doğrultu üzerinde, eşit şiddette ve zıt yönde olduğunu, (aksi halde dengede olamayacağını),*
3. *Bir kuvvet bir noktaya yerleştirilirken ilk kez keyfi yönde, 2nci kez yerleştirilirken aynı noktada ve diğer cisimde olmak üzere ilkine göre zıt yönde yerleştirildiğini mutlaka fark edin.*

(SCD örneği)-1





Çift Kuvvet Elemanlarının SCD leri

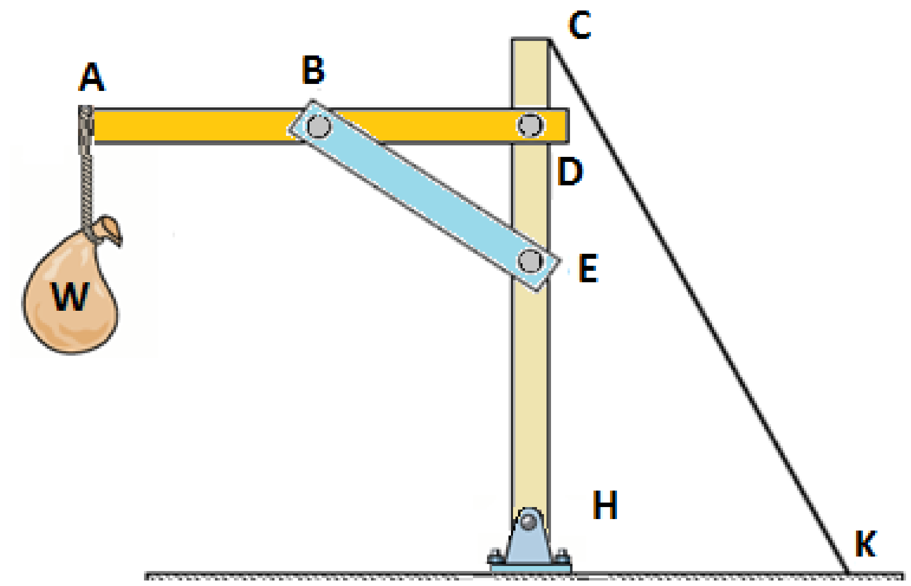


Diğer Elemanların SCD leri

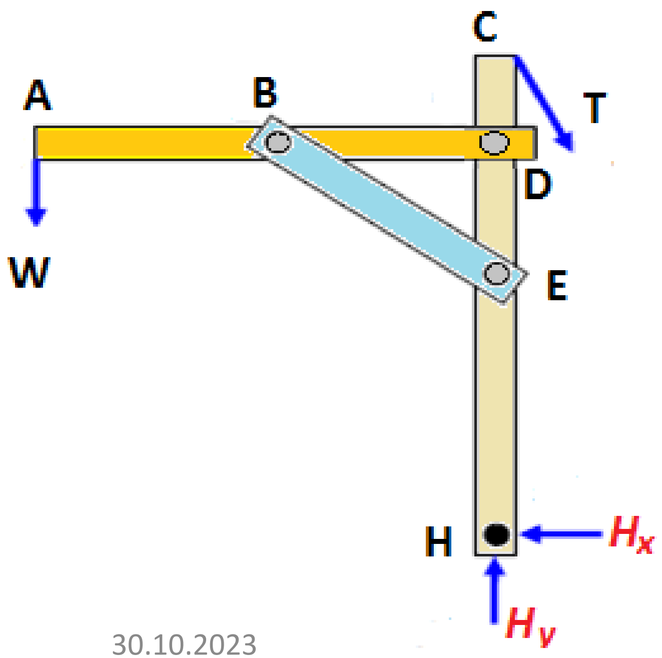
(SCD örneği)-2

Video 5 – örnek 1

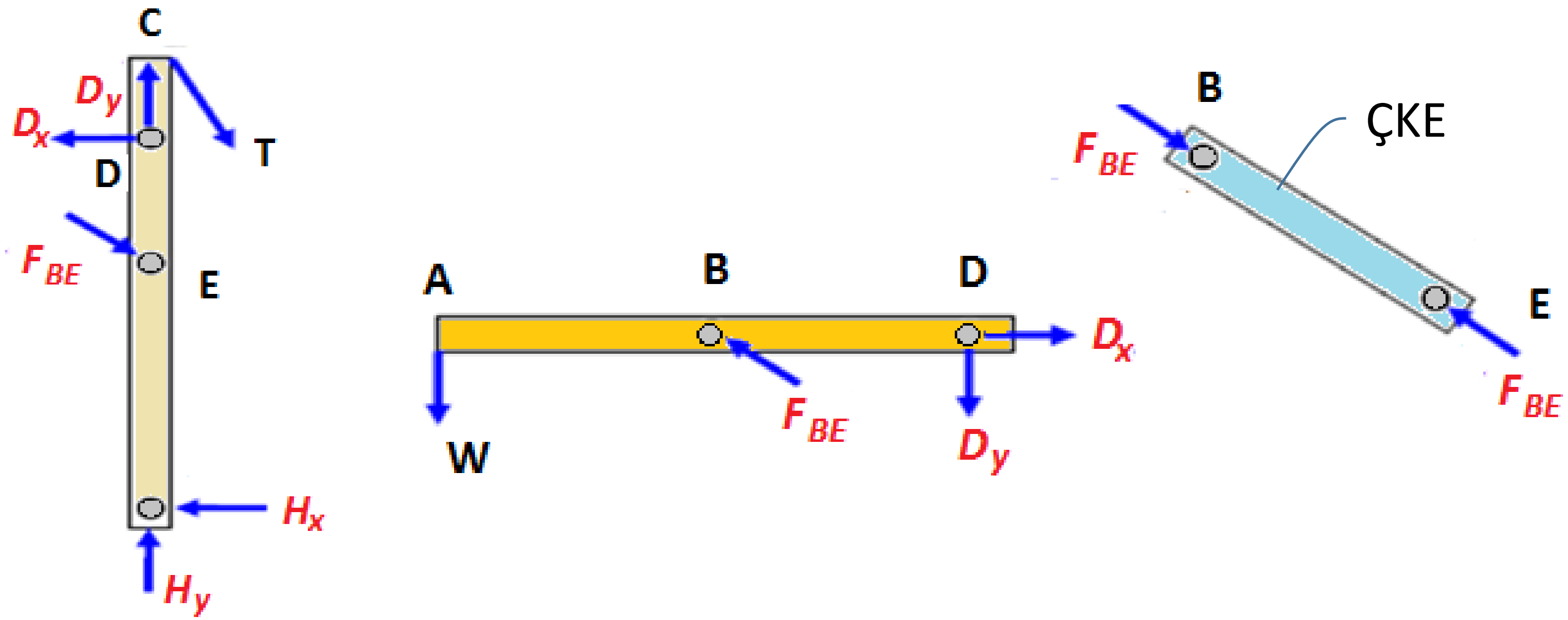
Şekildeki denge halindeki yapıda, tüm sistemin ve her bir elemanın (parçanın) Serbest Cisim Diyagramının ayrı ayrı çiziniz.



Tüm sistemin SCD si



Her bir Elemanın SCD si



Şimdi Çerçeve Sistemler ve Basit Makinalarla ilgili **Örnek Denge Problemleri** Çözülecektir.

Öncelikle Adımlarımızı tekrar hatırlayalım:

Çerçeve sistemler ve basit makinalarda kuvvetleri bulmak için 3 adımımız vardı:

1.Adım: ÇKE[(1)] lerin tespiti

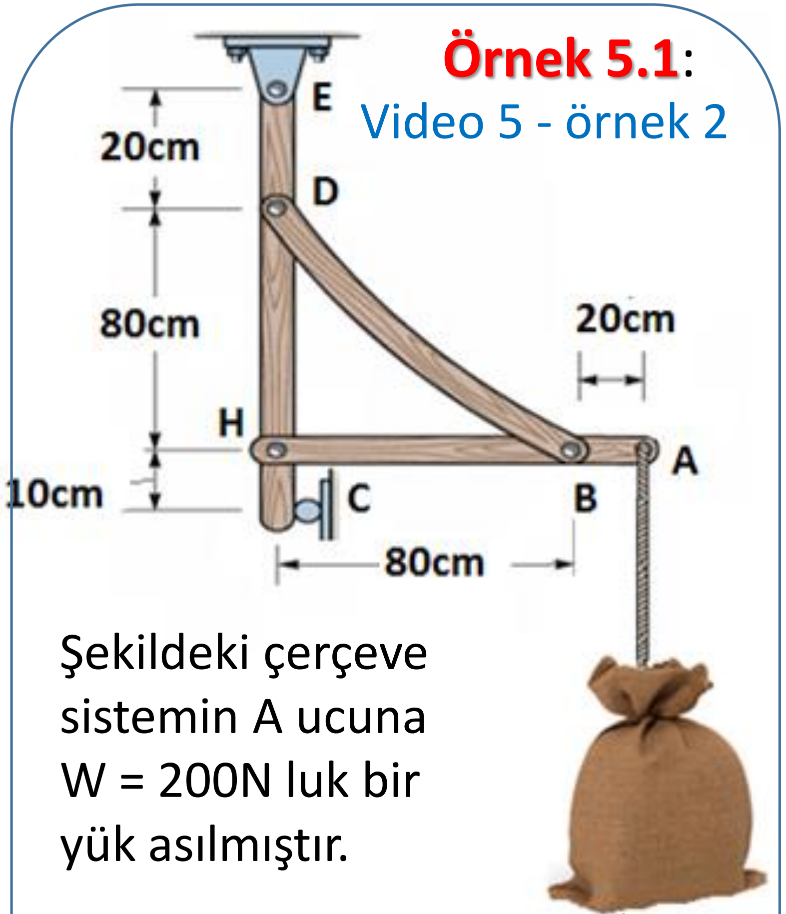
2.Adım: SCD[(2)] lerin çizimi.

3.Adım: Denge Denklemlerinin Uygulanması

Şu noktalar da problemleri çözmede ve anlamada size faydası olacaktır:

- ÇKE'lerin SCD' leri, kuvvetleri hesaplarken işimize yaramaz.
- ÇKE olmayan elemanların SCD leri bizi sonuca götürür.
- İncelediğimiz problemler düzlem problemler olduğu için 3.3 denklemleri ile skaler çözüm tercih edilecektir.

(1) ÇKE: Çift Kuvvet Elemanı, (2) SCD: Serbest Cisim Diyagramı



Örnek 5.1:
Video 5 - örnek 2

Şekildeki çerçeve sistemin A ucuna W = 200N luk bir yük asılmıştır.

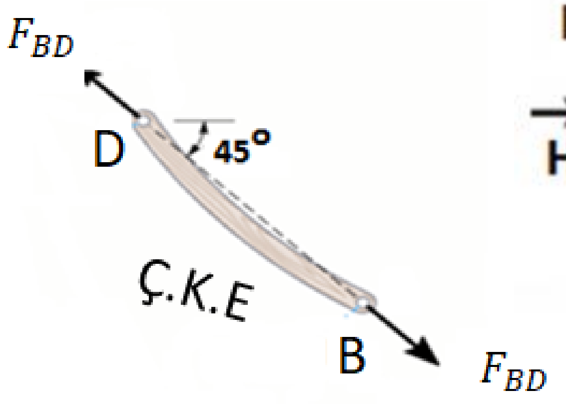
Buna göre, D pimine düşen kuvveti hesaplayınız.

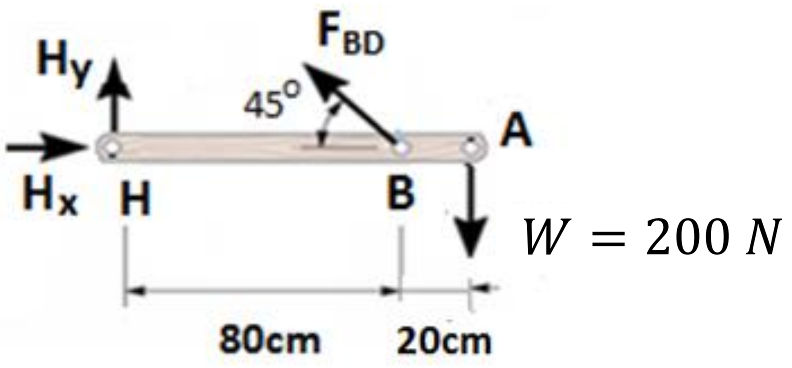
Çözüm:

1.Adım: ÇKE'lerin tespiti:

BD çift kuvvet elemanıdır. Çünkü sadece 2 noktadan tekil kuvvete maruzdur. FBD kuvvetinin BD doğrultusunda olduğuna dikkat ediniz.

2.Adım:
SCD'lerin Çizi



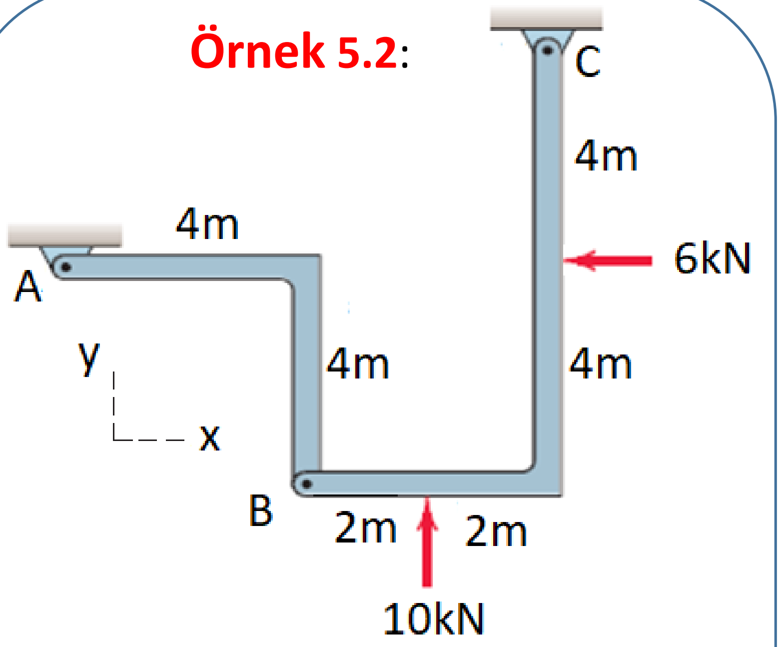


3.Adım: Denge Denklemlerinin Uygulanması: $\sum M_H = 0$

$-200(100) + F_{BD}.Sin45^o\ (80) = 0 \qquad \rightarrow F_{BD} = 353.55\ N$

F_{BD}'nin ve diğer kuvvetlerin yönlerini niçin bu şekilde aldık? sorusuna şu ana kadar öğrendiğiniz bilgilerle cevap verebilmeniz gerekir.

Örnek 5.2:



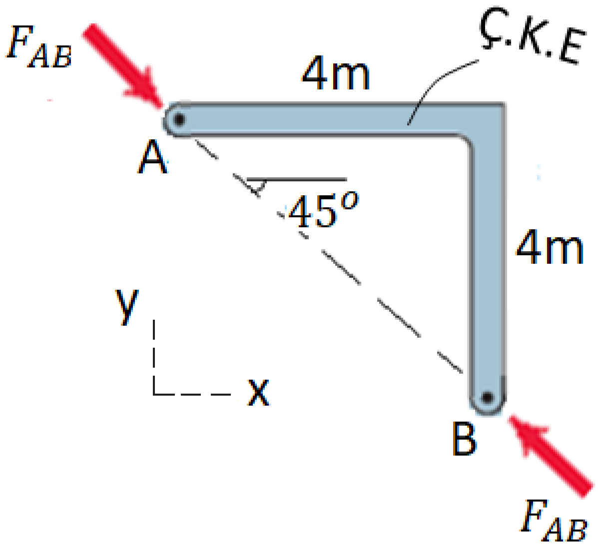
Şekildeki çerçeve sistemde A, B ve C bağlantılarında ortaya çıkan kuvvetleri hesaplayınız.

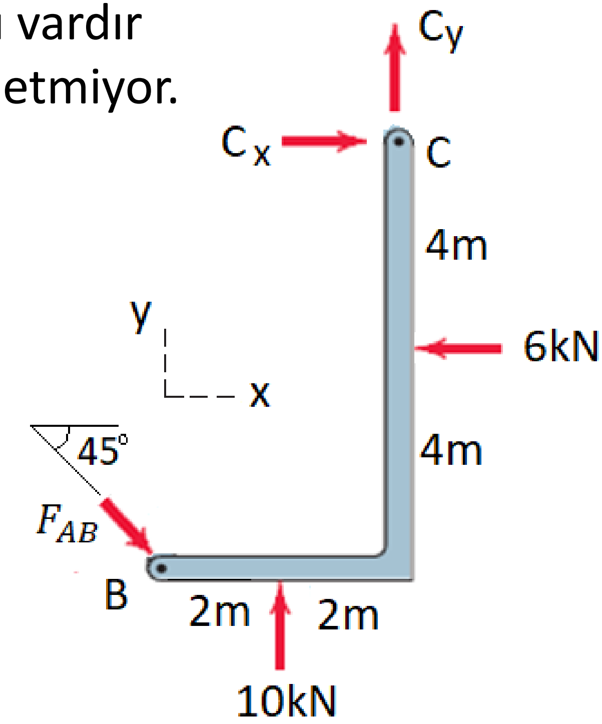
Çözüm:

1.Adım: ÇKE'lerin tespiti:

AB çift kuvvet elemanıdır. Çünkü 2 bağlantı noktası vardır ve bağlantı haricinde başka bir kuvvet üzerine etki etmiyor. Ağırlığı da ihmal ediliyor.

2.Adım:
SCD' lerin Çizimi



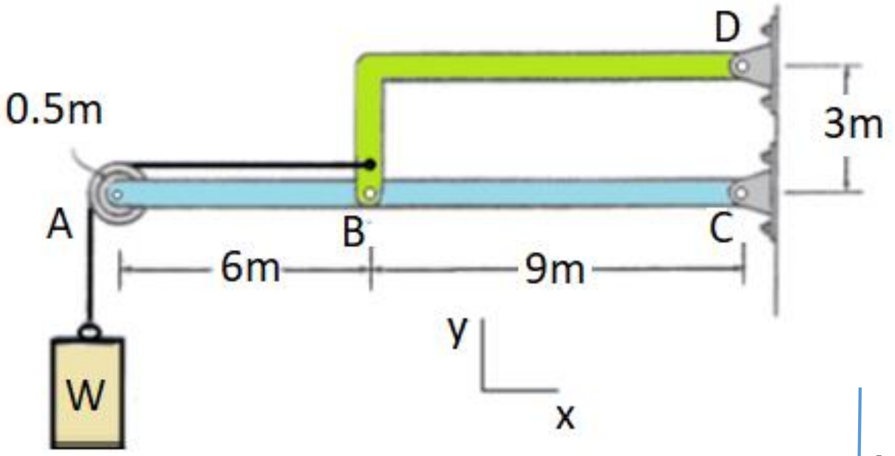


3.Adım: CB çubuğuna Denge Denklemlerinin Uygulanması:

$$\sum M_C = 0 \qquad \rightarrow F_{AB}\,.Cos45^o\ x\ 8 + F_{AB}\,.Sin45^o\ x\ 4 - 10\ x\ 2 - 6\ x\ 4 = 0 \qquad \rightarrow F_{AB} = 5.18\ N$$

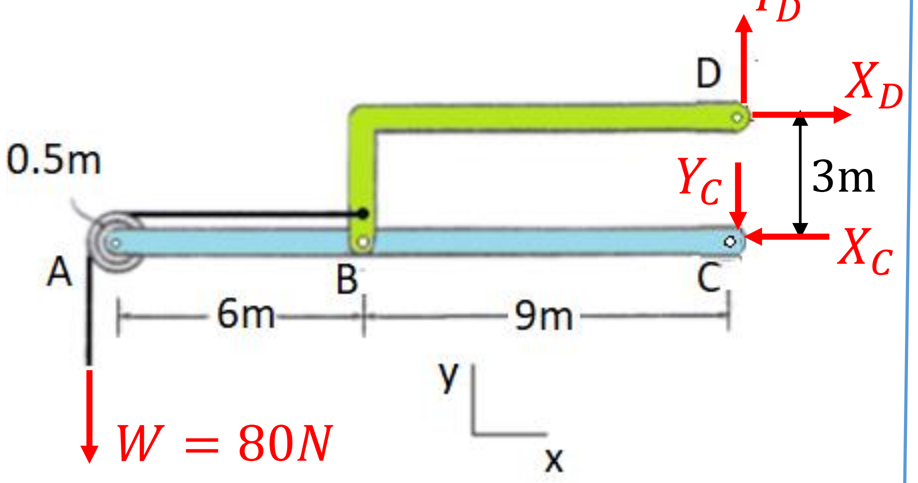
$$\sum F_x = 0 \qquad \rightarrow F_{AB}\,.Cos45^o - 6 + C_x = 0 \qquad \rightarrow C_x = 2.33\ N$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \rightarrow -F_{AB}\,.Sin45^o + 10 + C_y = 0 \qquad \rightarrow C_y = -6.33\ N$$



Örnek 5.3 Şekildeki Sistemde A makarasından geçirilmiş ipin ucuna W=80N luk bir ağırlık asılmıştır. Sistem dengede olduğuna göre B ve C pimlerinde ortaya çıkan kuvvetleri hesaplayınız. (Cevaplar: B=359N, C=417N)

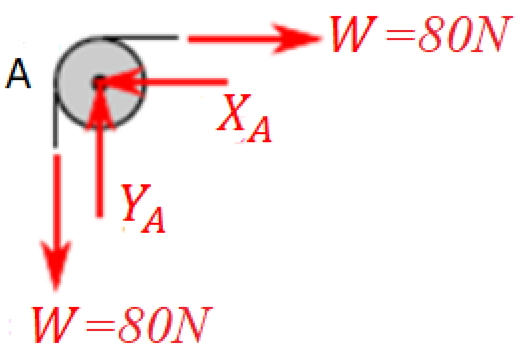
Tüm sistemin dengesinden:



$$\sum M_D = 0 \rightarrow 80(15.5) - X_C(3) = 0$$

$$\rightarrow X_C = 413.3N$$

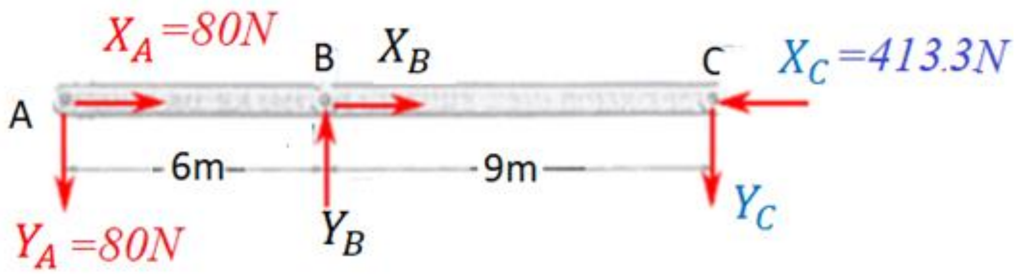
Makaranın dengesinden:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow X_A = 80N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Y_A = 80N$$

ABC yatay çubuğunun dengesinden:



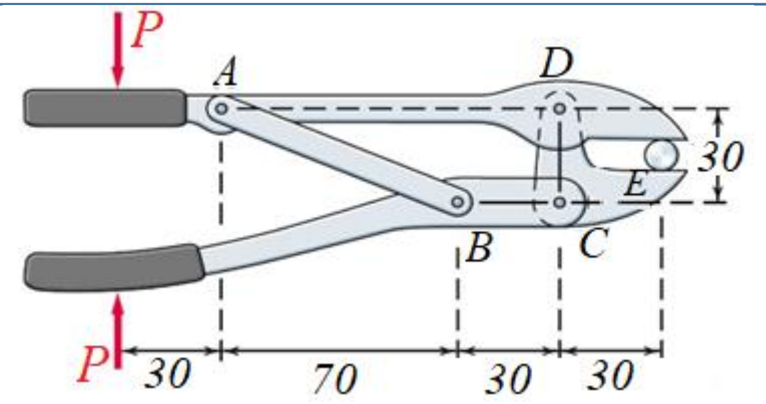
$$\sum M_B = 0 \rightarrow 80(6) - Y_C(9) = 0 \rightarrow Y_C = 53.3N$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 80 + X_B - X_C = 0 \rightarrow X_B = 333.3N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Y_B - 80 - Y_C = 0 \rightarrow Y_B = 133.3N$$

$$B = \sqrt{{X_B}^2 + {Y_B}^2} \cong 359N$$

$$C = \sqrt{{X_C}^2 + {Y_C}^2} \cong 417N$$

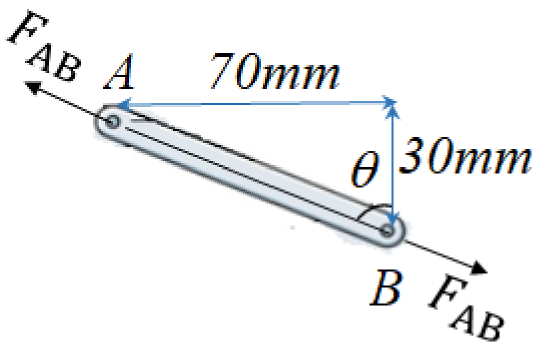


Örnek 5.4 (Vize Sorusu-2016) Şekildeki pensede P=50N luk el kuvveti sonucu E deki cisme ne kadarlık bir sıkma kuvveti gelir? Hesaplayınız. (Boyutlar milimetredir.)

Cevap: 505.53N

Çözüm:

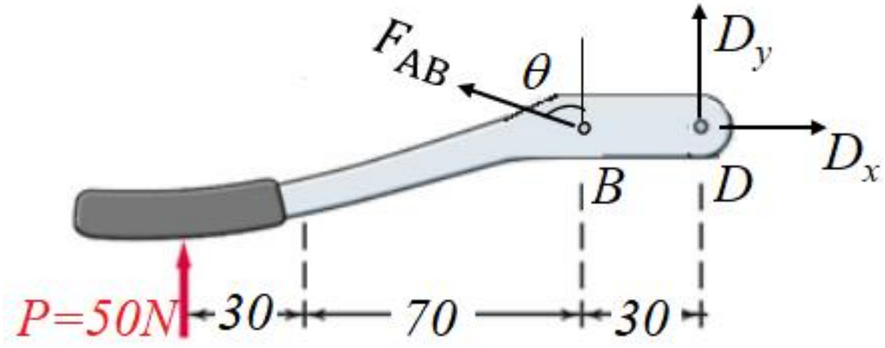
Ç.K.E : AB çubuğu



$$tg\theta = \frac{70}{30}$$

$$\rightarrow \theta = 66.8^0$$

Alt kol

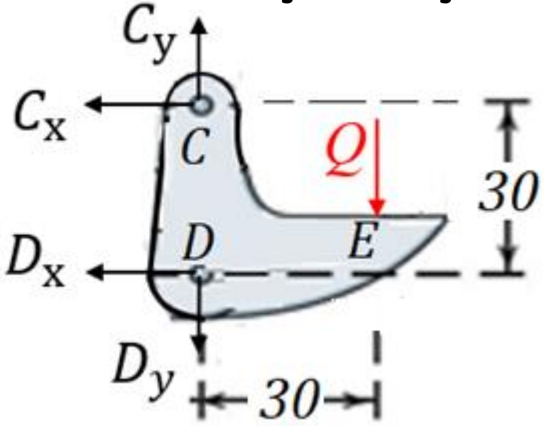


$$\sum M_B = 0 \rightarrow -50(100) + D_y(30) = 0 \rightarrow D_y = 166.67\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB}\cos(66.8^0) + D_y + \text{P} = 0 \rightarrow F_{AB} = -550\text{N}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{AB}\sin(66.8^0) + D_x = 0 \rightarrow D_x = -505.53\text{N}$$

Sıkıştırma Çenesi



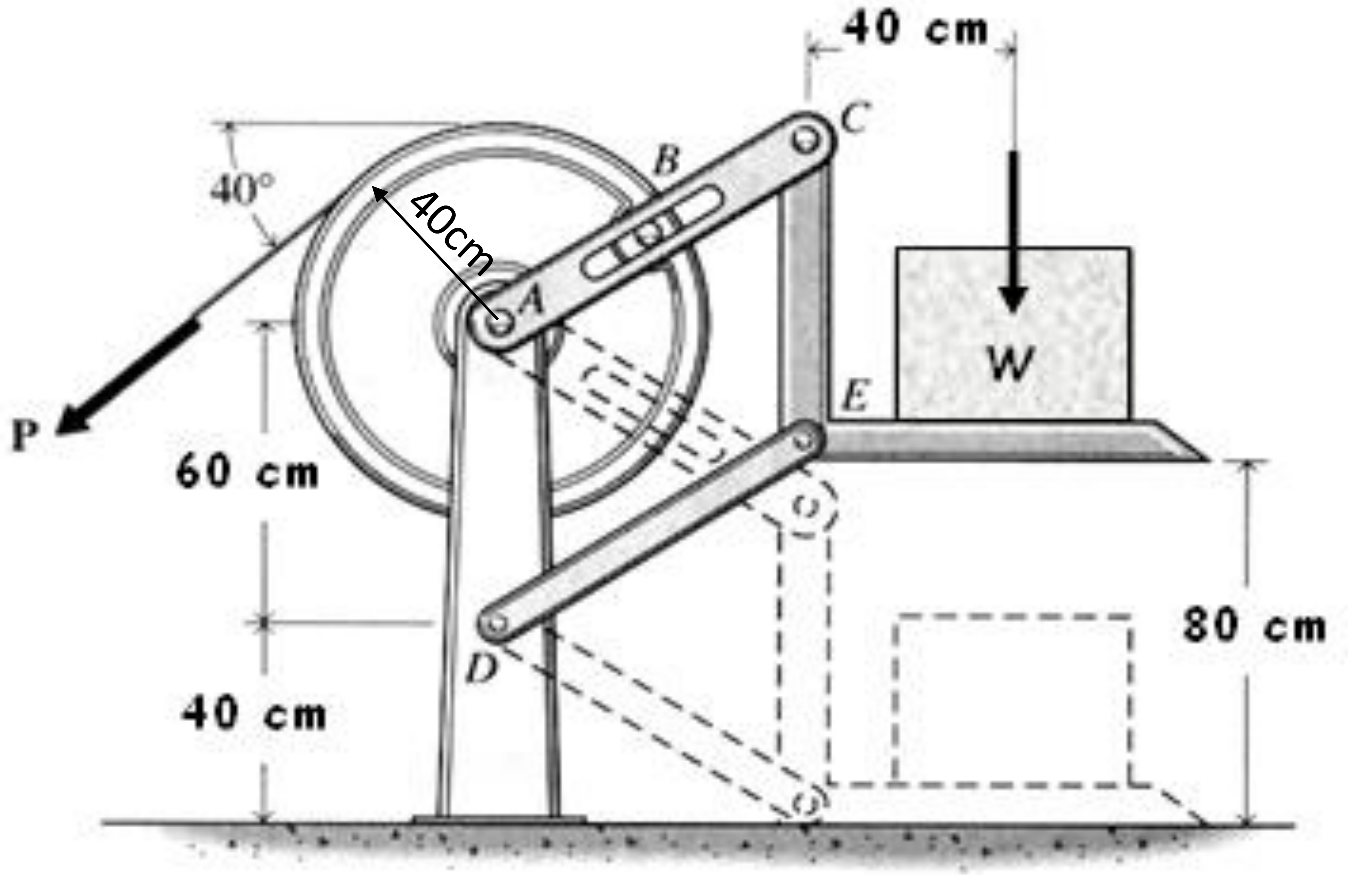
$$\sum M_c = 0$$

$$-D_x(30) - \text{Q}(30) = 0$$

$$\rightarrow \text{Q} = -D_x$$

$$\rightarrow \text{Q} = 505.53N$$

Örnek 5.5 2010/Final-Makine Muh. Şekildeki mekanizma yükü yukarı kaldırırken onun yatay konumunu korumak amacıyla tasarlanmıştır. 40 cm yarıçaplı kasnağın dış çevresinde bulunan pim, ABC kolu üzerindeki kanalda sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. ABC ve DE kollarının her birinin uzunluğu 80 cm olup yukarı kaldırılan yükün ağırlığı 1200 N'dur. Mekanizma, kasnağa sarılı halatın çekilmesiyle yukarı doğru kaldırılmaktadır. Yükün yerden 80 cm yukarıda şekildeki gibi dengede tutulması için halata uygulanması gerekli P kuvvetini ve ABC koluna etkiyen tüm kuvvetleri belirleyiniz.



AC=DE=80cm

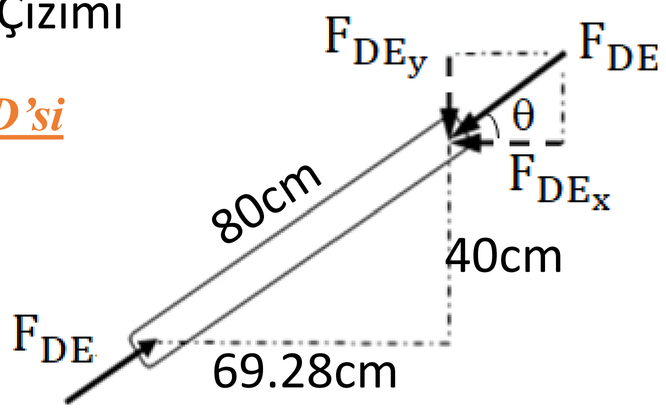
ÇÖZÜM

1.Adım: ÇKE'lerin tespiti:

Çift kuvvet elemanı: ED çubuğudur.

2.Adım: SCD'lerin Çizimi

ED Elemanının SCD'si



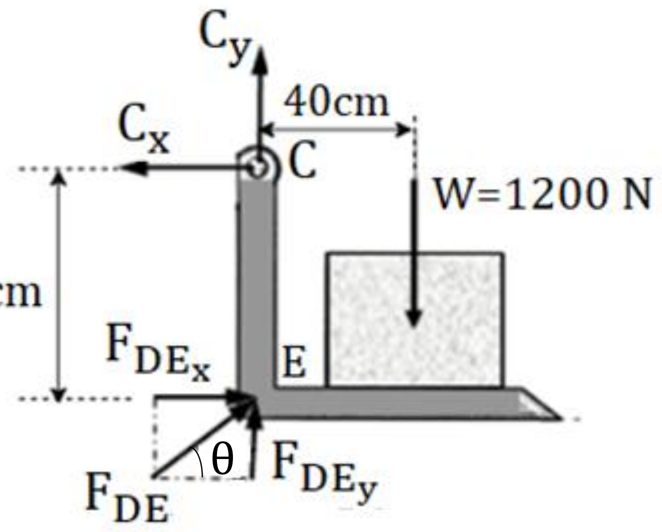
$$\sin\theta = \frac{40}{80}$$

$$\rightarrow \theta = 30°$$

Platformun SCD'si

şekilden hesaplanır.

$CE = 60\text{cm}$



3.Adım:

Platform için Denge Denklemlerinin Uygulanması:

$$\sum M_C = 0$$

$$\rightarrow 1200(40) - F_{DE_x}(60) = 0 \qquad \rightarrow F_{DE_x} = 800\text{ N}$$

$$\tan\theta = \frac{F_{DE_y}}{F_{DE_x}} \quad \rightarrow F_{DE_y} = 800\tan 30° \qquad \rightarrow F_{DE_y} = 461.88\text{ N}$$

$$F_{DE} = \sqrt{(F_{DE_x})^2 + (F_{DE_y})^2} \qquad \rightarrow F_{DE} = 923.76\text{ N}$$

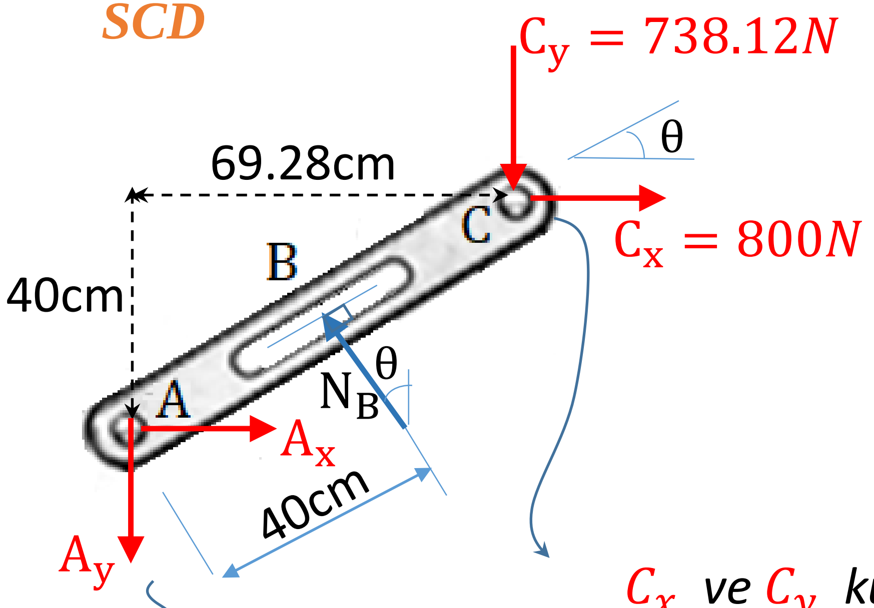
$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad -C_x + F_{DE_x} = 0 \qquad \rightarrow C_x = 800\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad C_y + F_{DE_y} - 1200 = 0 \quad \rightarrow C_y = 738.12\text{N}$$

$$C = \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2} \qquad \rightarrow C = 1088.50\text{ N}$$

ABC Elemanı

SCD



Denge Denklemlerinin Uygulanması

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \ C_y\,(69.28) + C_x(40) - N_B(40) = 0 \rightarrow \ N_B = 2078.42\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_x = 0 \ \rightarrow \ A_x + C_x - N_B \sin 30° = 0 \ \rightarrow \ A_x = 239.21\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_y = 0 \ \rightarrow \ -A_y - C_y + N_B \cos 30° = 0 \rightarrow \ A_y = 1061.84\ \mathrm{N}$$

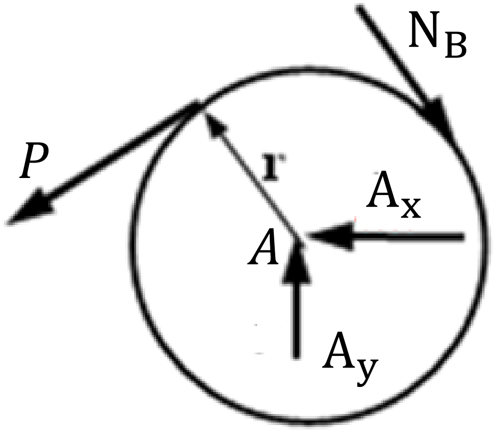
$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \qquad \rightarrow A = 1088.45\ \mathrm{N}$$

C_x ve C_y kuvvetleri 2nci kez yerleştirildikleri için üstteki yönlerde olması zorunludur.

A_x ve A_y İlk kez yerleştirildikleri için yönler keyfi seçilmiştir.

Kasnak

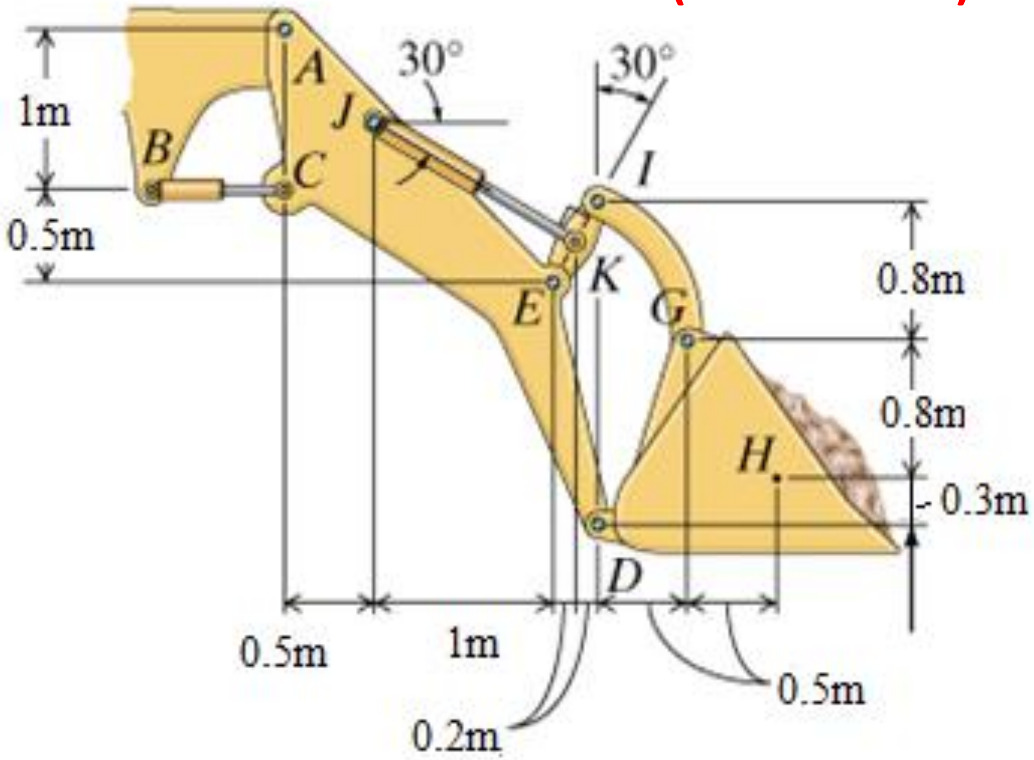
SCD



$$\sum M_A = 0 \ \rightarrow \ P.r - N_B.r = 0$$

$$\rightarrow P = N_B = 2078.42\ N$$

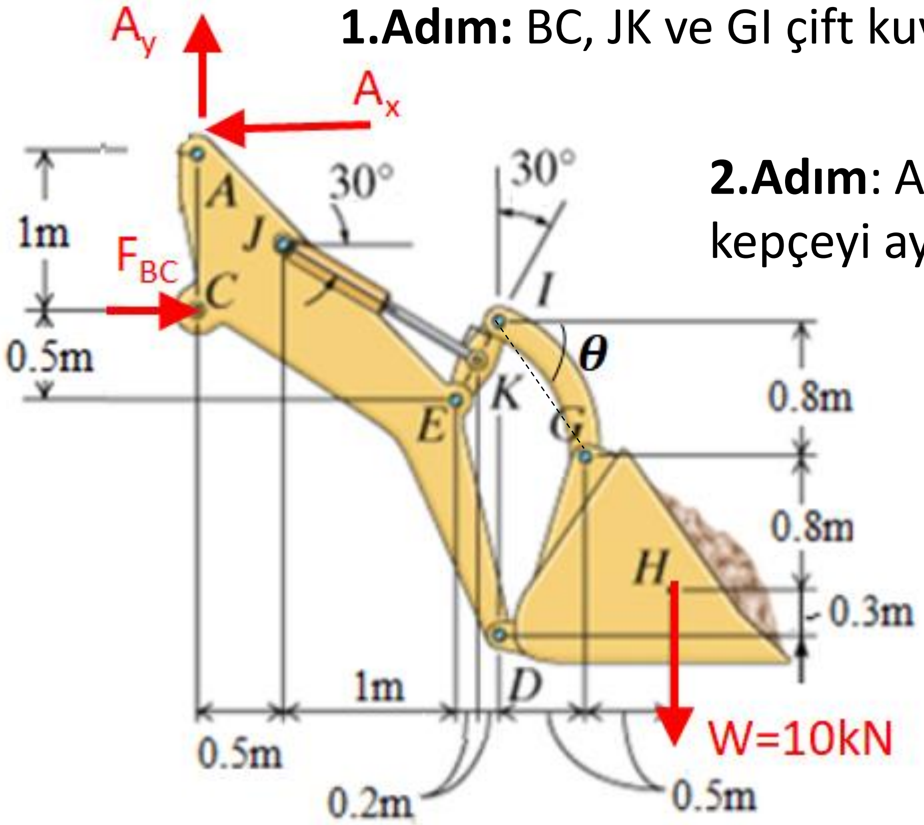
Örnek 5.6 (Final Sorusu)



Şekildeki sistemde kepçe 10kN luk yükü kaldırmaktadır. H noktası yükün ağırlık merkezidir ve sistem görülen konumda dengededir. Buna göre; BC ve JK hidrolik silindirlerindeki kuvvetleri ve A pimindeki tepki bileşenlerini hesaplayınız.

Çözüm:

1.Adım: BC, JK ve GI çift kuvvet elemanlarıdır.



2.Adım: A ve B bağlarından kepçeyi ayırıp SCD sini çizelim

$$tan\theta = \frac{0.8}{0.5}$$

$$\rightarrow \theta = 58^0$$

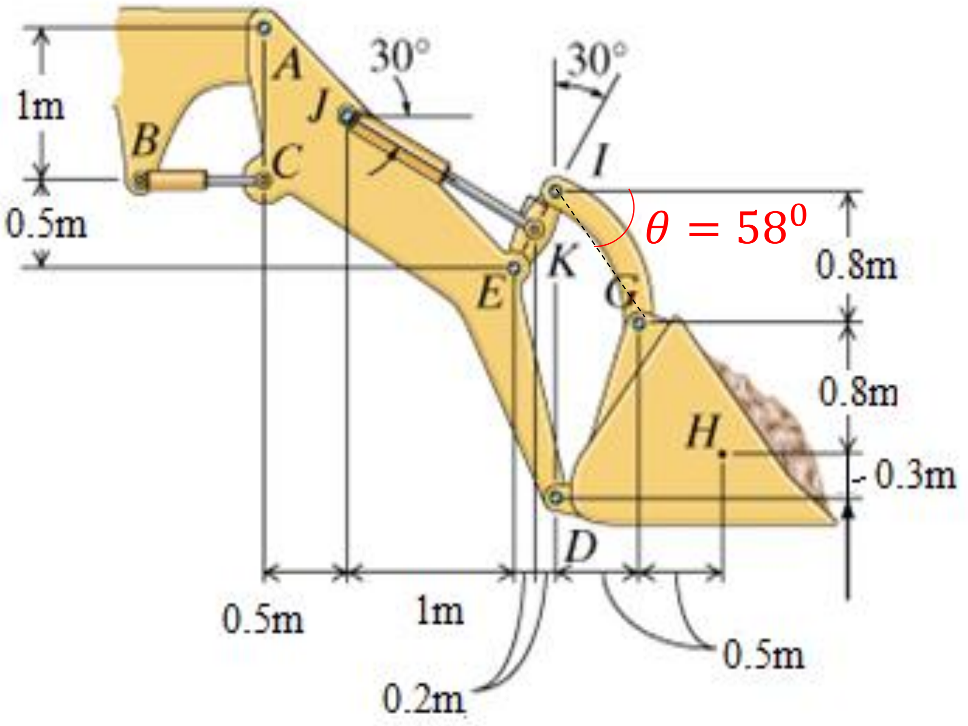
3.Adım: Denge Denklemleri

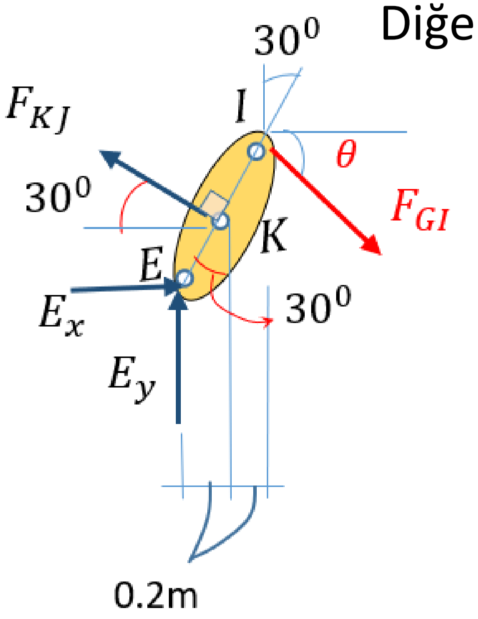
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow F_{BC}(1) - 10(2.9) = 0 \quad \rightarrow F_{BC} = 29kN$$

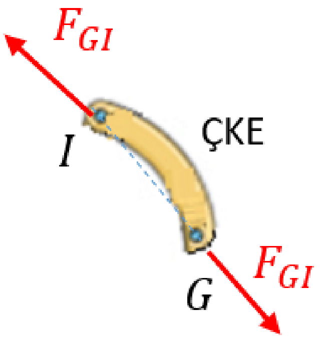
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{BC} - A_x = 0 \quad \rightarrow A_x = F_{BC} = 29kN$$

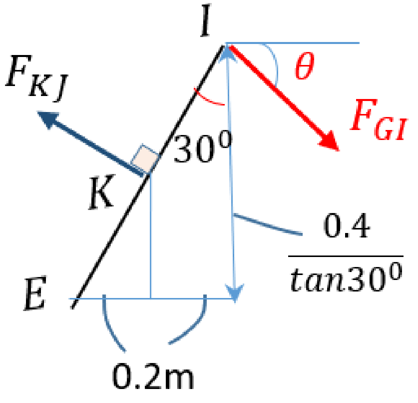
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - W = 0 \quad \rightarrow A_y = W = 10kN$$

Diğer Elemanlar için inceleme yaparsak:



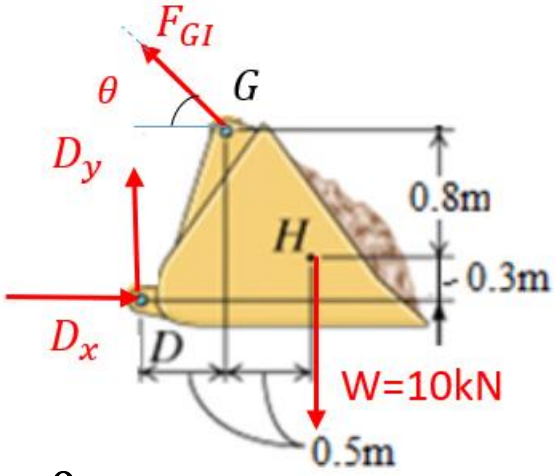






Kepçe için:

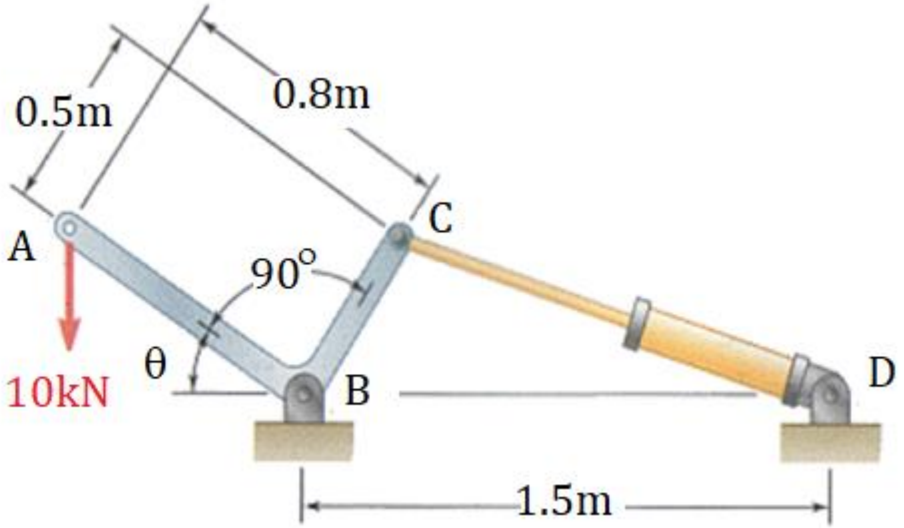
$$\Sigma M_D = 0 \quad \rightarrow F_{GI}\cos 58^0\,(1.1) + F_{GI}\sin 58^0\,(0.5) - 10(1) = 0 \quad \rightarrow F_{GI} = 9.93kN$$



$$EKI\ elemanı\ için:\ \Sigma M_E = 0 \quad \rightarrow \frac{F_{KJ}\overset{\overline{EK}}{(0.2)}}{sin30^0} - F_{GI}Cos58^0\left(\frac{0.4}{tan30^0}\right) - F_{GI}sin58^0(0.4) = 0$$

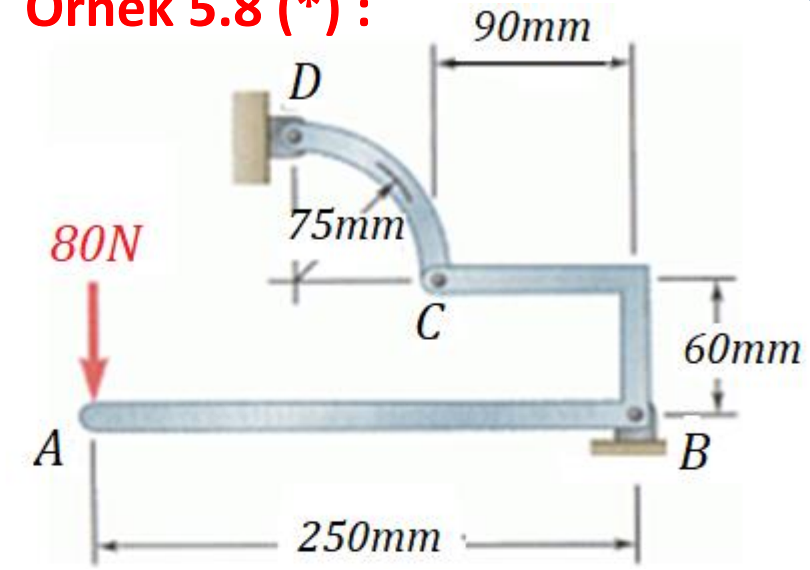
$$\rightarrow F_{KJ}0.4 - 0.706F_{GI} = 0 \quad \rightarrow F_{KJ}0.4 + (0.706)(9.93) \;= 0 \qquad \rightarrow F_{KJ} = 17.5kN$$

Örnek 5.7 (*): Şekildeki sistemde $\theta = 30^o$ ise, C piminin taşıyacağı kuvveti hesaplayınız.



Cevap: 14.11 kN

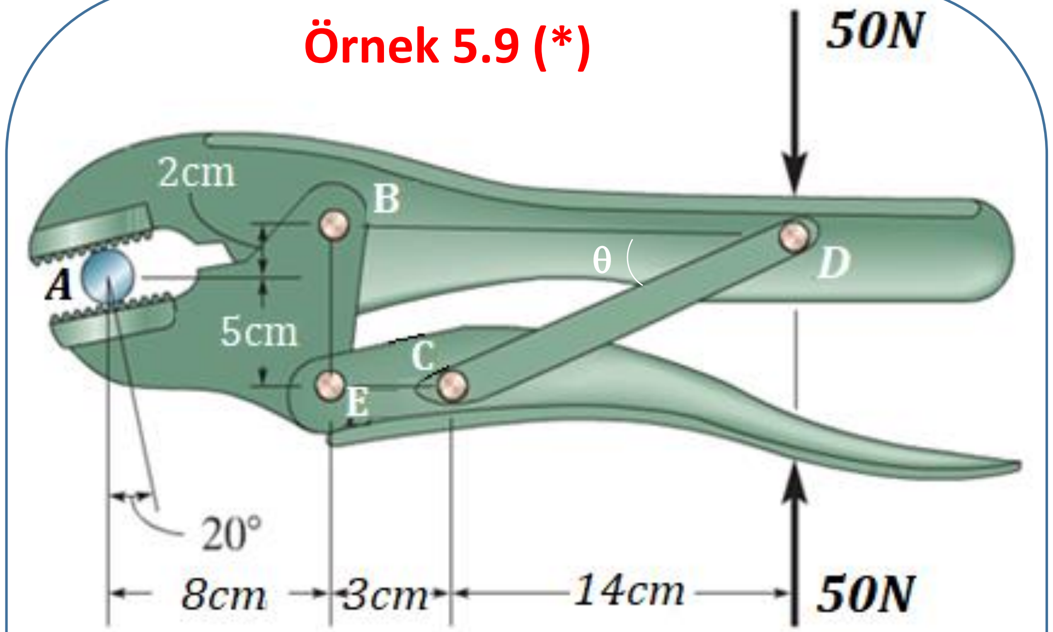
Örnek 5.8 (*) :



Şekildeki çerçeve sistemde, D ve B pimlerinde ortaya çıkan kuvvetleri hesaplayınız.

Cevap: B=888N, D=942.8N

Örnek 5.9 (*)

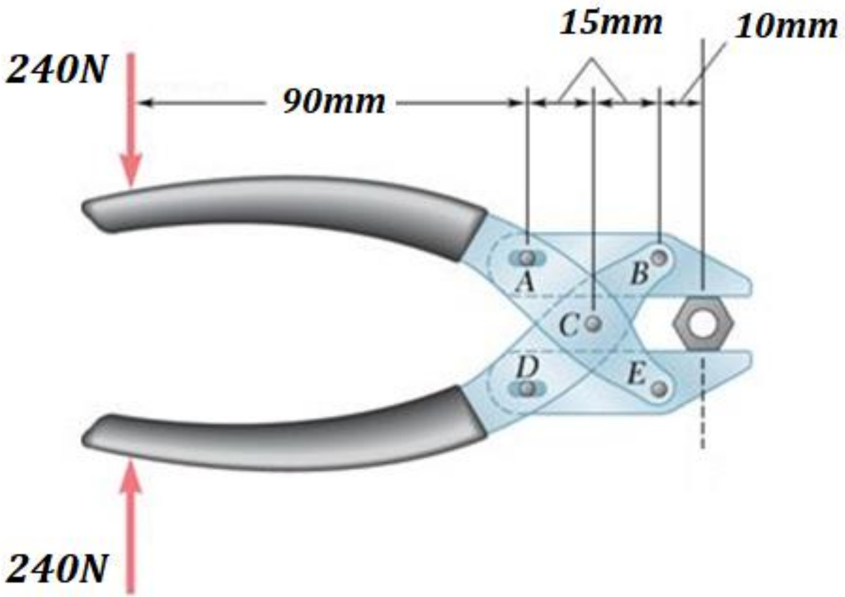


Şekildeki penseye uygulanan 50N luk el kuvveti sonucu, A cisminde ne kadarlık bir sıkma kuvveti oluşur? Hesaplayınız.

(A cisminin boyutlarını ihmal ediniz)

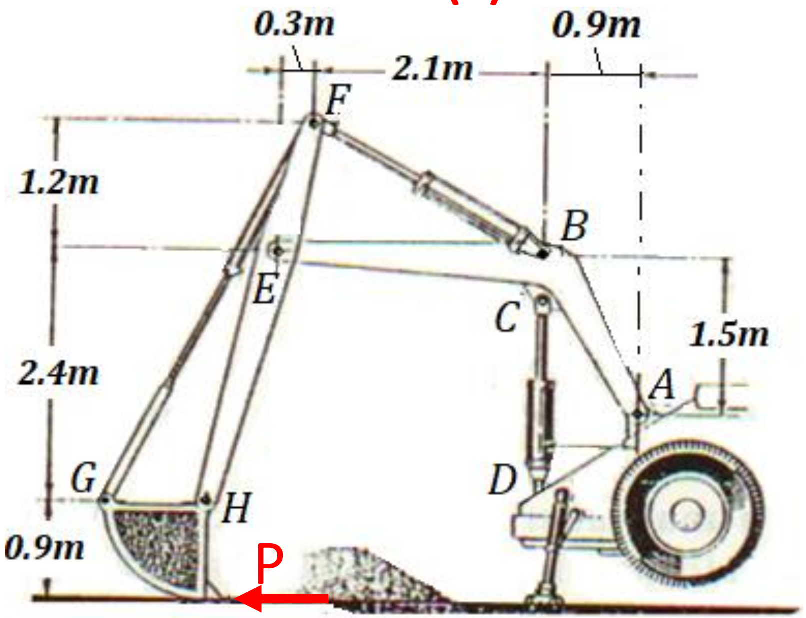
Cevap: 483.7N

Örnek 5.10



Şekildeki Penseye uygulanan 240N luk el kuvveti sonucunda, penseye sıkıştırılan somuna ne kadarlık bir sıkma kuvveti düşer? Sürtünmeleri ihmal ederek hesaplayınız.
(Cevap: 1680N)

Örnek 5.11 (*)

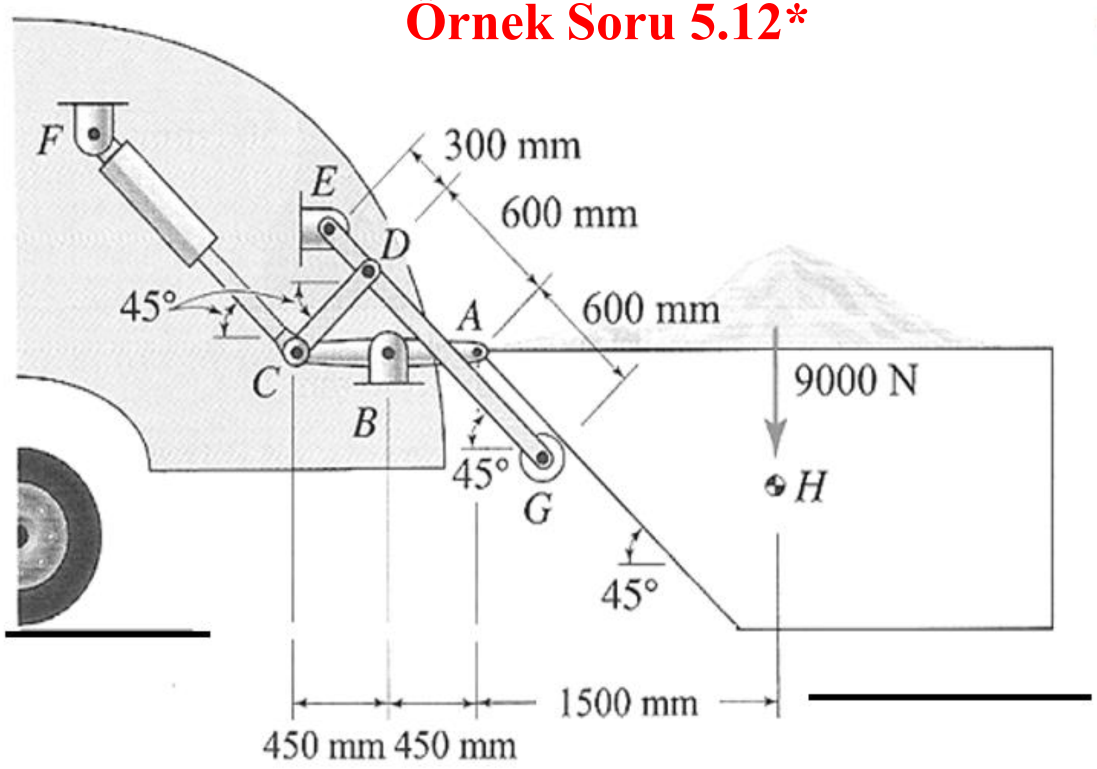


Şekildeki Kepçenin ucuna, zeminden P=20kN luk yatay kuvvet gelmektedir. Kepçenin hareketi, GF , BF ve DC hidrolik silindirleri ile kontrol edilmektedir. Buna göre, şekildeki denge konumu için C, E ve A pimlerinde ortaya çıkan kuvvetleri hesaplayınız. (Kepçedeki tüm elemanların ağırlıklarını ihmal ediniz.)

Cevap: $F_c = 39.87\ kN$, $F_E = 73.44\ kN$,

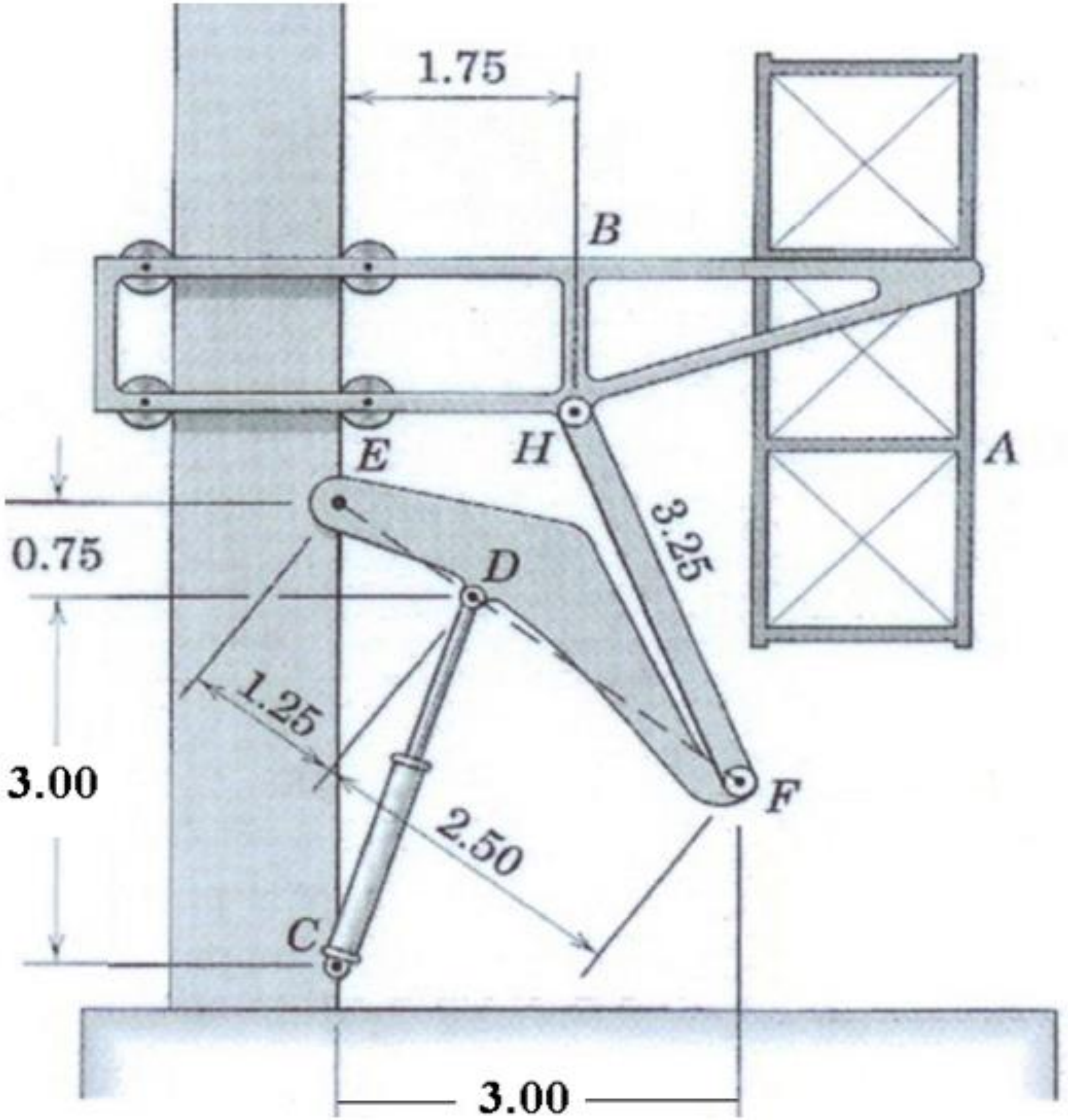
$F_A = 44.6\ kN$

Örnek Soru 5.12*



Şekildeki römork bağlantı mekanizmasında 9000 N luk yük sonucu CF hidrolik silindirinde ortaya çıkan kuvveti hesaplayınız. Sürtünmeleri ihmal ediniz. Pimler dönmeye izin verir ancak ötelenmeye izin vermez. G pimi bir tekerleğe bağlıdır. **Cevap**= 109.4kN

Örnek (Soru) 5.13 (*) (Final Sorusu): Şekildeki kaldırma mekanizması, 15 kN ağırlığındaki A parçasını yukarı doğru kaldırmaktadır. CD hidrolik silindirinden gelen itme kuvveti sayesinde, EDF parçası ve FH kolu gücü B platformuna iletmektedir. A parçası ile temasta olan 20kN ağırlığındaki B platformu soldaki tekerlekleri vasıtasıyla sabit kolon üzerinde ilerleyebilmektedir. Şekildeki konuma geldiğinde sistem durdurulmuş ve denge halinde kalmıştır. Bu konumda CD hidrolik silindirindeki, FH kolundaki ve E pimindeki kuvvetleri hesaplayınız. Diğer tüm parçaların ağırlıklarını ve sürtünmeleri ihmal ediniz. E pimi sadece dönmeye izin vermektedir. Boyutlar metredir.



Cevaplar: $F_{CD} = 60.8\ kN$, $E = 40.7$ kN

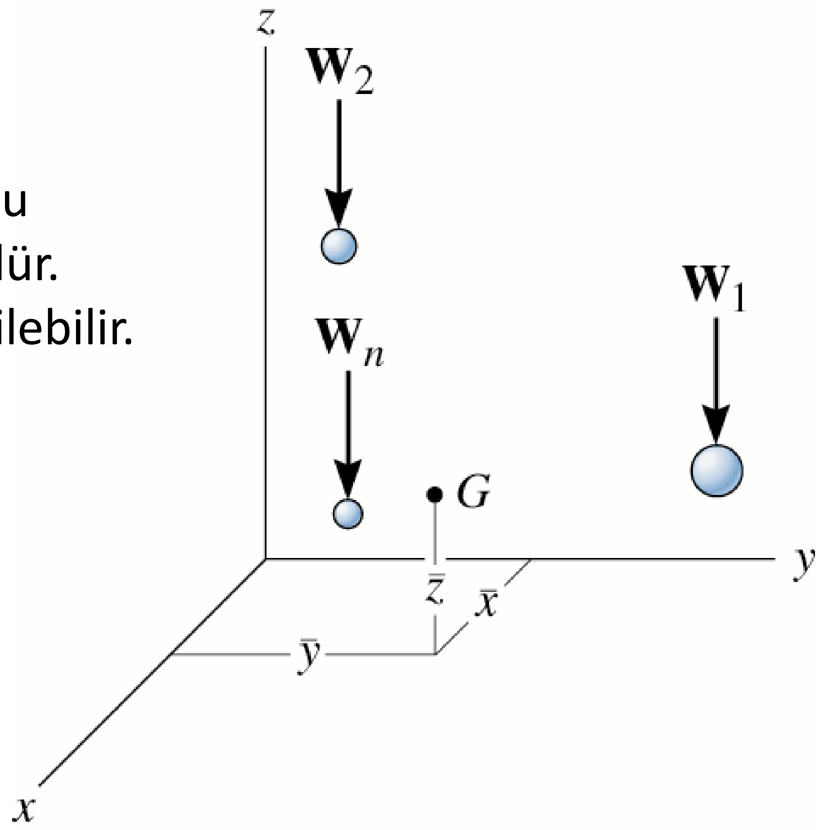
6.a AĞIRLIK MERKEZİ

HESAPLARI

Video 6.a

6a.1 AĞIRLIK MERKEZİ-GEOMETRİK MERKEZ

Tanım: Ağırlık merkezi G, parçacıklar sisteminde ağırlığın bileşkesinin olduğu noktadır. Parçacıların ağırlıklarının paralel kuvvet sistemleri olduğu düşünülür. Ağırlıklar merkezinin yeri, ağırlık sistemine konacak tek bir ağırlıkla değiştirilebilir.



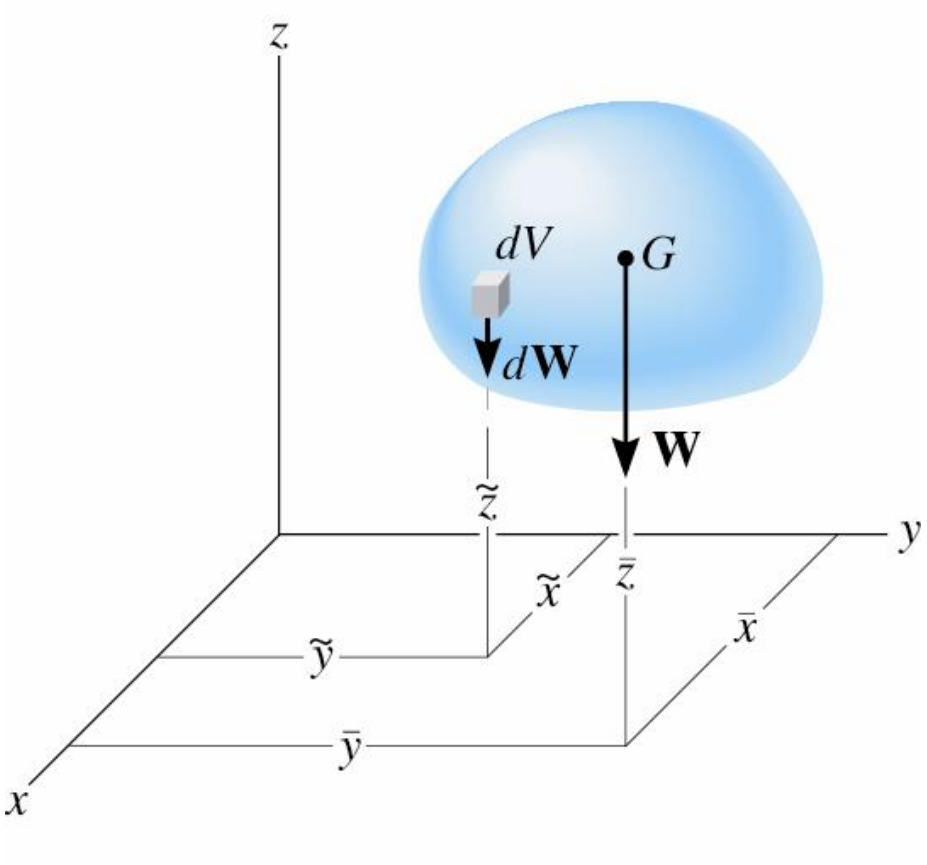
Toplam Ağırlık: $$W_R = \sum_{i=1}^{n} W_i = W_1 + W_2 + \cdots .. W_n$$

Ağırlık Merkezi koordinatları:

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	: ağırlık merkezinin koordinatları
$\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$	: i. parçacığın koordinatı
W_i	: i. parçacığın ağırlığı

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i W_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i W_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i W_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \qquad (6.1a\text{-}c)$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \cdots .. \bar{x}_n W_n}{W_1 + W_2 + \cdots .. W_n} \qquad (6.2)$$



Eğer bir yapı sonsuz sayıda partikülden oluşuyorsa

(bir katı cisim ise) ağırlık merkezine integral ifadeleri katılır.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW}, \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$

γ = özgül ağırlık,

dV = diferansiyel hacim,

diferansiyel ağırlık:

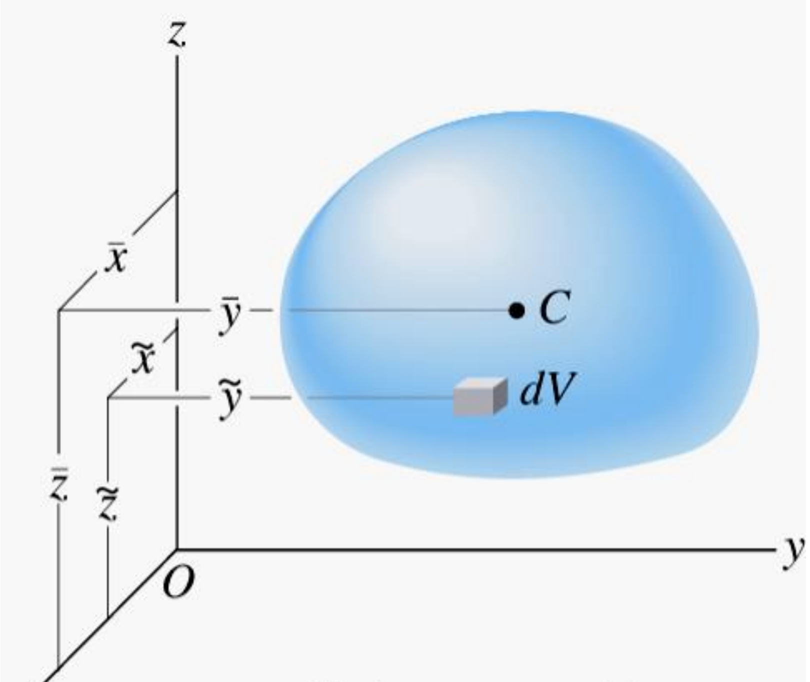
$dW = \gamma$.dV

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\gamma dV}{\int_V \gamma dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\gamma dV}{\int_V \gamma dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\gamma dV}{\int_V \gamma dV} \qquad (6.3a\text{-}c)$$

6a.2 Geometrik Merkez

Tanım: Bir nesnenin geometrik merkezinin formülasyonu ağırlık merkezine benzer. Cismin sadece geometrisi dikkate alınarak bulunur. İzotropik ve homojen cisimlerde ağırlık merkezi ile geometrik merkez aynıdır.

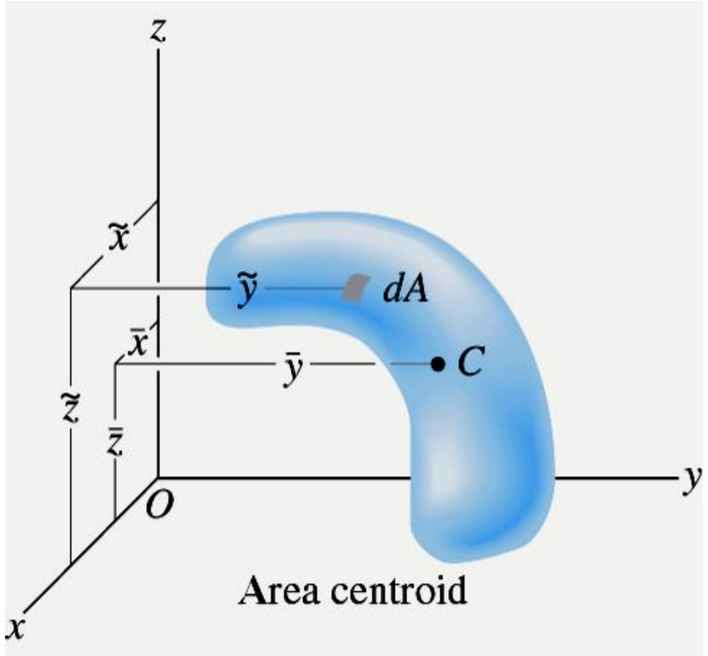
a-) Hacimsel merkez:



Volume centroid

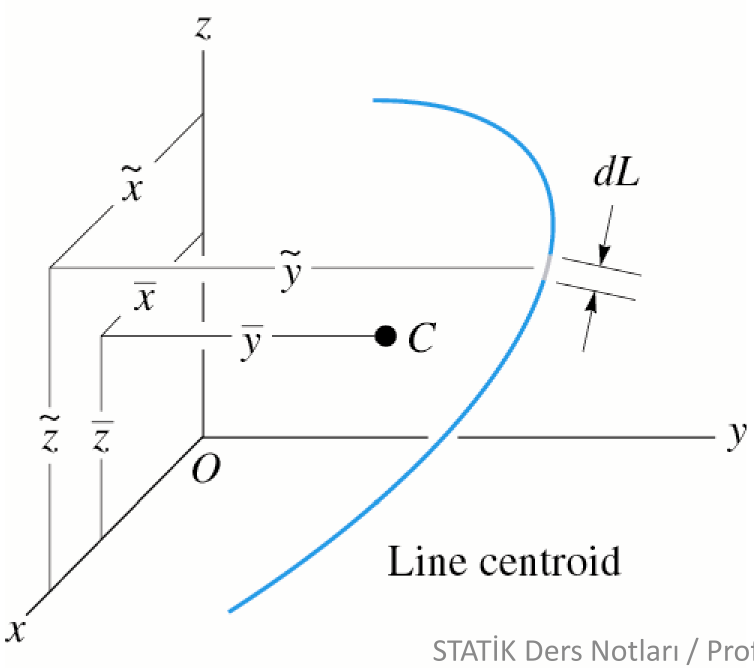
$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV} \qquad (6.4a\text{-}c)$$

b-) Alansal merkez:



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z}\, dA}{\int_A dA} \qquad (6.5a\text{-}c)$$

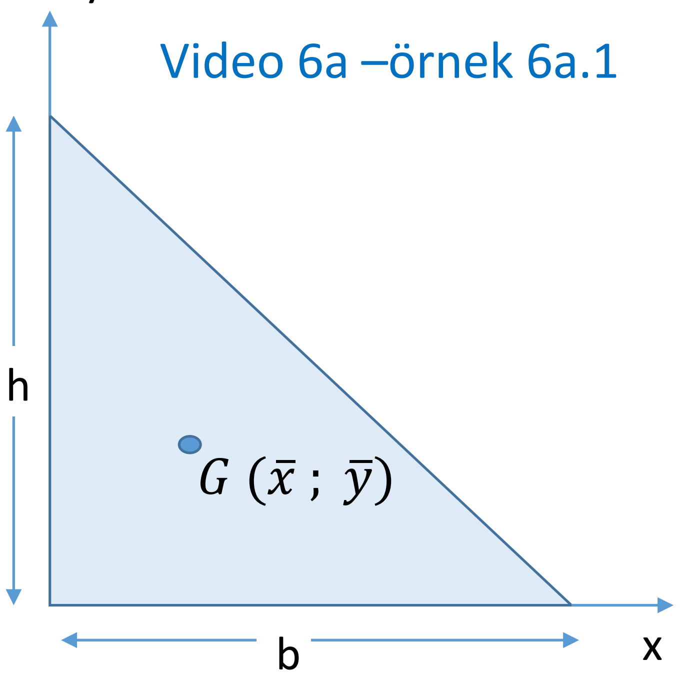
c-) Çizgisel merkez:



$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z}\, dL}{\int_L dL} \qquad (6.6a\text{-}c)$$

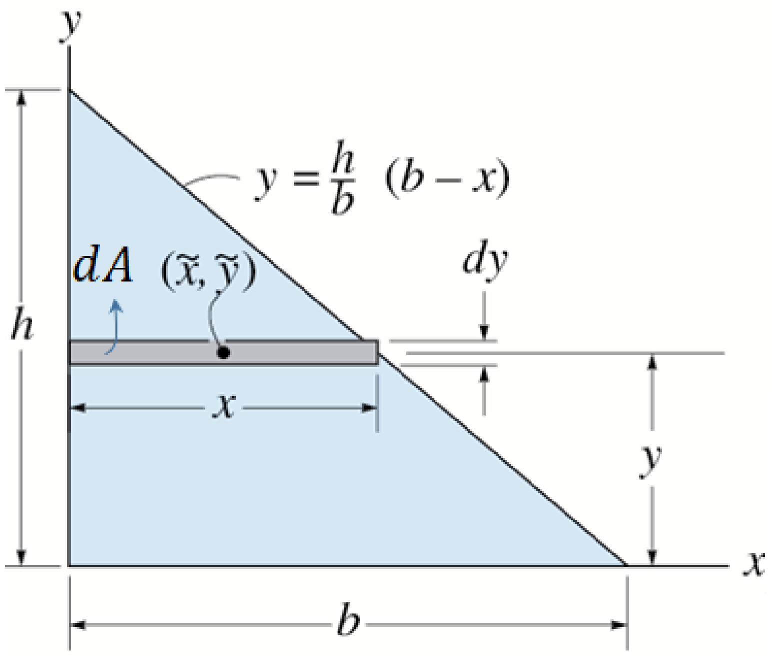
Örnek 6a.1

Video 6a –örnek 6a.1



Şekildeki üçgenin geometrik merkezinin koordinatlarını bulunuz. ($\bar{x}$:? ; $\bar{y}$: ?)

Çözüm



Hipotenüs doğrusunun denklemi

$$y = cx + d$$

$$y = h \ \ için\ x = 0, \quad \rightarrow d = h$$

$$y = 0 \ \ için \ \ x = b, \rightarrow c = -h/b$$

$$\rightarrow y = \frac{h}{b}(b - x)$$

1.Yol: Şerit metodu:

Sadece bir kenarı dif. uzunlukta olan şerit dA dif. Alanı alınır.

$$\tilde{y} = y \qquad \tilde{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{h}(h-y)\right)$$

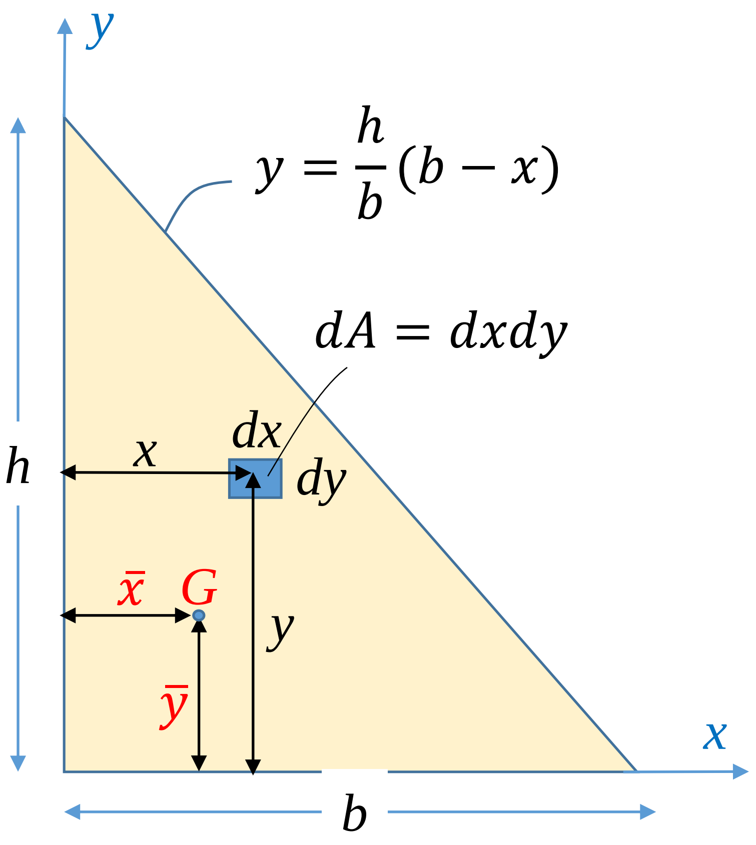
$$dA = x\,dy \quad \longrightarrow \quad dA = \frac{b}{h}(h-y)\,dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y\left(\frac{b}{h}(h-y)\right)dy}{\int_0^h \left(\frac{b}{h}(h-y)\right)dy} = \frac{\frac{1}{6}b\,h^2}{\frac{1}{2}b\,h} = \frac{h}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\ \ dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h \frac{1}{2}\left(\frac{b}{h}(h-y)\right)\left(\frac{b}{h}(h-y)\right)\ dy}{\int_0^h \left(\frac{b}{h}(h-y)\right)\ dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\ \ b^2 h}{\frac{1}{2}\ \ b\,h} \longrightarrow \bar{x} = \frac{b}{3}$$

2.Yol: Çift integral metodu. dA elemanının herbir kenarı dif. uzunlukta alınarak çift integrasyon yapılır.



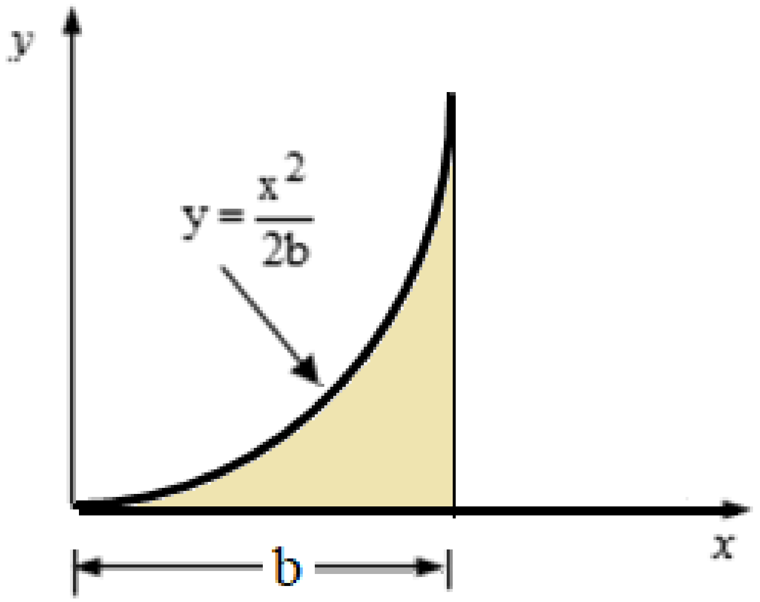
$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

$$= \frac{\int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} y dy dx}{\frac{1}{2}bh} = \frac{\int_0^b \left(h^2/_{2b^2}\right)(b-x)^2 dx}{\frac{1}{2}bh}$$

$$= \frac{-\left(h^2/_{6b^2}\right)(b-x)^3}{\frac{1}{2}bh} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} \quad \rightarrow \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

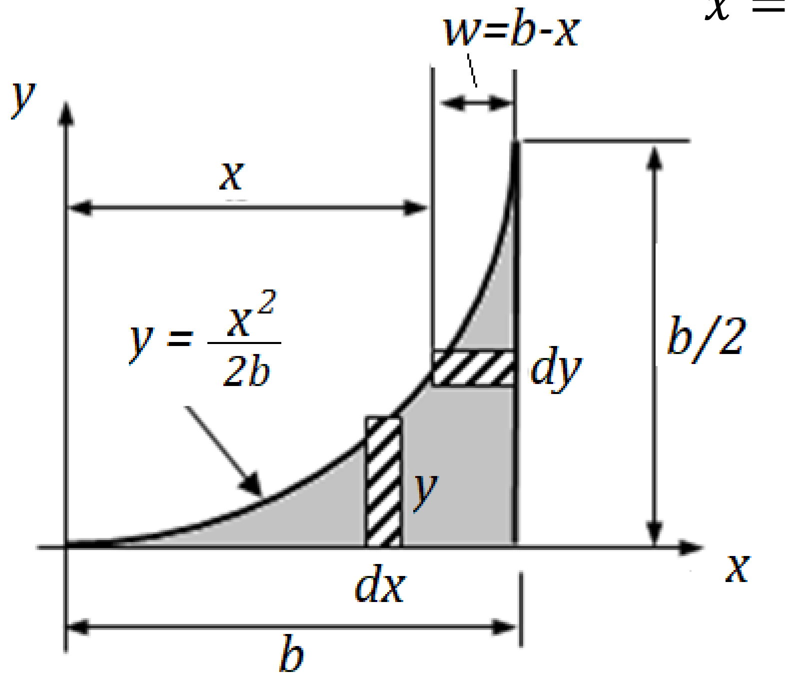
Bu yöntemle $\rightarrow$ $\bar{x} = \frac{b}{3}$ sonucunu bulmaya çalışınız.

Örnek 6a.2 Video 6a –örnek 6a.2



Şekildeki $y = \frac{x^2}{2b}$ eğrisi alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

Düşey şerit elemanı kullanacağız. $dA = ydx$

$$A = \int dA = \int ydx = \int_0^b \frac{x^2}{2b} dx = \frac{b^2}{6}$$

$$\int x dA = \int xydx = \int_0^b x\frac{x^2}{2b} dx = \frac{b^3}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{b^3}{8} \Big/ \frac{b^2}{6} \qquad \rightarrow \bar{x} = \frac{3b}{4}$$

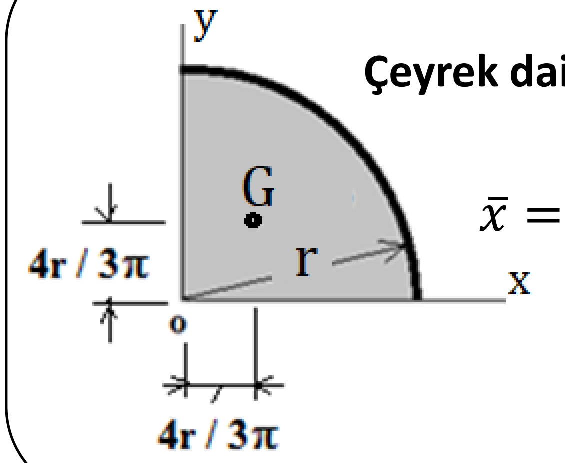
$\bar{y}$ yi bulmak için Yatay şerit dif. elemanı kullanırız ($dA = wdy$)

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int wydy}{\int dA} = \frac{\int_0^{b/2} y(b - (\boldsymbol{y}^{1/2} 2^{1/2} b^{1/2}))dy}{\frac{b^2}{6}} = \frac{b^3}{40} \Big/ \frac{b^2}{6}$$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{3b}{20}$$

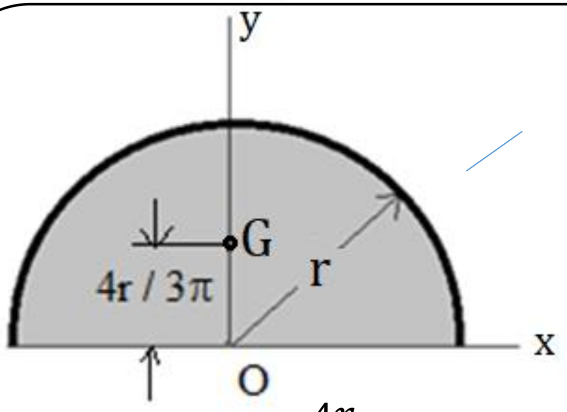
6a.3 Düzgün Geometrilerin Geometrik Merkezi

Çeyrek daire

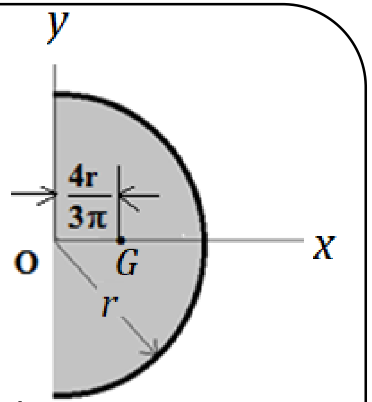


$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

Yarım daire

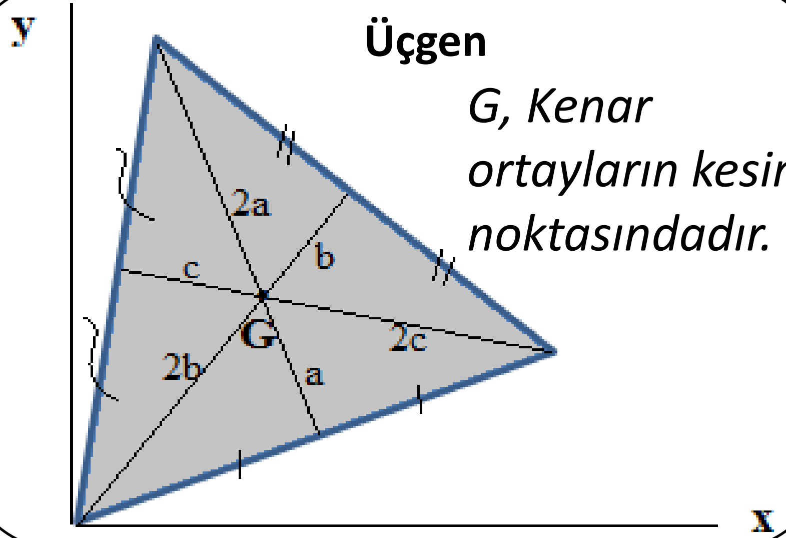


$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}\ , \quad \bar{x} = 0$$



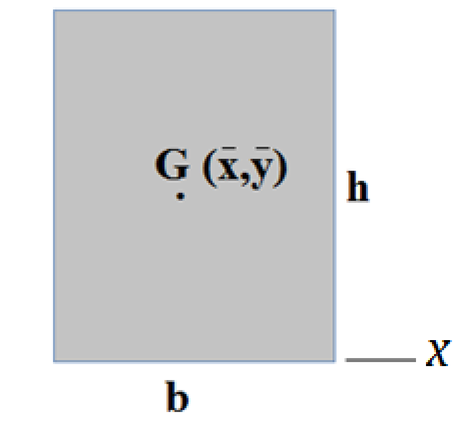
$$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}\ , \quad \bar{y} = 0$$

Üçgen



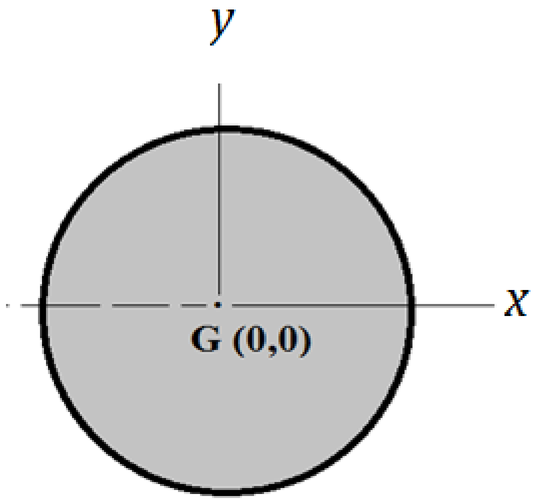
G, Kenar ortayların kesim noktasındadır.

Kare, dikdörtgen



$$\bar{x} = \frac{b}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

Tam Daire



$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

6a.4 Birleşik düzgün alanların geometrik merkezi:

Basit yapıların (temel geometrilerin) birleşmesinden oluşmuş karmaşık yapılara kompozit alanlar denir. Bunların geometrik merkezi bulunurken basit alanların geometrik merkez özelliklerinden yararlanılır.

Çözüm Yöntemi:

Birleşik alan basit geometrili alt parçalara ayrılır.

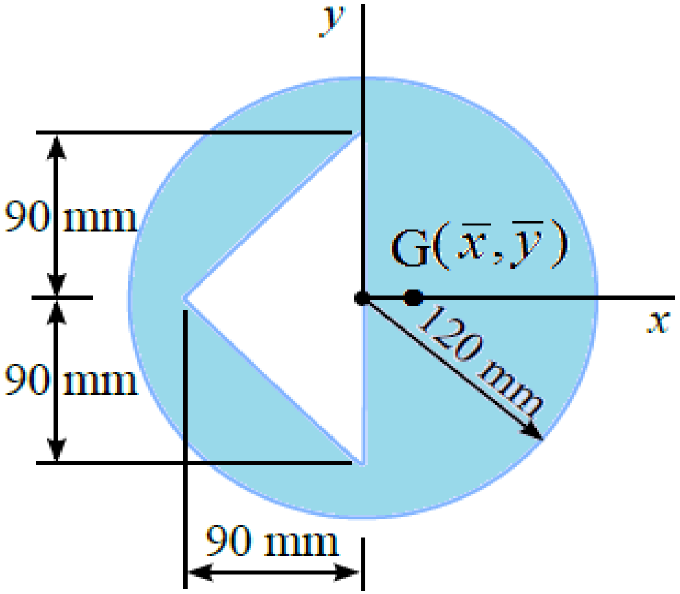
- Eğer delik veya kesilmiş kısım varsa bunlar negatif alan gibi düşünülür.
- Simetri varsa geometrik merkez bu simetri ekseni üzerindedir.
- Tablo oluşturulur ve çözüm yapılır.
- Konu örneklerle daha iyi anlaşılacaktır.

x-y düzlemindeki Birleşik Alanlar için Geometrik merkez:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Örnek 6a.3:

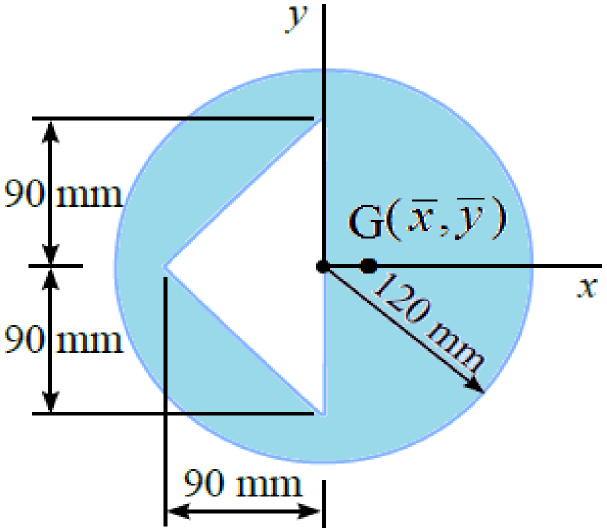
Video 6a –örnek 6a.3



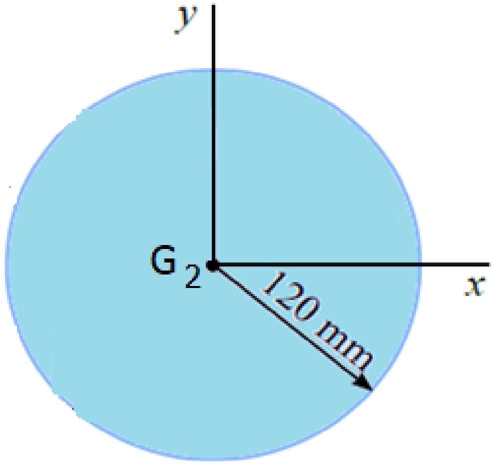
Şekildeki alanın geometrik merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Çözüm:

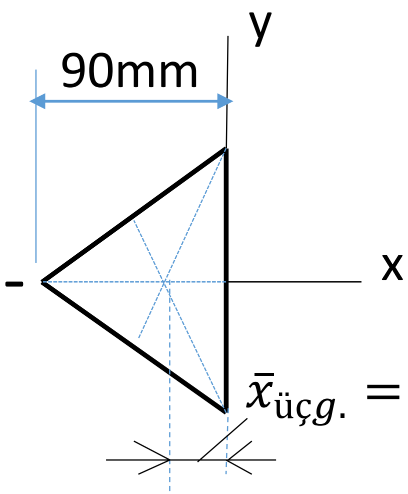
Şekil tam daireden üçgenin çıkarılmasıyla oluşturulmuş kompozit bir alandır.



≡



-



$$\bar{x}_{üçg.} = \frac{-90}{3}$$

x eksenine göre simetriklikten dolayı geometrik merkezin y koordinatı sıfır «0» olur.

$$\bar{y} = 0$$

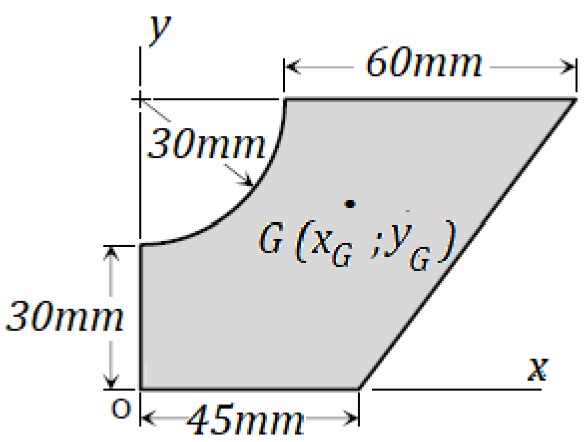
üçgenin ağırlık merkezi negatif taraftadır.

Üçgen çıkarıldığı için alanın işareti negatif alınıyor.

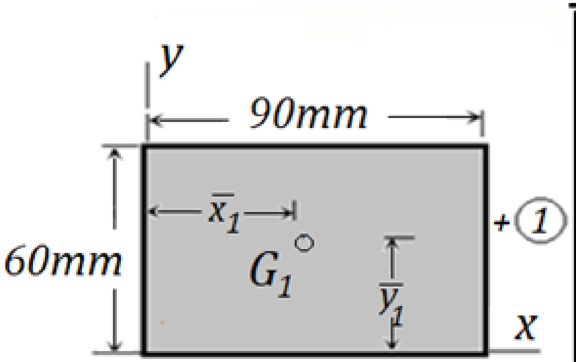
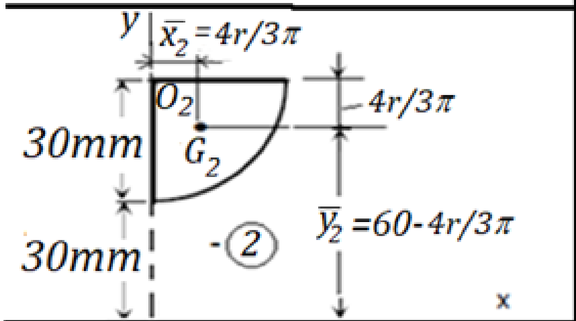
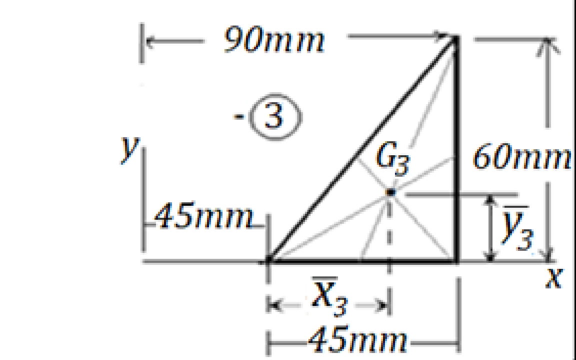
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{\bar{x}_{daire}.A_{daire} + \bar{x}_{üçgen}.A_{üçgen}}{A_{daire} + A_{üçgen}} = \frac{0.A_{daire} + (-\frac{90}{3}).(-\frac{90x180}{2})}{\pi.120^2 + (-\frac{90x180}{2})}$$

$$\rightarrow \quad \bar{x} = 6.54mm$$

Örnek 6a.4



Şekildeki alanın geometrik merkezinin koordinatlarını hesaplayınız. Hesapların düzenli görülmesi için tablo kullanınız.

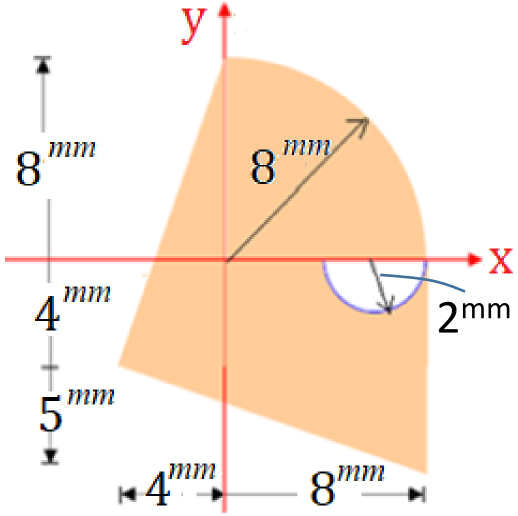
	A_i (mm^2)	x_i (mm)	y_i (mm)	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
	90x60 =5400	$\bar{x}_1 = 45$	$\bar{y}_1 = 30$	5400 x 45 = 243000	5400 x 30 =162000
	$\frac{-\pi.30^2}{4}$ =-706.86	$\bar{x}_2 = \frac{4.(30)}{3.\pi}$ =12.73	$\bar{y}_2 = 60 - \frac{4.(30)}{3.\pi}$ =47.27	-706.86x12.73 = -8998.3	-706.86x47.27 =-33413.27
	$-\frac{45x60}{2}$ =-1350	$45+\frac{2}{3}x45$ =75	$\frac{1}{3}x\ 60$ =20	-1350 x 75 = -101250	- 1350 x 20 = - 27000
Σ	=3343.14			132751.7	101586.73

Not:
<u>$4r/3\pi$ mesafesi</u>
Daima daire merkezinden (O2) ağırlık merkezine (G2) olan yatay veya düşey mesafedir.

$$x_G = \frac{\Sigma(\bar{x}_i A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{132751.7}{3343.14} \cong 39.71mm$$

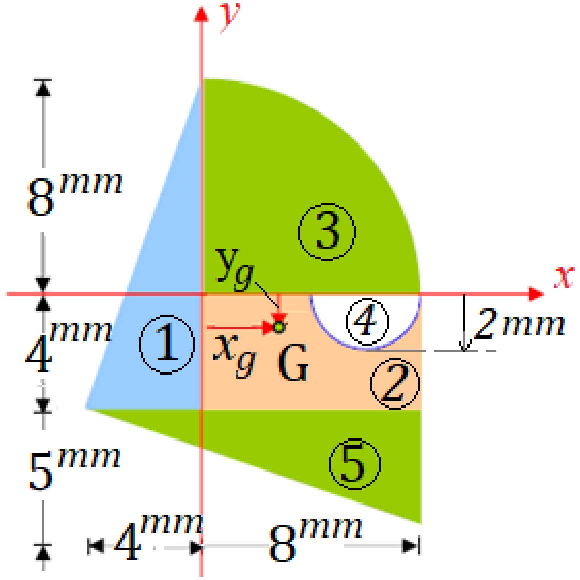
$$y_G = \frac{\Sigma(\bar{y}_i A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{101586.73}{3343.14} \cong 30.39mm$$

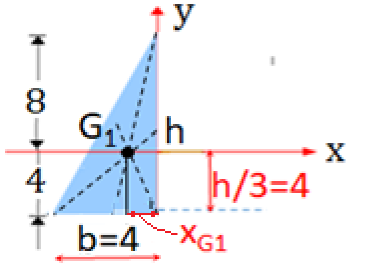
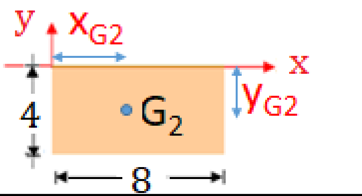
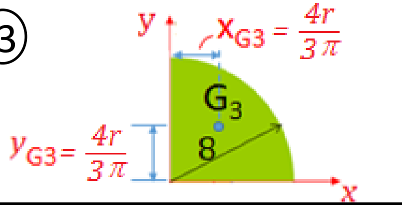
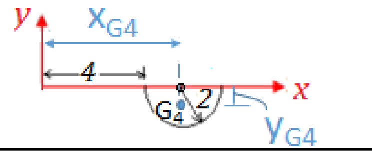
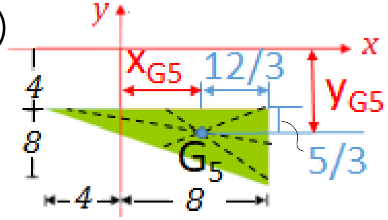
Örnek 6a.5 (*):



Şekildeki alanın geometrik merkezinin koordinatlarını tablo kullanarak bulunuz.

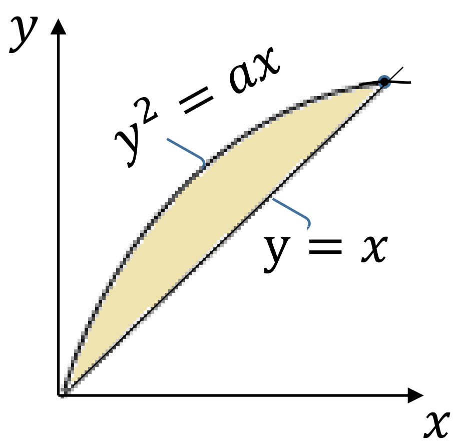
Çözüm:



	$A_i\ (mm^2)$	x_{Gi} (mm)	$A_i \cdot x_i$	y_i (mm)	$A_i \cdot y_i$
1 	(bh)/2 = 4x12/2 **=24**	-b/3 =-4/3 **=-1.33**	24.(-133) **=-31.92**	**0**	24x0 **=0**
2 	8x(4) **=32**	8/2 **=4**	32x4 **=128**	-4/2 **=-2**	32x(-2) **=-64**
3 	$(\pi 8^2)/4$ **=50.26**	$4x8/3\pi$ **=3.39**	(50.26)(3.39) **=170. 38**	$4x8/3\pi$ **=3.39**	(50.26)(3.39) **=170.38**
4 	$(-\pi 2^2)/2$ **=-6.28**	**6**	-6.28x6 **=-37.68**	$-4x2/3\pi$ **=-0.85**	(-6.28)(-0.85) **=5.34**
5 	12x5/2 **=30**	12-4-12/3 **=4**	**30x4 = 120**	-4-(5/3) **=-5.67**	30x(-5.67) **=-170.1**
Σ	**129.98**		**348.78**		**-58.38**

$$x_g = \frac{348.78}{129.98} = 2.68mm \qquad y_g = \frac{-58.38}{129.98} = -0.45mm$$

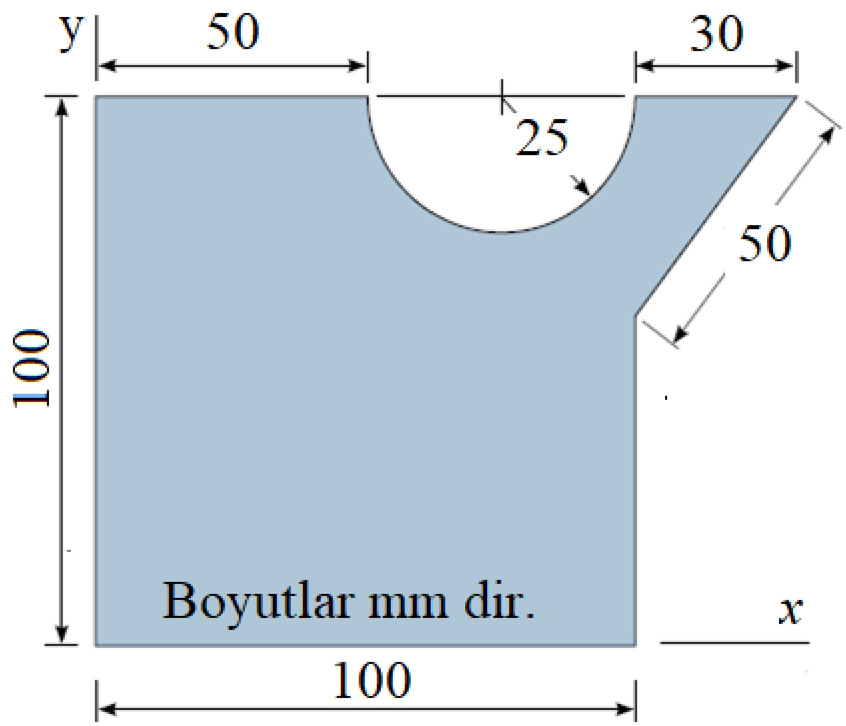
Örnek 6a.6 (*)



$y^2 = ax$ parabolü ile $\mathrm{y} = x$ doğrusu arasında kalan alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Cevap: $\bar{x} = \dfrac{2a}{5}$, $\bar{y} = \dfrac{a}{2}$

Örnek 6a.7:



Şekildeki alanın ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

Cevap: $x_G = 51.2mm$, $y_G = 48.3mm$

ALANLARIN

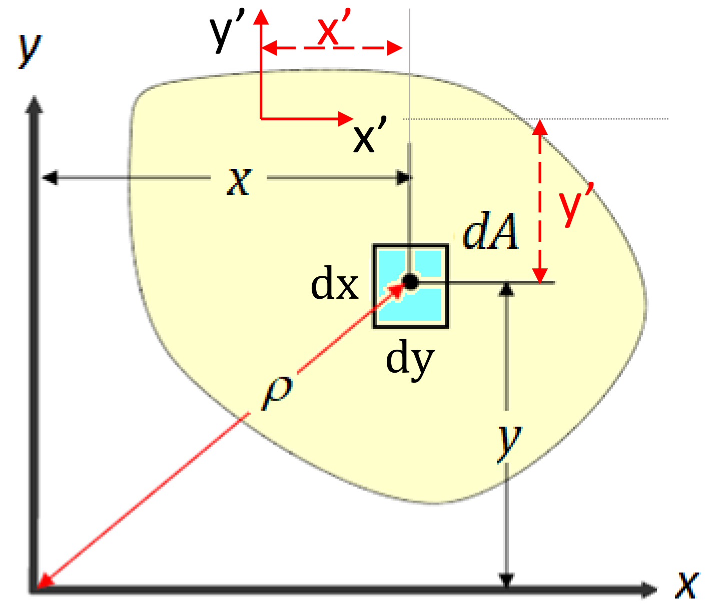
6.b ATALET MOMENTİ

HESAPLARI

Video 6.b

6b.1 Atalet Momenti Tanımları:

Şekildeki alanın;



x eksenine göre atalet momenti: $I_x = \int y^2 dA$

y eksenine göre atalet momenti: $I_y = \int x^2 dA$

x y eksen takımına göre Çarpım atalet momenti: $I_{xy} = \int xy dA$

x’ eksenine göre atalet momenti: $I_{x'} = \int y'^2 dA$

y’ eksenine göre atalet momenti: $I_{y'} = \int x'^2 dA$

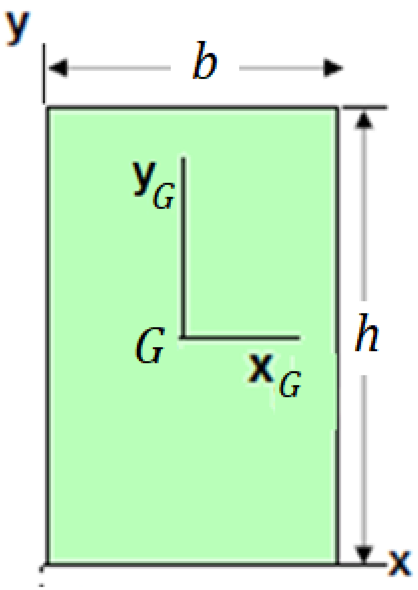
x’ y’ eksen takımına göre Çarpım atalet momenti: $I_{x'y'} = \int x'y' dA$

x-y eksen takımına göre Polar atalet momenti : $J = \int \rho^2 dA = \int [x^2 + y^2] dA = I_x + I_y$

Atalet momentlerinin eksen takımının yerine göre farklılık gösterdiğini de fark ediniz.

Örnek 6.b.1:

Video 6b –örnek 6b.1

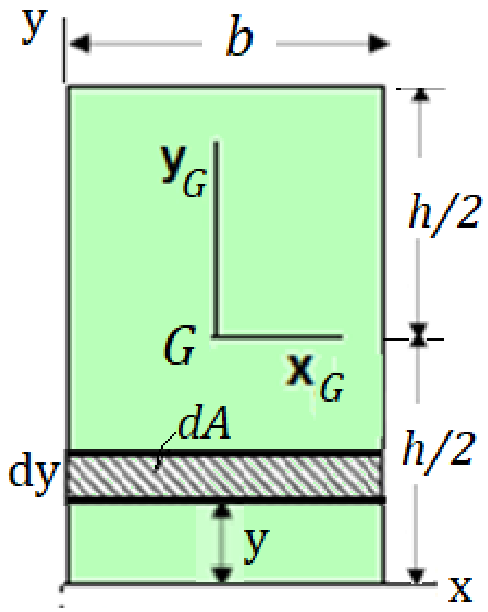


Şekilde verilen dikdörtgenin,

a. Tabanından geçen yatay x eksenine göre,

b. Ağırlık merkezinden geçen yatay x_G eksenine göre atalet momentinin bulunuz.

Çözüm:



$$dA = bdy$$

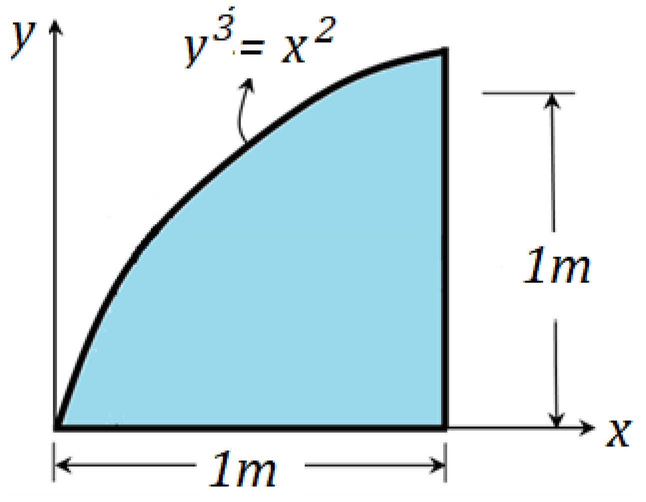
$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 bdy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{x_G} = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy = \frac{bh^3}{12}$$

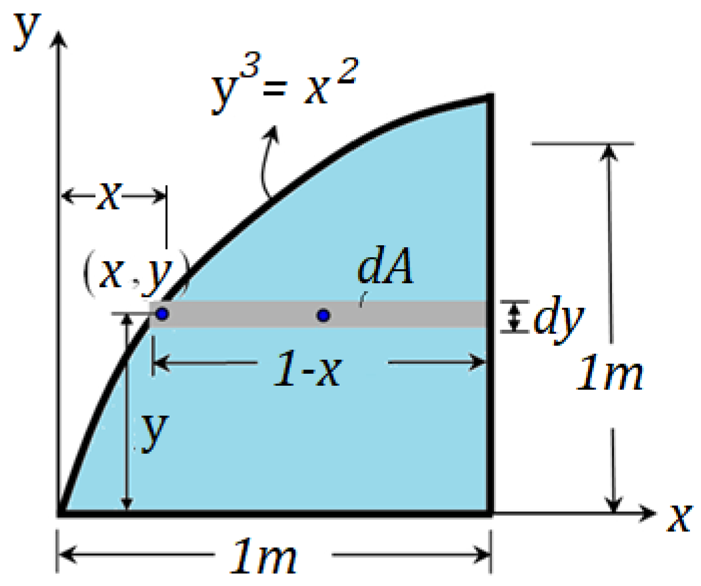
Aradaki fark, eksen takımına uygun şekilde yerleştirilen integral sınırlarından kaynaklanmaktadır.

Örnek 6b.2:

Video 6b –örnek 6b.2



$y^3 = x^2$ eğrisi altında kalan alanın x eksenine göre atalet momentini hesaplayınız.



Çözüm:

$$y^3 = x^2 \Rightarrow x = y^{3/2}$$

Şerit dA elemanı

$$dA = (1 - x)dy$$

$$dA = \left(1 - y^{3/2}\right)dy$$

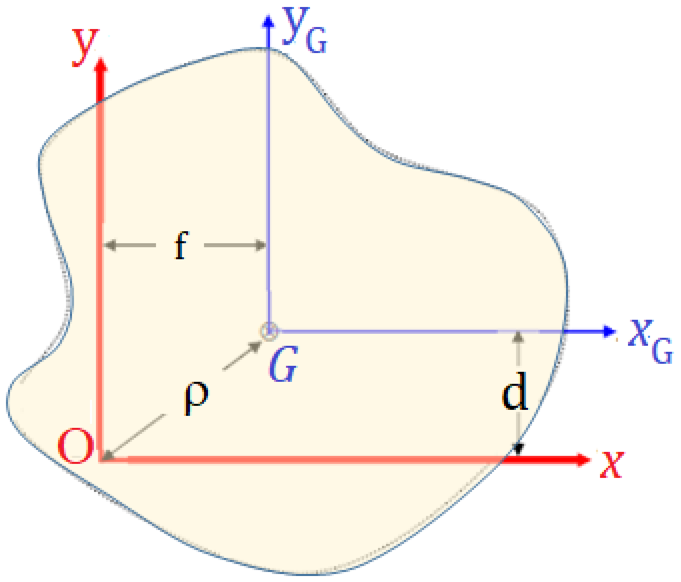
$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^1 y^2.(1 - y^{3/2})dy = \int_0^1 (y^2 - y^{7/2})dy$$

$$= \left|\left(\frac{y^3}{3}\right) - \frac{y^{9/2}}{9/2}\right|_0^1 = \left|0.33y^3 - 0.22y^{9/2}\right|_0^1$$

$$= \left(0.33x1^3 - 0.22x1^{\frac{9}{2}}\right) - \left(0.33x0^3 - 0.22x0^{9/2}\right)$$

$$= 0.33 - 0.22 \qquad \boxed{\rightarrow I_x = 0.1111\, m^4}$$

6.b.2 Paralel Eksen (Stainer) Teoremi:



Ağırlık merkezinden geçen bir eksene göre atalet momenti belli iken, bu eksene paralel başka bir eksene göre atalet momenti bulunabilir. Şöyle ki:

Ağırlık merkezinden geçen yatay eksene (x_G) göre atalet momenti (Ix_G)belli iken, x eksenine göre atalet momenti :

$$I_x = I_{x_G} + Ad^2 \qquad (6.8a)$$

A: Alan, d : x – x_G eksenleri arasındaki dik uzaklıktır.

Benzer şekilde;

y eksenine göre atalet momenti: $I_y = I_{y_G} + Af^2$ (6.8b)

x-y eksen takımına göre çarpım atalet momenti: $I_{xy} = I_{x_G}.I_{y_G} + A.d.f$ (6.8c)

O noktasına göre Polar atalet momenti: $J_o = J_G + A\rho^2$ (6.9)

Dikkat:

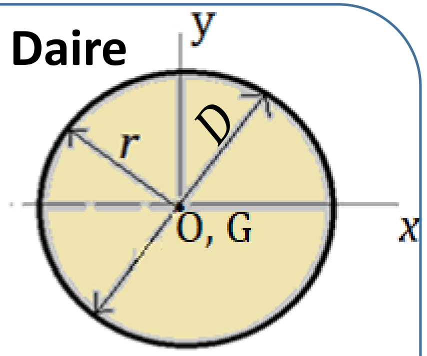
Paralel eksen teoreminin uygulanabilmesi için 2 önemli şart vardır:

1- Eksenler birbirine paralel olmalıdır.

2- Bir eksen mutlaka ağırlık merkezinden geçmelidir.

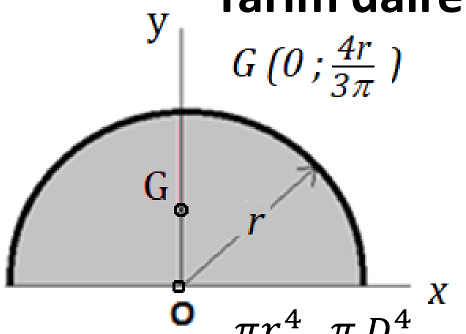
6b.3 Temel Alanların Atalet Momentleri:

Tam Daire



$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi . D^4}{64}$$

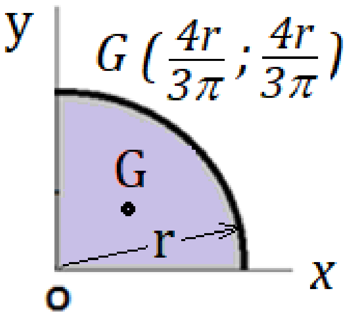
Yarım daire



$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi . D^4}{128}$$

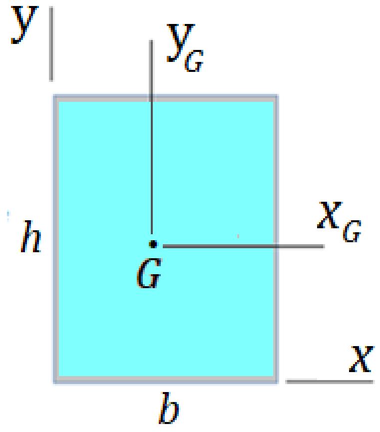
Dikkat:
I_x ve I_y daire merkezinden (O dan) geçen eksenlere göredir.

Çeyrek daire



$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi . D^4}{256}$$

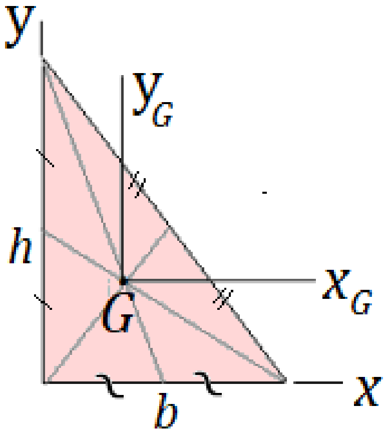
Kare, dikdörtgen



$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad , \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

Üçgen



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

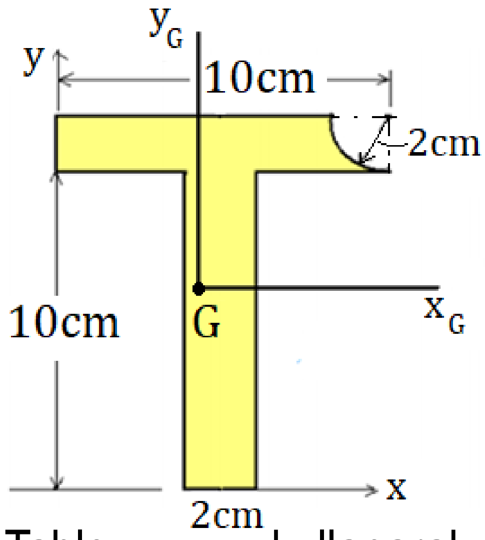
$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{36} \quad , \quad I_{y_G} = \frac{hb^3}{36}$$

Dikdörtgen için I_{x_G} bilinirken
I_x i paralel eksen teoreminden de şöyle de bulabiliriz:

$$I_x = I_{x_G} + A.d^2 = \frac{bh^3}{12} + b.h.(\frac{h}{2})^2 = \frac{bh^3}{3}$$

Örnek 6b.3(2009 final)

Video 6b –örnek 6b.3



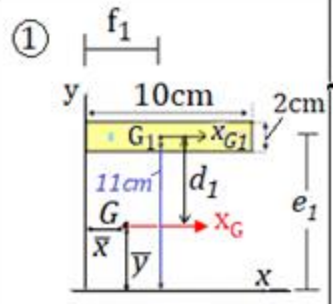
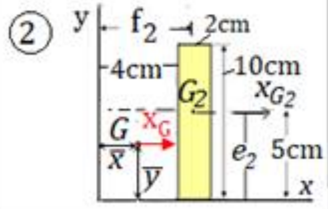
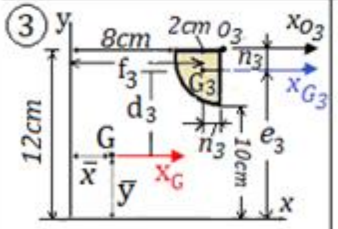
Tablo kullanarak, şekildeki alanın;

a-) ağırlık merkezinin koordinatlarını,

b-) şekildeki x ve y eksenlerine göre atalet momentlerini,

c-) ağırlık merkezinden geçen x_G ve y_G eksenine göre atalet momentini hesaplayınız.

Çözüm:

	A_i (cm^2)	x_i (cm)	y_i (cm)	$A_i x_i$	$A_i y_i$	I_{x_i} (cm^4) (x eksenine göre)	I_{x_iG} (cm^4) (x_G eksenine göre)	I_{y_i} (cm^4) (y eksenine göre)
	10x2 =20	5	11	20x5 =100	20x11 =220	$I_{x_1}=I_{x_{G_1}}+A_1 e_1^2$ $=\frac{10(2)^3}{12}+20.(11)^2$ =2426	$I_{x_{1G}}=I_{x_{G_1}}+A_1 d_1^2$ $=\frac{10(2)^3}{12}+20.(11-7.73)^2$ =220.5	$I_{y_1}=I_{yG_1}+A_1 f_1^2$ $I_{y_2}=\frac{2(10)^3}{12}+20.(5)^2$ =667
	2x10 =20	5	5	20x5 =100	20x5 =100	$I_{x_2}=I_{x_{G_2}}+A_2 e_2^2$ $=\frac{2(10)^3}{12}+20.(5)^2$ =667	$I_{x_{2G}}=I_{x_{G_2}}+A_2 d_2^2$ $=\frac{2(10)^3}{12}+20.(5-7.73)^2$ =315.7	$=I_{yG_2}+A_2 f^2$ $=\frac{10(2)^3}{12}+20.(5)^2$ =506.7
 $f_3=10-n_3$ $=10-\frac{4x2}{3\pi}=9.15$ cm	$-\frac{\pi 2^2}{4}$ =-3.14	$10-n_3$ $=10-\frac{4r}{3\pi}$ $=10-\frac{4x2}{3\pi}$ =9.15	$12-\frac{4x2}{3\pi}$ =11.15	-28.73	-35.01	$I_{x_3}=I_{x_{G_3}}+A_3 e_3^2$ $=I_{x_{O3}}-A_3 n_3^2+A_3 e_3^2$ $=\frac{\pi 2^4}{16}-(3.14)(\frac{4x2}{3\pi})^2$ $+3.14(11.15)^2$ =391.2	$I_{x_{3G}}=I_{x_{G_3}}+A_3 d_3^2$ $=I_{x_{O3}}-A_3 n_3^2+A_3 d_3^2$ $=\frac{\pi 2^4}{16}-(3.14)(\frac{4x2}{3\pi})^2$ $+3.14(11.15-7.73)^2$ =37.6	$I_{y_3}=I_{yG_3}+A_3 f_3^2$ $=I_{yO3}-A_3 n_3^2+A_3 f_3^2$ $\frac{\pi 2^4}{16}-(3.14)(\frac{4x2}{3\pi})^2$ $+3.14(9.15)^2$ =263.8
Σ	36.86			171.27	285	$I_x=I_{x_1}+I_{x_2}-I_{x_3}$ $I_x=2701.8\ cm^4$	$I_{x_G}=I_{x_{1G}}+I_{x_{2G}}-I_{x_{3G}}$ $I_{x_G}=498.6\ cm^4$	$I_y=I_{y_1}+I_{y_2}-I_{y_3}$ $I_y=909.9\ cm^4$

Ağırlık merkezinin koordinatları

$\bar{x}=171.27/36.86=4.64$ cm

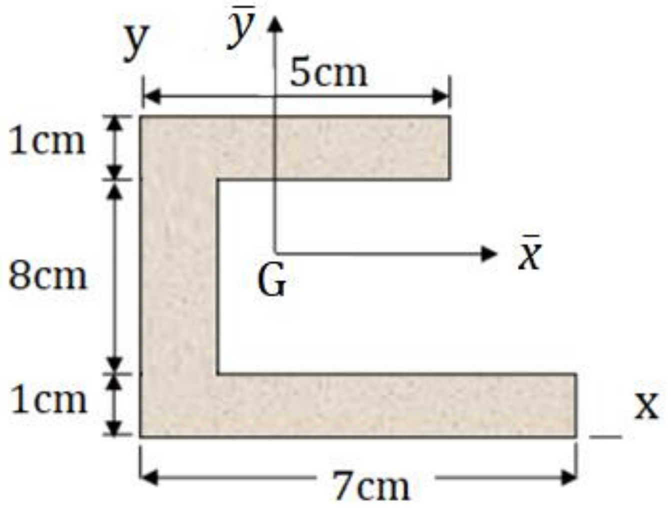
$\bar{y}=285/36.86=7.73$ cm

veya $I_{x_G}=I_x-A.\bar{y}^2=2701.8-36.86x7.73^2\cong 498.6\ cm^4$

$I_{y_G}=I_y-A.\bar{x}^2=909.9-36.86x4.64^2=116.3\ cm^4$

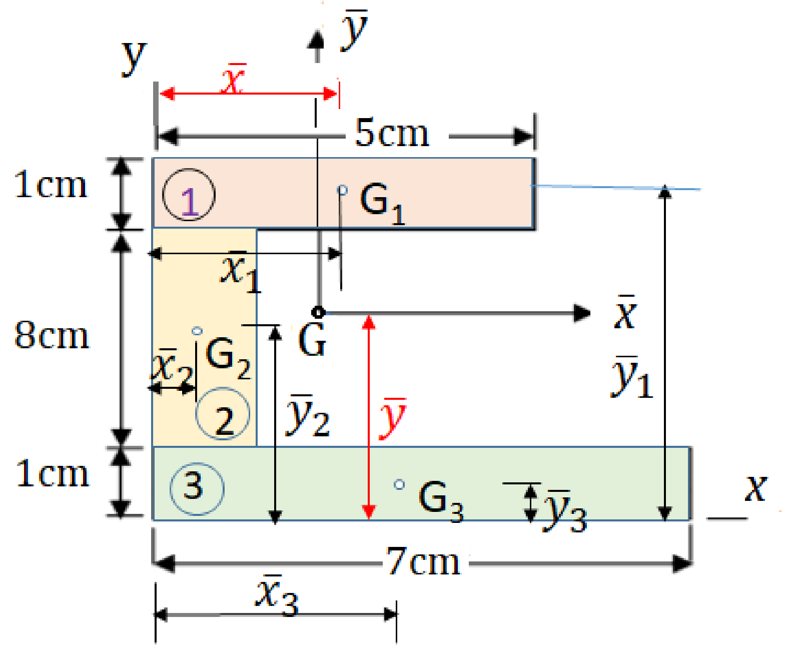
$I_{x_{1G}}$: 1 nolu parçanın şeklin ağırlık merkezine (G'ye) göre atalet momenti

$I_{x_{G1}}$: 1 nolu parçanın kendi ağırlık merkezine (G_1'e) göre atalet momenti



Örnek 6.b.4 Verilen profil kesitte ağırlık merkezinden geçen $\bar{x}$ - $\bar{y}$ eksenlerine göre $I_{\bar{x}}$, $I_{\bar{y}}$ atalet momentlerini ve $I_{\bar{x}\bar{y}}$ çarpım atalet momentlerini hesaplayınız.

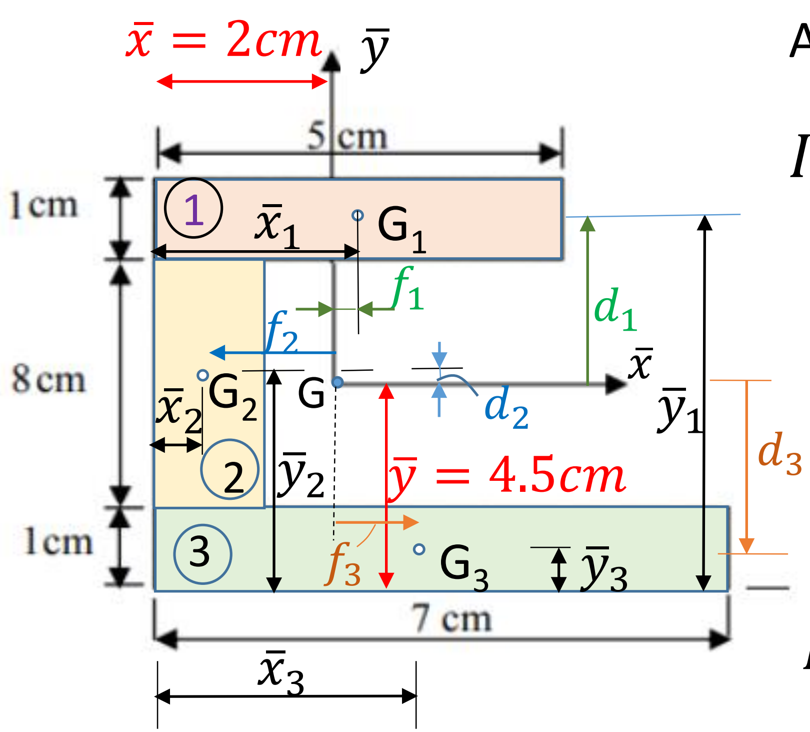
Çözüm:



Önce sol alt köşeye yerleştirilen x-y eksen takımına göre G ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2.5(5x1) + 0.5(8x1) + 3.5(1x7)}{(5x1) + (8x1) + (1x7)} \quad \rightarrow \bar{x} = 2.05cm$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{9.5(5x1) + 5(8x1) + 0.5(1x7)}{(5x1) + (8x1) + (1x7)} \quad \rightarrow \bar{y} = 4.55cm$$



Ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini hesaplayalım:

$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{x}_1} + I_{\bar{x}_2} + I_{\bar{x}_3} = I_{xG_1} + A_1 d_1^2 + I_{xG_2} + A_2 d_2^2 + I_{xG_2} + A_3 d_3^2$$

$$= \frac{5x1^3}{12} + (5x1)(9.5-4.5)^2 + \frac{1x8^3}{12} + (8x1)(5-4.5)^2$$

$$+ \frac{7x1^3}{12} + (7x1)(0.5-4.5)^2 \quad \rightarrow I_{\bar{x}} = 282.6cm^4$$

$$I_{\bar{y}} = I_{\bar{y}_1} + I_{\bar{y}_2} + I_{\bar{y}_3} = I_{yG_1} + A_1 f_1^2 + I_{yG_2} + A_2 f_2^2 + I_{yG_2} + A_3 f_3^2$$

$$= \frac{1x5^3}{12} + (5x1)(2.5-2)^2 + \frac{8x1^3}{12} + (8x1)(0.5-2)^2 + \frac{1x7^3}{12} + (7x1)(3.5-2)^2 \quad \rightarrow I_{\bar{y}} = 74.6cm^4$$

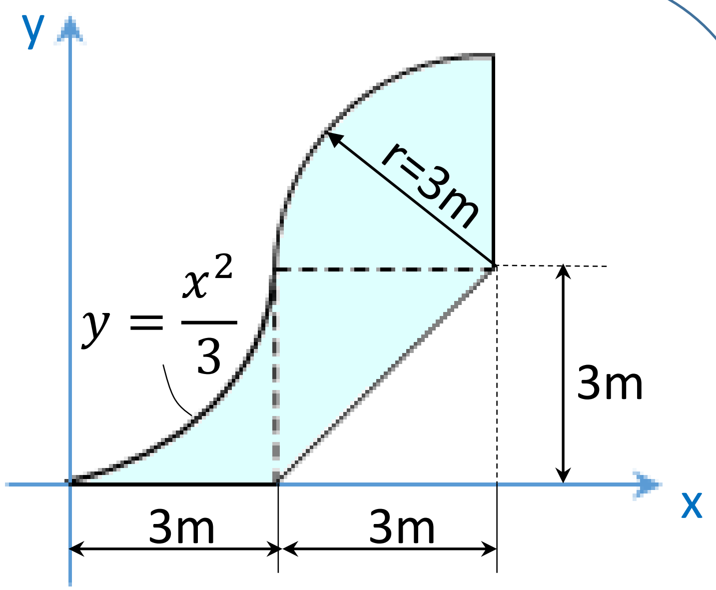
Çarpım atalet momenti:

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{x}_1\bar{y}_1} + I_{\bar{x}_2\bar{y}_2} + I_{\bar{x}_3\bar{y}_3} = \overset{0}{\cancel{I_{xG1yG1}}} + A_1.d_1.f_1 + \overset{0}{\cancel{I_{xG2yG2}}} + A_2.d_2.f_2 + \overset{0}{\cancel{I_{xG3yG3}}} + A_3.d_3.f_3$$

$$= (5x1)(9.5-4.5)(2.5-2) + (8x1)(5-4.5)(0.5-2) + (7x1)(0.5-4.5)(3.5-2) \quad \rightarrow I_{\bar{x}\bar{y}} = -35.5cm^4$$

$\bar{x} - \bar{y}$ eksenlerine göre negatif tarafta oldukları için f_2 ve d_3 mesafelerinin '– ' (eksi) işaretli alındığına dikkat ediniz.

Örnek 6b.5(*):



Şekildeki alanın;

a-)ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

b-) x ve y eksenlerine göre atalet momentlerini;

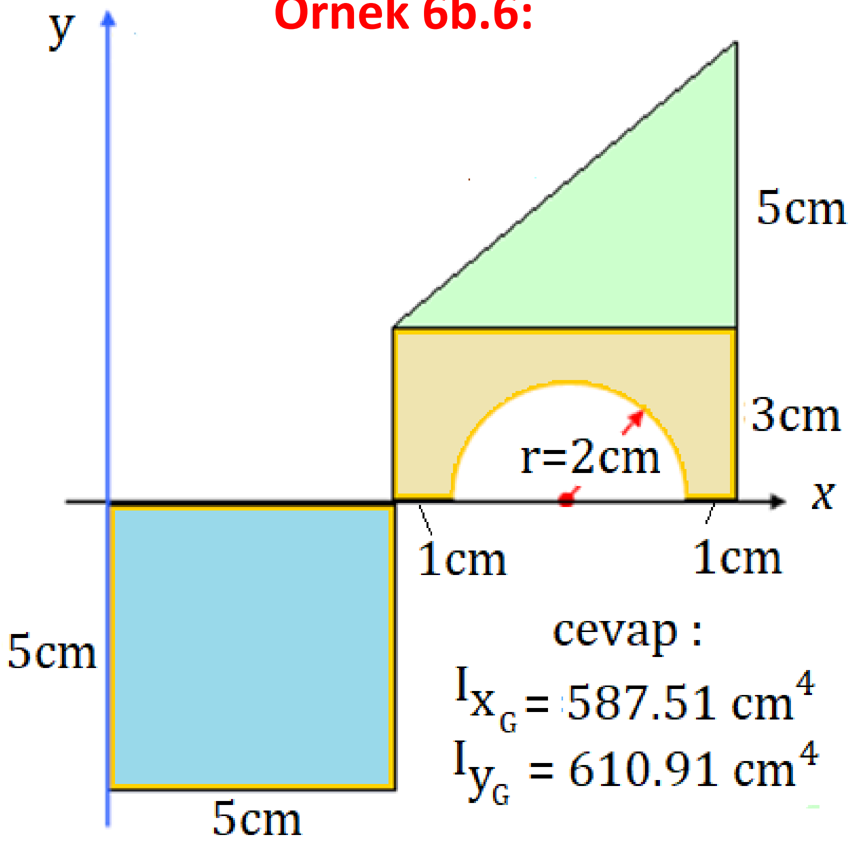
c-) Ağırlık merkezinden geçen yatay ve düşey eksenlere göre atalet momentlerini hesaplayınız.

Cevaplar: **a)** $x_G = 3.99\text{m}$, $\rightarrow$ $y_G = 2.87\text{m}$

b-) $I_x = 186.51\text{m}^4$, $I_y = 252.85\text{m}^4$

c-) $I_{\bar{x}} = 65.49m^4$, $I_{\bar{y}} = 20.89m^4$

Örnek 6b.6:

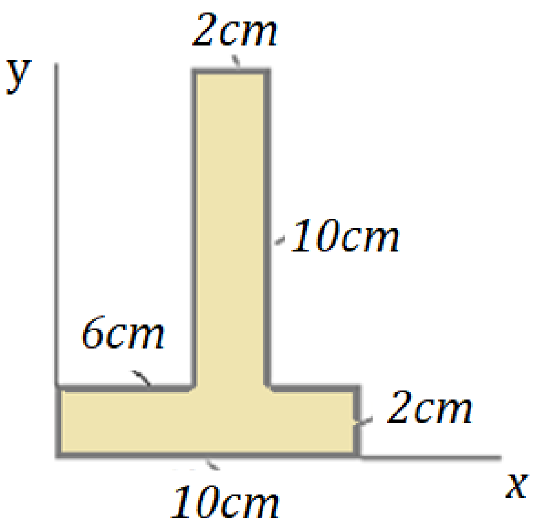


Şekildeki alanın ağırlık merkezinden geçen yatay ve düşey eksenlere göre atalet momentlerini (I_{x_G}, I_{y_G}) hesaplayınız.

Alttaki Alanların Ağırlık merkezinin koordinatlarını ve Ağırlık merkezinden geçen yatay eksene göre atalet momentlerini hesaplayınız.

Örnek 6b.7

(2015- final)



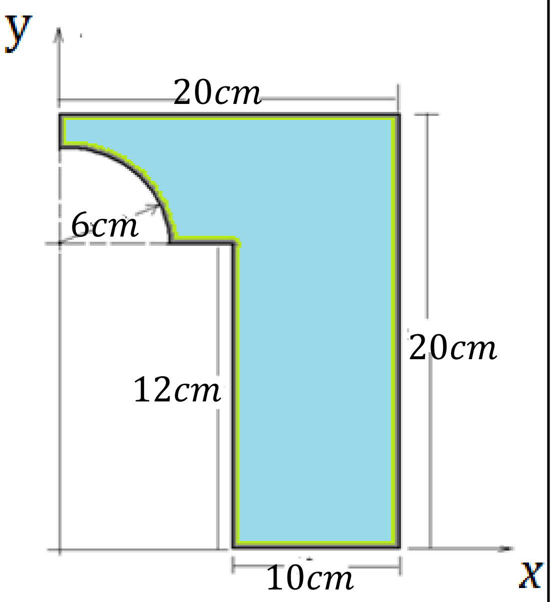
Cevaplar:

$x_G = 6\ cm,$

$y_G = 4\ cm,$

I_{x_G} =533,33 cm^4

Örnek 6b.8



Cevaplar:

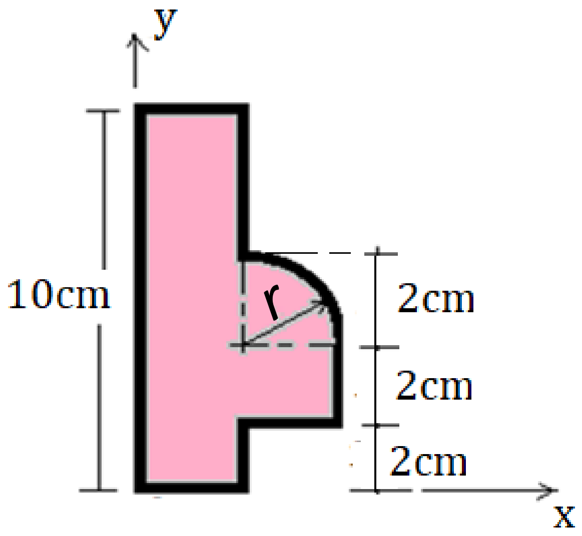
$x_G = 13.22\ cm,$

$y_G = 11.4\ cm,$

I_{x_G} =8804.5 cm^4

Örnek 6b.9

(2018- final)



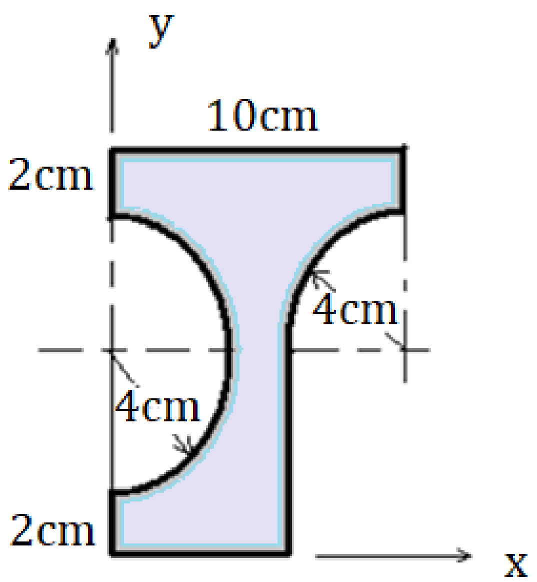
Cevaplar:

$x_G = 1.51\ cm,$

$y_G = 4.69\ cm,$

I_{x_G} =182.3 cm^4

Örnek 6b.10



Cevaplar:

$x_G = 4.48\ cm,$

$y_G = 6.86\ cm,$

$I_{x_G} = 965.35$ cm^4

6.c

Farklı Eksenlerdeki Atalet Momentleri,

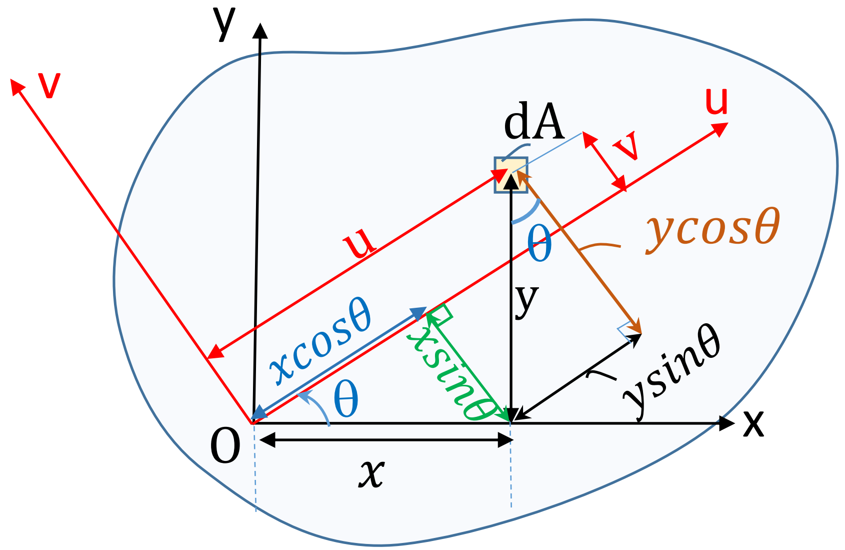
ASAL EKSENLER VE ASAL ATALET MOMENTLERİ

(Bu konu özellikle Mukavemet 2 dersinde gösterilen Eğik Eğilme konusunu anlamak için gereklidir.)

(Video 6.c)

6.c.1 Farklı bir eksen takımına göre atalet momentlerinin hesabı:

Bir alanın herhangi bir O noktasından geçen ve +x ekseniyle θ açısı yapan u ekseni ve ona dik v eksenine göre atalet momentlerini bilinen değerler olan I_x , I_y, I_{xy} ve θ cinsinden bulmak istiyoruz.



$$u = xcos\theta + ysin\theta \ ,$$

$$\mathrm{v} = ycos\theta - xsin\theta$$

x-y eksenlerine göre atalet momentlerinin tanımlarından:

(6.8a,b,c denklemlerinden)

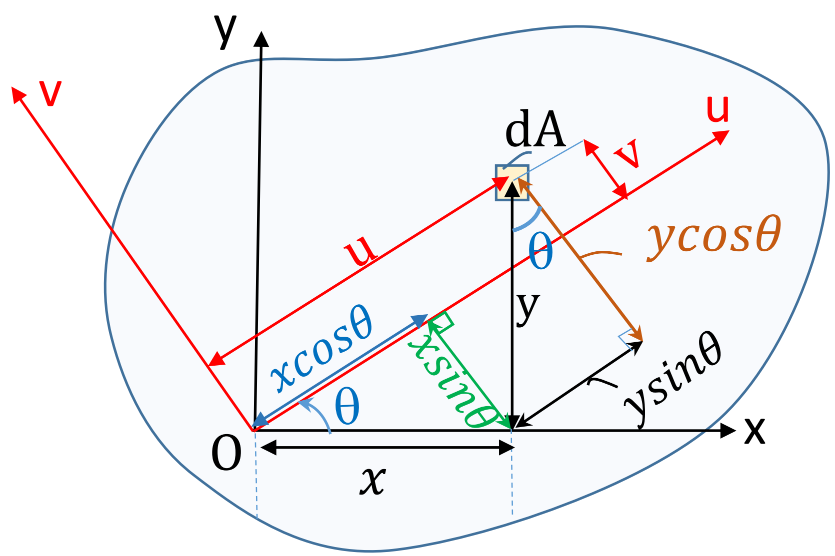
$$\mathrm{I_x} = \int \mathrm{y^2dA}, \quad \mathrm{I_y} = \int \mathrm{y^2dA}, \quad \mathrm{I_{xy}} = \int \mathrm{xydA}$$

Benzer şekilde u eksenine göre atalet momenti:

$$\mathrm{I_u} = \int \mathrm{v^2dA} \ = \int (ycos\theta - xsin\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \underbrace{\int \mathrm{y^2dA}}_{I_x} - 2sin\theta cos\theta \underbrace{\int xy\mathrm{dA}}_{I_{xy}} - \sin^2\theta \underbrace{\int \mathrm{x^2dA}}_{I_y}$$

$$\boldsymbol{I_u = I_x cos^2\theta - 2I_{xy} sin\theta cos\theta + I_y sin^2\theta} \qquad (6.10a)$$



Benzer Şekilde v eksenine göre atalet momenti:

$$I_v = \int u^2 dA = \int (xcos\theta + ysin\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \underbrace{\int x^2 dA}_{I_x} + 2sin\theta cos\theta \underbrace{\int xydA}_{I_{xy}} + \sin^2\theta \underbrace{\int y^2 dA}_{I_y}$$

$$\boldsymbol{I_v = I_x sin^2\theta + 2I_{xy} sin\theta cos\theta + I_y sin^2\theta} \qquad (6.10b)$$

u-v eksen takımına göre Çarpım atalet momenti:

$$I_{uv} = \int uvdA = \int (xcos\theta + ysin\theta)(ycos\theta - xsin\theta)dA$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \int xydA + sin\theta cos\theta \int y^2 dA - sin\theta cos\theta \int x^2 dA$$

$$\boldsymbol{I_{uv} = I_x sin\theta cos\theta + I_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta) - I_y sin\theta cos\theta} \qquad (6.10c)$$

(6.10a-c) denklemleriyle aslında hedefimize ulaştık. Şimdi bu denklemleri 2θ cinsinden ifade edeceğiz…>>

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Bu trigonometrik eşitlikleri 6.10 denklemlerinde kullanırsak, dönüşüm bağıntılarını 2θ cinsinden alttakii gibi elde ederiz.

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} Cos2\theta - I_{xy} Sin2\theta \tag{6.11a}$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} Cos2\theta + I_{xy} Sin2\theta \tag{6.11b}$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} Sin2\theta + I_{xy} Cos2\theta \tag{6.11c}$$

6.c.2 Atalet momentleri için Mohr Çemberi

6.11a denkleminin soldaki ilk terimini sağa atıp, her iki tarafın karelerini alalım:

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} Cos2\theta - I_{xy} Sin2\theta\right)^2$$

6.11c denkleminin her iki tarafın karelerini alalım:

$$(I_{uv})^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} Sin2\theta + I_{xy} Cos2\theta\right)^2$$

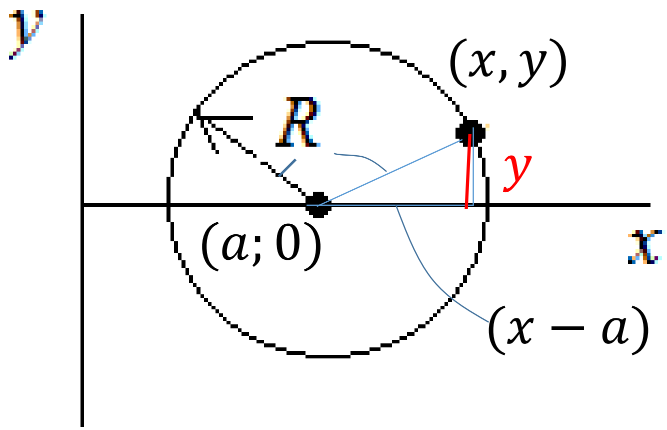
+

Üstteki eşitlikleri taraf tarafa toplayıp düzenlersek:

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + (I_{uv})^2 = \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2\right] \underbrace{(Sin^2 2\theta + Cos^2 2\theta)}_{=1}$$

$$\rightarrow \left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + (I_{uv})^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2$$

Bu son denklemi bir çember denklemine benzetebiliriz. Şöyle ki:....>>



(a;0) merkezli bir Çemberin Denklemi:

$$(x-a)^2 + (y)^2 = R^2$$

Elde ettiğimiz son denklem:

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + (I_{uv})^2 = \underbrace{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}$$

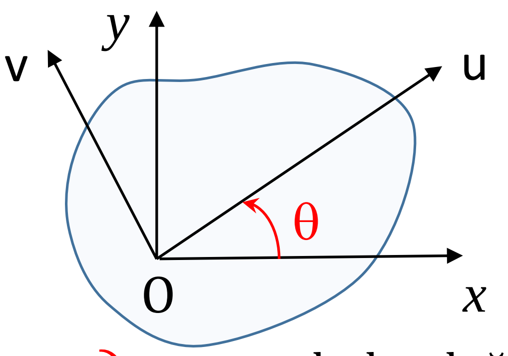
O halde bu son denklemi bir çember ile ifade edebiliriz

Bu çembere **Atalet Momentleri İçin Mohr Çemberi** denir ve bir noktadan geçen tüm eksenlere göre atalet momentlerinin geometrik ifadesidir.

Mohr çemberi, Ölçekli çizilirse, geometrik ölçümlerle de istenen atalet momentleri tespit edilebilir.

6.c.3 Mohr çemberinin çizimi:

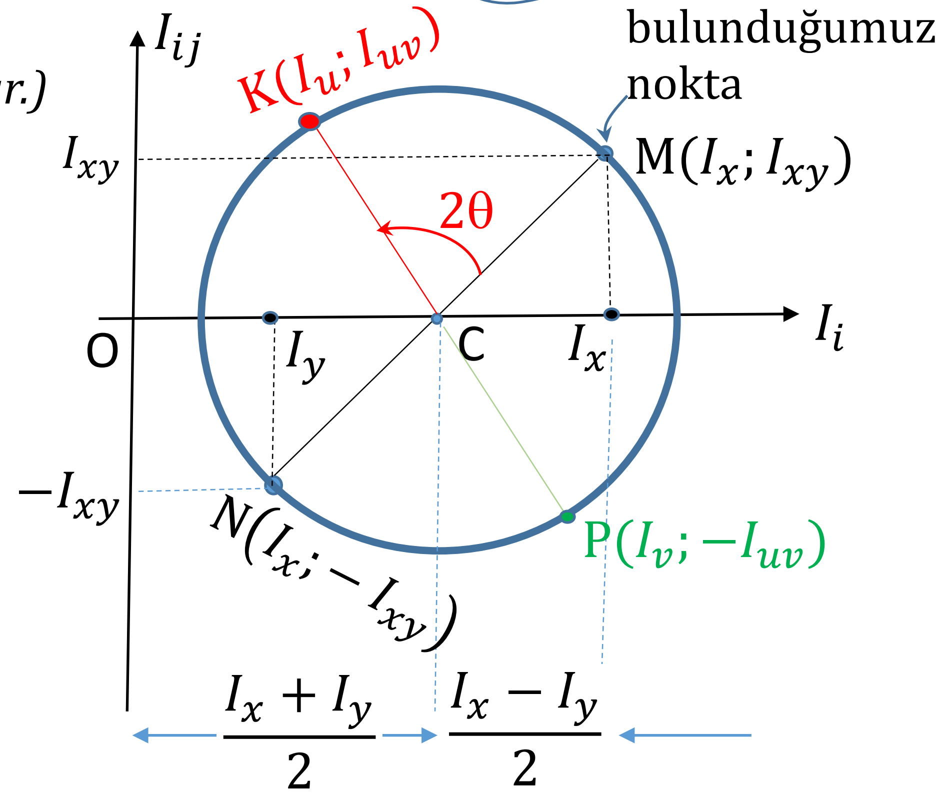
x-y düzlemindeki bir alanın O gibi herhangi bir noktaya yerleştirilmiş x-y eksenlerine göre I_x, I_y *ve* I_{xy} atalet momentleri bilinirse, aşağıdaki 3 adımı takip ederek bu noktadaki Mohr Çemberini ölçekli çizebiliriz:



1- $M(I_x; I_{xy})$ noktası belirlenir. *(çember üzerinde bulunduğumuz noktadır.)*

2- $N(I_x; -I_{xy})$ noktası belirlenir.

3- M-N noktaları birleştirilir ve C merkezli çember çizilir.



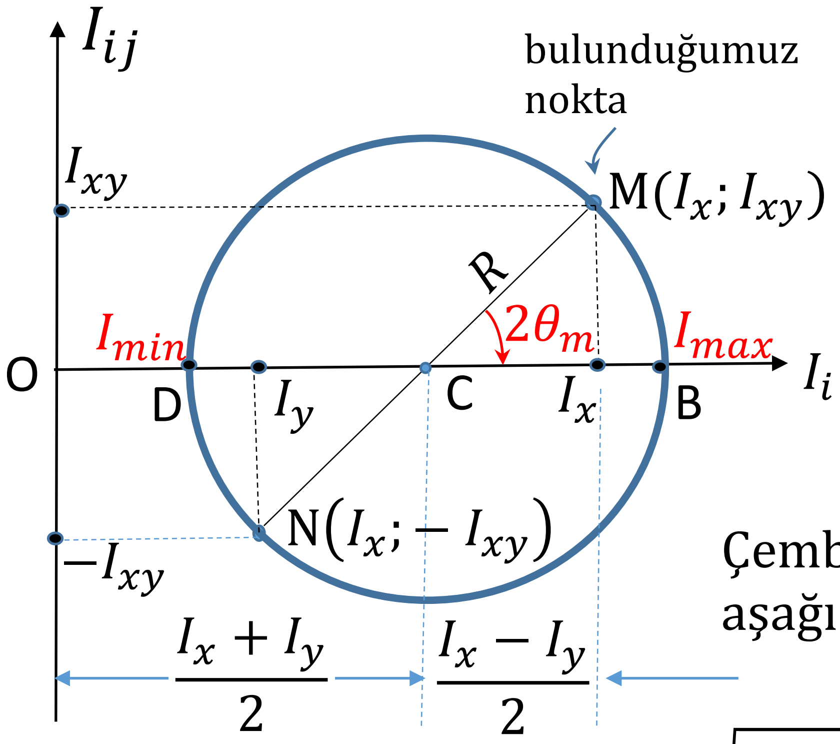
6.c.4) $I_u; I_v$ *ve* I_{uv} değerlerini Mohr Çemberinden Nasıl Buluruz?

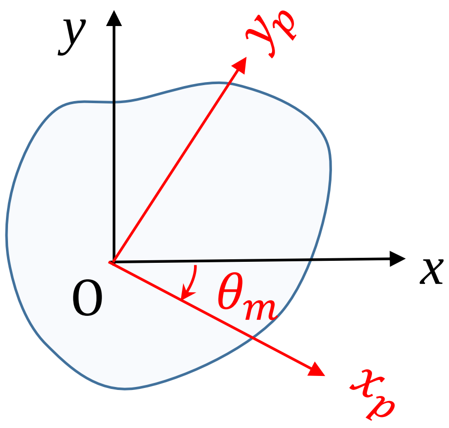
Gerçekte +x ekseninden θ kadar dönülerek +u eksenine gidilir. Çember üzerinde ise bulunduğumuz nokta (M) den itibaren gerçekteki ile aynı yönde 2θ kadar dönülünce çember üzerinde geldiğimiz K noktasının koordinatları aradığımız $I_u; I_{uv}$ değerlerini verir. K dan çemberde 180^0 (gerçekte ise 90^0) dönülürse geldiğimiz nokta P nin koordinatları ise $I_v; -I_{uv}$ değerine eşittir.

6.c.5 Asal Eksenler ve Asal Atalet Momentleri

Dikkat edilirse Mohr Çemberinin x eksenini kestiği noktalarda atalet momentleri maksimum ve minimum değerler alır (I_{max}, I_{min}) ve bu noktalarda çarpım atalet momentleri sıfırdır.

İşte bu atalet momentlerine asal atalet momentleri ve eksenlerine asal atalet eksenleri denir. Maksimum asal atalet ekseni mohr çemberinde bulunduğumuz nokta M'den $2\theta_m$ kadar dönülerek, gerçekte ise +x den aynı yönde θ_m kadar dönülerek bulunur.





x_p, y_p : asal atalet eksenleridir.

Alanın geometrisine göre, birisi maksimum diğeri minimum asal atalet ekseni olur.

I_{max}: maksimum asal atalet momenti

I_{min}: minimum asal atalet momenti

Çemberin geometrisinden aşağıdaki değerler bulunur:

Çemberin yarıçapı: $$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (6.13)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{max} &= OC + CB = \frac{I_x + I_y}{2} + R \\ I_{min} &= OC - CD = \frac{I_x + I_y}{2} - R \end{aligned}\right\}$$

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (6.14)$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{|I_{zy}|}{\left|\frac{I_z - I_y}{2}\right|} \qquad (6.15)$$

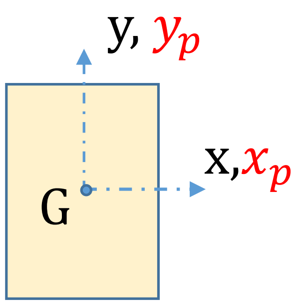
6.c.6) Kesit Şekillerine Göre Asal Eksenler

Eksen takımı **ağırlık merkezine** yerleştirilmiş olan kesitler için şu tespitleri yapabiliriz.

a-) Simetrik Kesitler: Kartezyen eksenlerden en az birisine göre simetrik olan kesitlerde, Kartezyen eksenler aynı zamanda asal eksenlerdir.

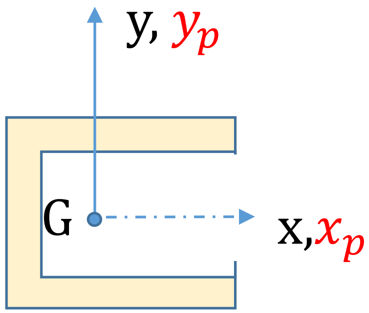
Şeklin geometrisi ve boyutlarına göre x_p ve y_p eksenlerinin birisi maksimum , diğeri minimum asal atalet ekseni olur.

Kesit simetrik olduğu için çarpım atalet momenti sıfırdır. $I_{xy} = 0$



$$I_x = I_{x_p} = I_{max} = \frac{bh^3}{12}$$

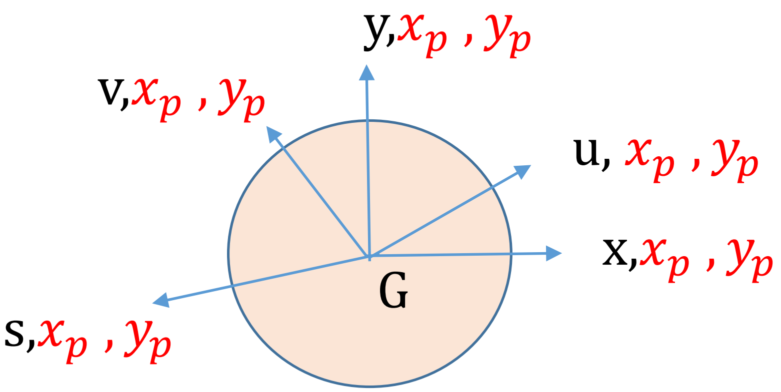
$$I_y = I_{y_p} = I_{min} = \frac{bh^3}{12}$$



$$I_x = I_{min}$$

$$I_y = I_{max}$$

b-)Dairesel kesitler: ağırlık merkezinden geçen tüm eksenler asal eksendir. Çünkü tüm eksenlere göre simetri söz konusudur.



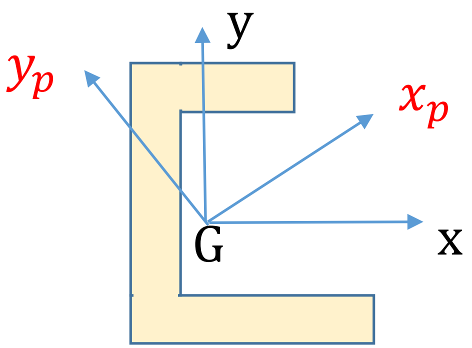
Dairesel kesit tüm eksenlere göre simetrik olduğu için çarpım atalet momenti tüm eksen takımlarına göre sıfırdır. $I_{xy} = I_{\mathrm{uv}} = 0$

$$I_x = I_y = I_u = I_{\mathrm{v}} = I_s = I_{max} = I_{min}$$

---

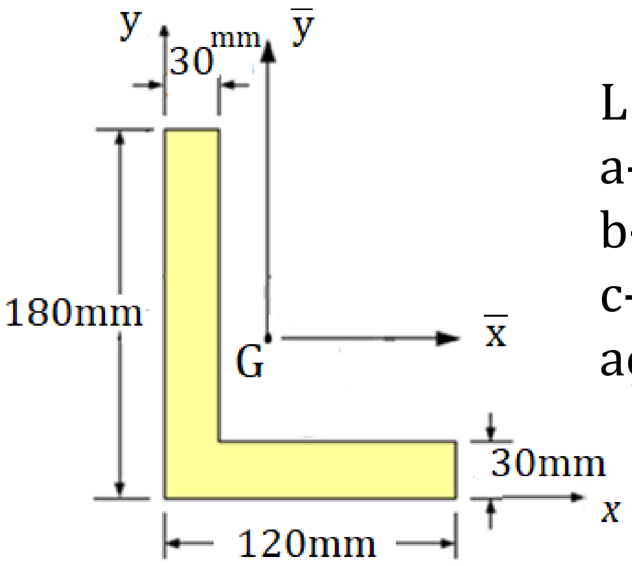
c-) Simetrik olmayan kesitler: Kartezyen eksenlerle Asal Eksenler Çakışmaz.

Kesit simetrik olmadığı için Kartezyen eksenlere göre çarpım atalet momenti sıfırdan farklıdır. $I_{xy} \neq 0$



$I_x\ I_y, I_{max}, I_{min}$ *birbirlerinden farklıdır.*

(Mukavemet dersi için) **Şimdiden aklımızda olsun:** Tüm kesitler için, bileşke eğilme momenti vektörünün doğrultusu asal eksenlerden birisiyle çakışırsa, asal atalet eksen takımına göre basit eğilme söz konusudur.



Örnek 6.c.1 Video 6.c Örnek 6.c.1

L şeklindeki alanın Ağırlık merkezinden geçen,

a-) tüm eksenlere göre atalet momentlerini temsil eden bir geometrik şekil çiziniz.

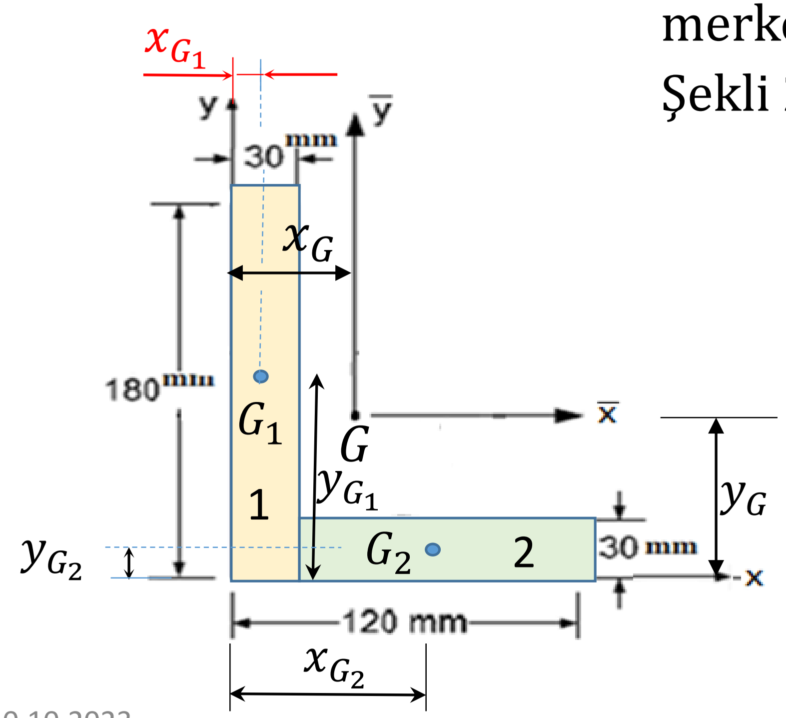
b-) Asal atalet momentlerini ve asal eksenleri belirleyiniz.

c-) G ağırlık merkezinden geçen yatay eksen ($\bar{x}$) ile saat ibreleri tersi yönünde 30^0 açı yapan eksene göre atalet momentini hesaplayınız.

Çözüm: a-) Atalet momentlerine ait Mohr Çemberi çizilmesi isteniyor.

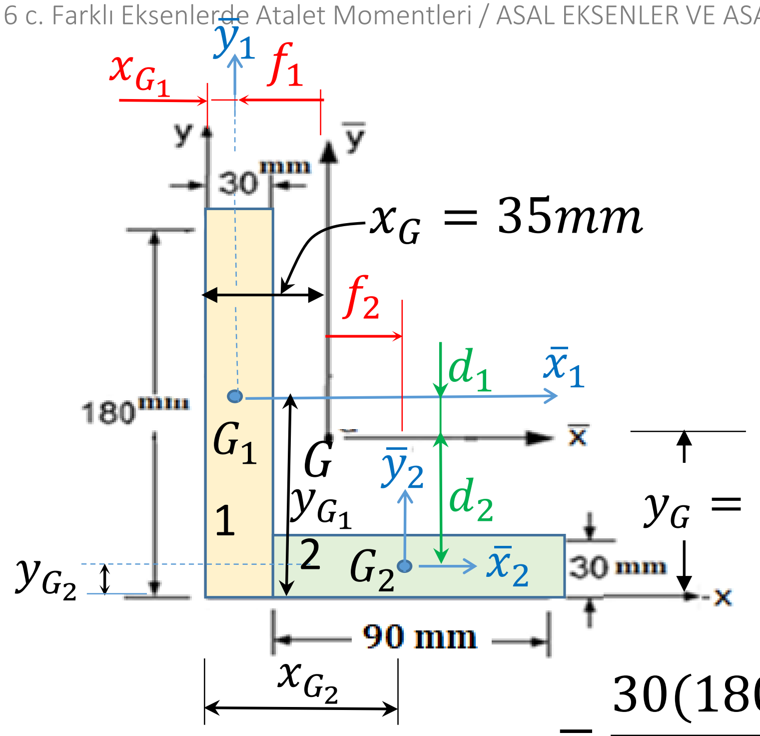
Bunun için önce ağırlık merkezinin koordinatlarını belirlemeli ve sonra ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre $I_{\bar{x}}$, $I_{\bar{y}}$, $I_{\bar{x}\bar{y}}$ atalet momentleri hesaplanmalıdır.

Şekli 2 tane dikdörtgene ayırıp, önce ağırlık merkezinin yerini bulalım:



$$x_G = \frac{A_1 x_{G_1} + A_2 x_{G_2}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{180x30x(15) + 90x30x(75)}{180x30 + 90x30} = 35mm$$

$$y_G = \frac{A_1 y_{G_1} + A_2 y_{G_2}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{180x30x90 + 90x30x15}{180x30 + 90x30} = 65mm$$



$d_1 = 90 - 65 = 25\ mm\,, \qquad d_2 = -(65 - 15) = -50\ mm$

$f_1 = -(35 - 15) = -20\ mm\,, \quad f_2 = 75 - 35 = 40\ mm$

Atalet momentlerinin hesaplanması:

$$I_{\bar{x}} = \sum\left(I_{\bar{x}_i} + A_i d_i^2\right) = I_{\bar{x}_1} + A_1 d_1^2 + I_{\bar{x}_2} + A_2 d_2^2$$

$$= \frac{30(180)^3}{12} + (30)(180)25^2 + \frac{90(30)^3}{12} + (90)(30)(-50)^2 \quad \rightarrow I_{\bar{x}} = 24907500\ mm^4$$

$$I_{\bar{y}} = \sum\left(I_{\bar{y}_i} + A_i f_i^2\right) = \frac{180(30)^3}{12} + (30)(180)(-20)^2 + \frac{30(90)^3}{12} + (90)(30)40^2 \quad \rightarrow I_{\bar{y}} = 8707500\ mm^4$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum\left(I_{\bar{x}_i\bar{y}_i} + A_i d_i f_i\right) = \left[\cancelto{0}{I_{\bar{x}_1\bar{y}_1}} + (30x180)(25)(-20)\right] + \left[\cancelto{0}{I_{\bar{x}_2\bar{y}_2}} + (90x30)(-50)(40)\right]$$

$$\rightarrow I_{\bar{x}\bar{y}} = -8100000\ mm^4$$

En az bir eksene göre simetrik alanların çarpım atalet momenti sıfırdır. Bu sebeple her iki dikdörtgenin kendi ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre çarpım atalet momentleri sıfır olur. $I_{\bar{x}_1\bar{y}_1} = I_{\bar{x}_2\bar{y}_2} = 0$

Bulduğumuz değerler tekrar yazalım: → $I_{\bar{x}} = 24907500\ mm^4$; $I_{\bar{y}} = 8707500\ mm^4$; $I_{\bar{x}\bar{y}} = -8100000\ mm^4$

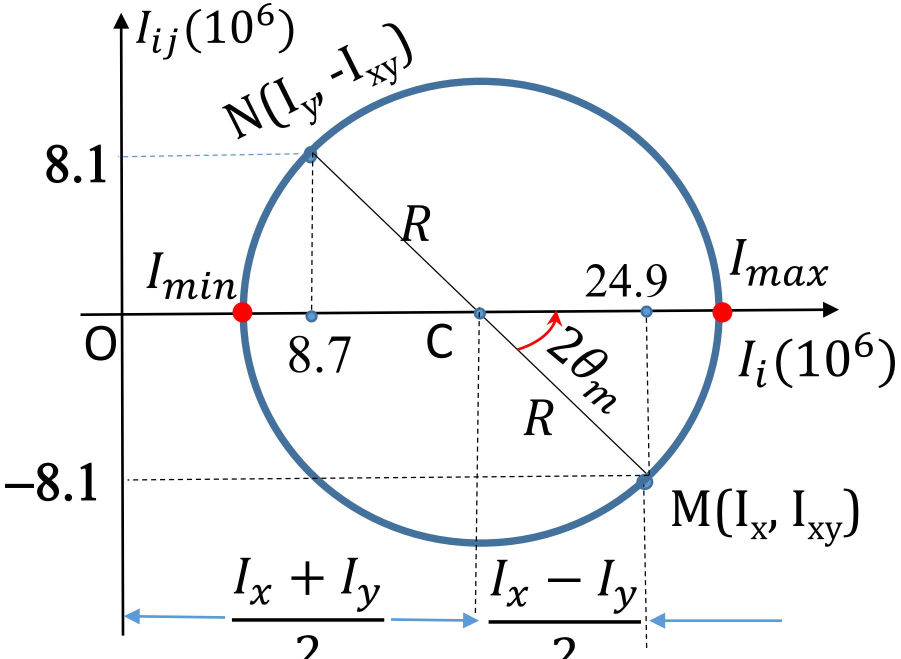
Şimdi 6.c.2 maddesindeki 3 adımı takip ederek Mohr çemberini çizelim:

1- $\mathrm{M}(I_x; I_{xy})$: $M(24907500; -810000)$ (çember üzerinde bulunduğumuz noktadır.)

2- $\mathrm{N}(I_y; -I_{xy})$: $N(8707500; 8100000)$

3- M-N noktaları birleştirilir ve C merkezli çember çizilir.

Bu 3 adımda Mohr çemberini çizmiş olduk.



b-) Asal atalet eksenleri ve momentleri

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \left(\sqrt{\left(\frac{24907500 - 8707500}{2}\right)^2 + 8100000^2}\right) \rightarrow R = 11455130$$

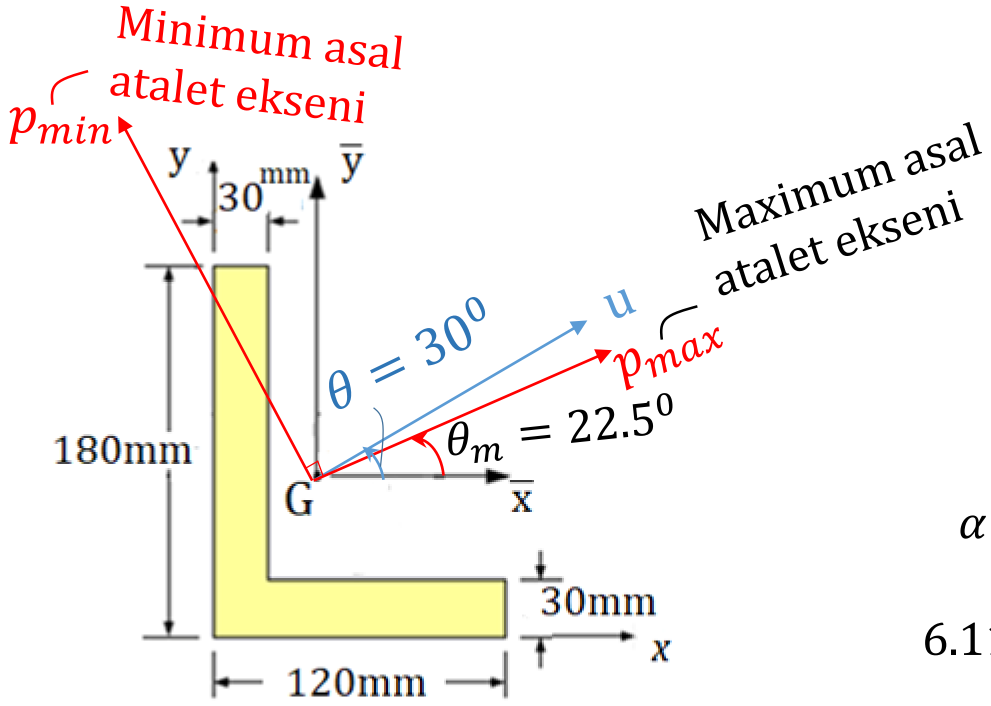
6.14 denkleminden:

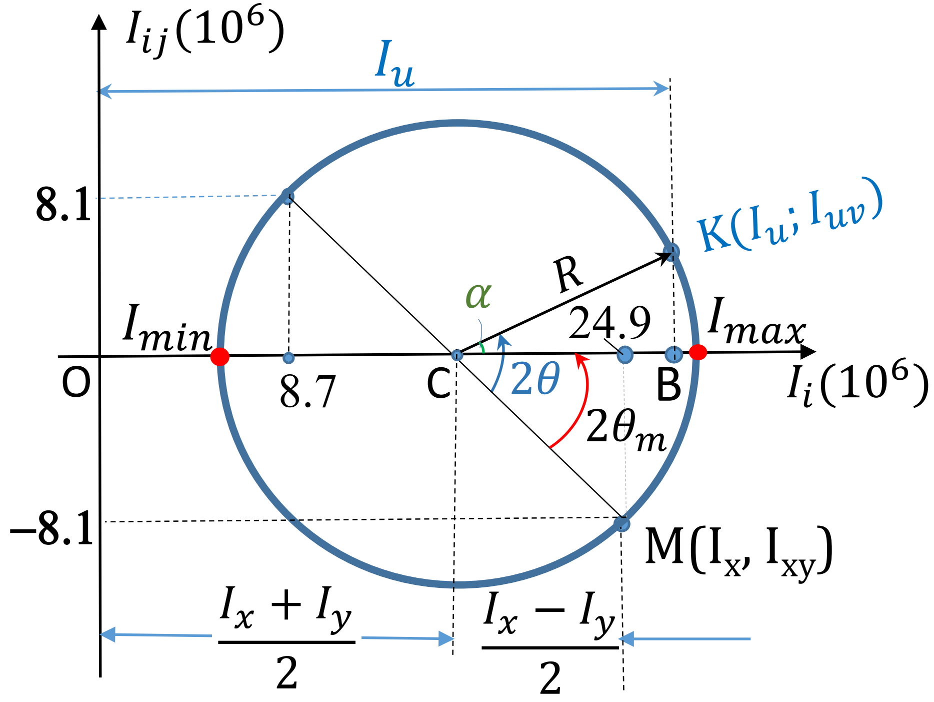
$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm R = \left[\frac{24907500 + 8707500}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{24907500 + 8707500}{2}\right)^2 + 8100000^2}\right.$$

$I_{max} = 28262630 mm^4$

$I_{min} = 5352370 mm^4$

6.15 denkleminden: $\tan 2\theta_m = \dfrac{|I_{xy}|}{\left|\dfrac{I_x - I_y}{2}\right|} = \dfrac{8100000}{\dfrac{24907500 - 8707500}{2}}$ $\rightarrow 2\theta_m = 45^0$ $\rightarrow \theta_m = 22.5^0$





c-) I_u =?

$$\alpha = 2\theta - 2\theta_m$$

$$\alpha = 60^0 - 45^0 = 15^0$$

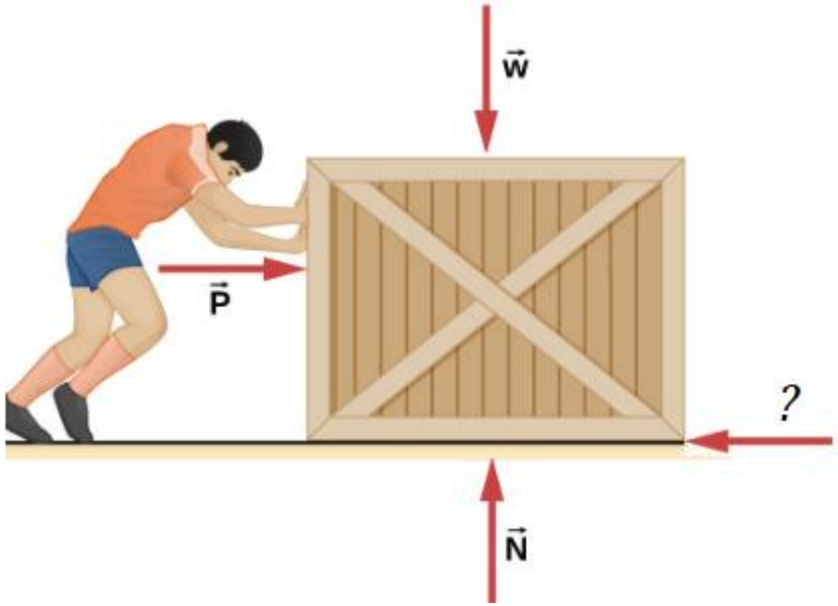
6.11a denkleminden:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} Cos2\theta - I_{xy} Sin2\theta$$

$$= \left(\frac{24907500 + 8707500}{2} + \frac{24907500 - 8707500}{2} Cos60^0 - (-8100000) Sin60^0 \right) \qquad \rightarrow I_u = 27872306 mm^4$$

veya Mohr çemberinden

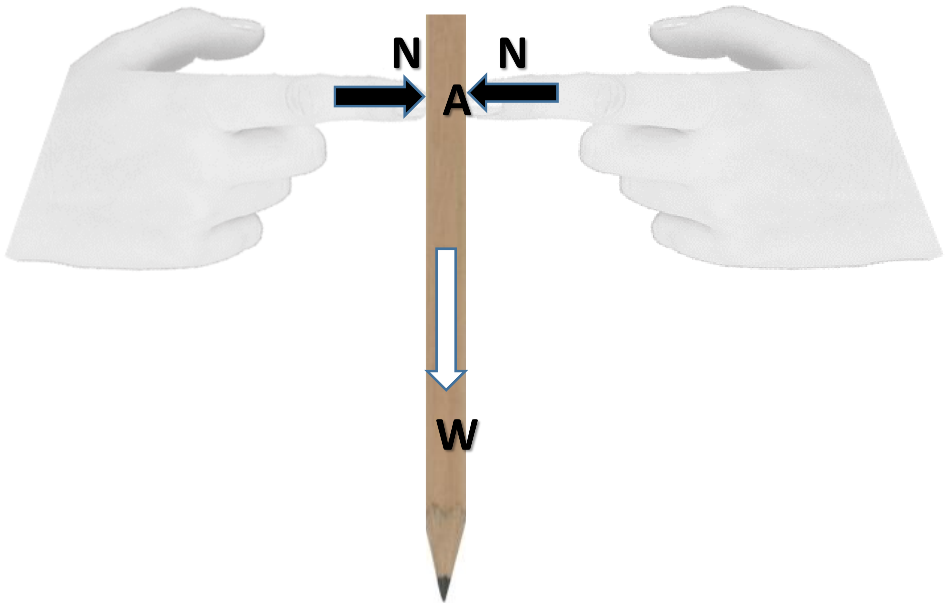
$$I_u = OC + CB \quad = \frac{I_x + I_y}{2} + Rcos\alpha \quad = \frac{24907500 + 8707500}{2} + (11455130)\cos 15^0 \qquad \rightarrow I_u = 27872306 mm^4$$



7. SÜRTÜNME

(Video 7)

7.1 Sürtünmenin varlığını nasıl anlarız?



Bir kalemi iki elinizin işaret parmaklarıyla şekildeki gibi bastırarak dengede tutabiliriz. Kalem dengede olduğuna göre, 3 denge denklemi de sağlanmalıdır:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N - N = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

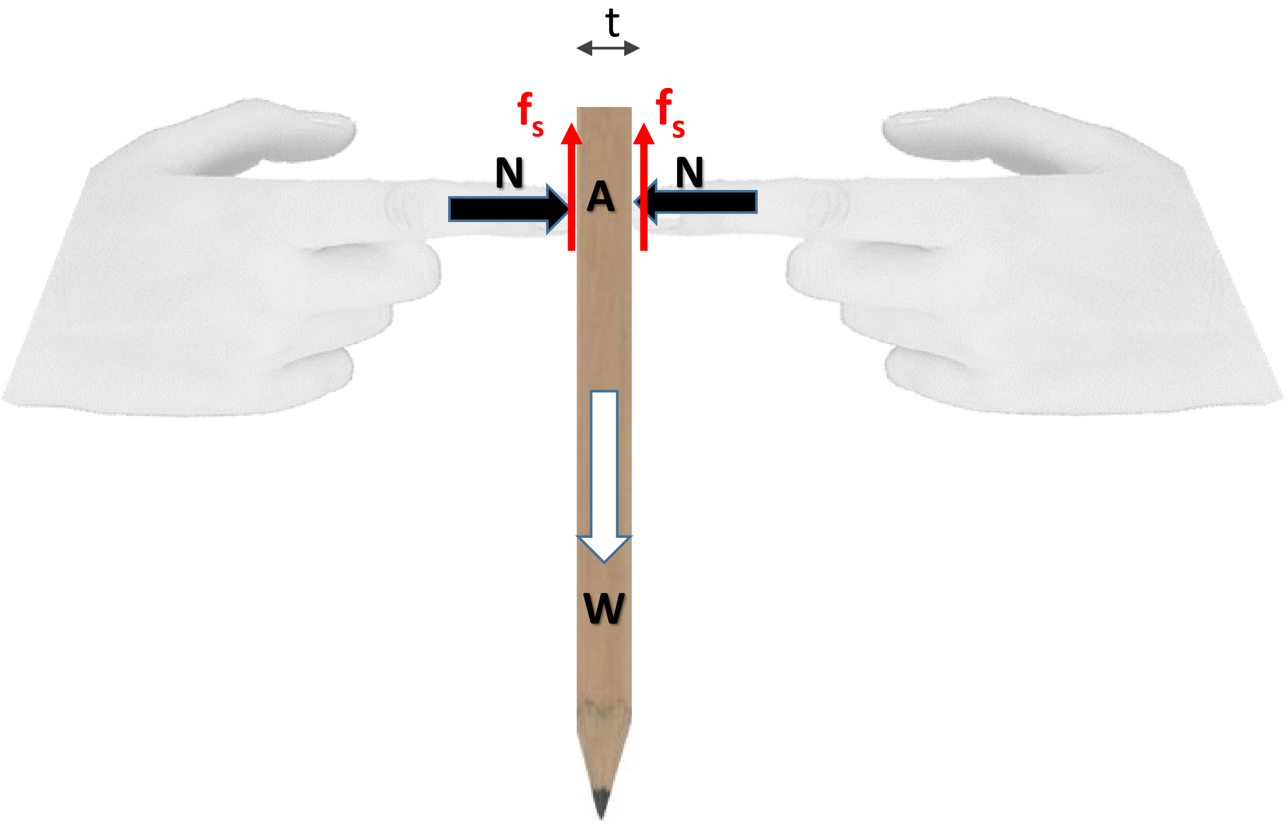
(tüm kuvvetler zaten A noktasından geçtiği için hepsinin momenti sıfırdır. Moment denklemini yazmaya gerek kalmaz.)

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \quad ? - W = 0$$

(Soru: W' yi dengeleyen nedir?)...>>>

Cevap: Sürtünme Kuvvetleridir.

O halde bir önceki SCD eksiktir. Doğru SCD yandaki gibidir. Sürtünme kuvvetleri (f_s) ile W ağırlığı dengelenecektir.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \quad 2\mathrm{f}_s - W = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N - N = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \mathrm{f}_s.\frac{t}{2} - \mathrm{f}_s.\frac{t}{2} = 0$$

7.2 Sürtünme nedir?

Sürtünme bir cismin temas halindeki başka bir cismin veya yüzeyin üzerinde hareketini engellemeye çalışan direnç kuvvetidir. Bu kuvvet, temas yüzeyine paraleldir ve hareketle zıt yöndedir.

7.3 Sürtünme Tipleri:

Üç tip sürtünmeden bahsetmek mümkündür.

1. **Sıvı sürtünme:** Pürüzlü yüzeyler arasında yağ gibi bir akışkan (veya gaz) vardır ve yüzeyler birbirine hiç temas etmezler, aradaki sıvıyla temastadırlar.

2. **Yarı sıvı sürtünme:** Pürüzlü yüzeyler arasında yağ gibi bir akışkan (veya gaz) vardır ve yüzeylerin teması tamamen kesilmemiştir, ayrıca aradaki sıvıyla temastadırlar.

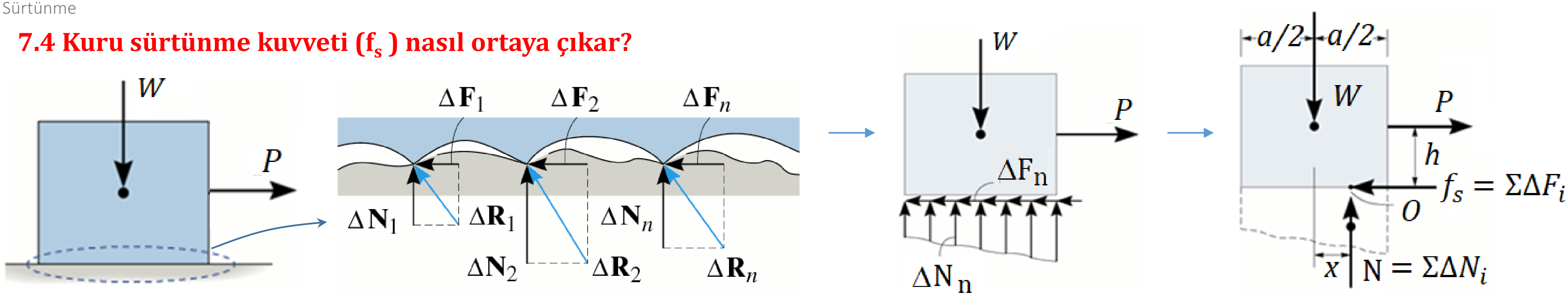
(Tribolojinin konusudur. Makine Elemanları dersinde gösterilebilir))

3. **Kuru sürtünme:** Pürüzlü yüzeyler arasında herhangi bir akışkan yoktur, yüzeyler birbirleriyle temas ederler.

(Statiğin konusudur.)

Biz kuru sürtünme konusu üzerinde duracağız. Amacımız ise kuru sürtünmeli durumda statik dengedeki sistemleri incelemek ve bilinmeyen kuvvetleri hesaplamaktır…>>

7.4 Kuru sürtünme kuvveti (f_s) nasıl ortaya çıkar?



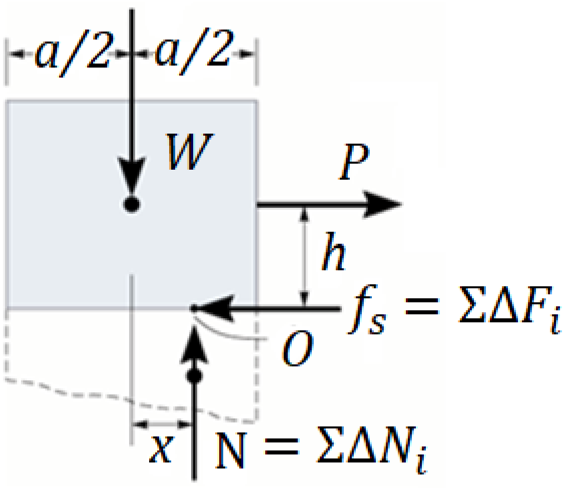
a-) ***Pürüzlü yüzey***

b-) ***Pürüzlü yüzeyin büyütülmüş hali***

c-) ***Herbir noktadaki tepki bileşenleri***

d-) ***Toplam normal tepki ve sürtünme kuvveti***

- İki cismin temasta olduğu pürüzlü yüzeyde küçük seviyede girinti-çıkıntıları her bir noktada farklı olabilir.
- Herbir noktadaki yüzeyden gelen bileşke tepkiler ($\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots \Delta R_n$) farklı şiddette ve yönde olabilir.
- Bu durumda bileşke tepkilerin yatay ve düşey bileşenleri ($\Delta N_1, \Delta N_2, \ldots \Delta N_n$; ΔF_1, ΔF_2, ...ΔF_n) farklı şiddetlere sahip olacaktır.
- Tüm düşey bileşenlerin toplamı = Toplam Normal Tepki Kuvveti : $N = \Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots \Delta N_n$
- Tüm yatay bileşenlerin toplamı = Toplam Sürtünme Kuvveti : $f_s = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \cdots \Delta F_n$

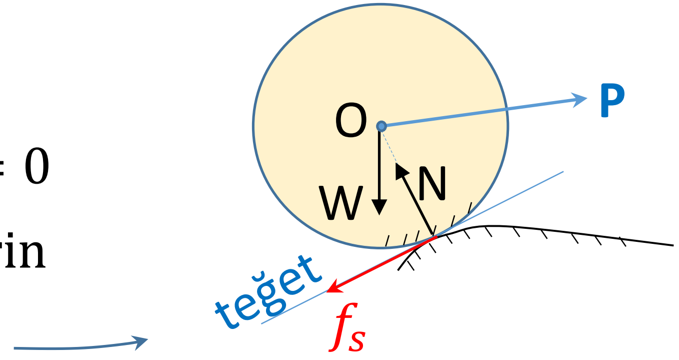


- Her bir ΔN bileşeni farklı şiddete sahip olabileceği için toplam normal tepki kuvveti (N) nin yeri x kadarlık bir mesafedeki O gibi bir noktaya karşılık gelir. Toplam sürtünme kuvveti (f_s) nin yeri ise yatay çizgi üzerinde başka bir noktaya karşılık gelebilir (fakat bu f_s in moment değerini değiştirmeyeceğinden yeri önemli olmayacaktır.)

- Statik dengenin bozulmaması için üstteki cismin hareket etmemesi ve devrilmemesi (dönmemesi) gerekir. Bunun için ise statik denge denklemleri sağlanmalıdır.

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P - f_s = 0 \quad ; \Sigma F_y = 0 \rightarrow N - W = 0 \quad ;\Sigma M_o = 0 \rightarrow W.x - P.h = 0$$

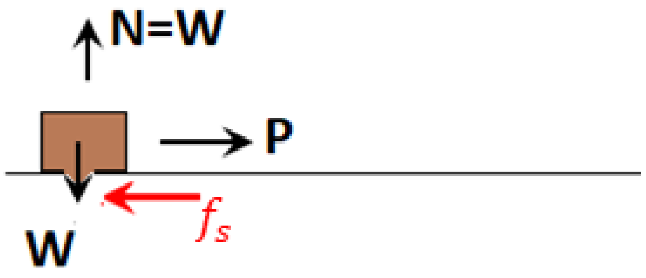
- Etkileşen temas halindeki yüzeyler eğrisel ise sürtünme kuvveti yüzeylerin ortak teğeti doğrultusunda olacaktır.

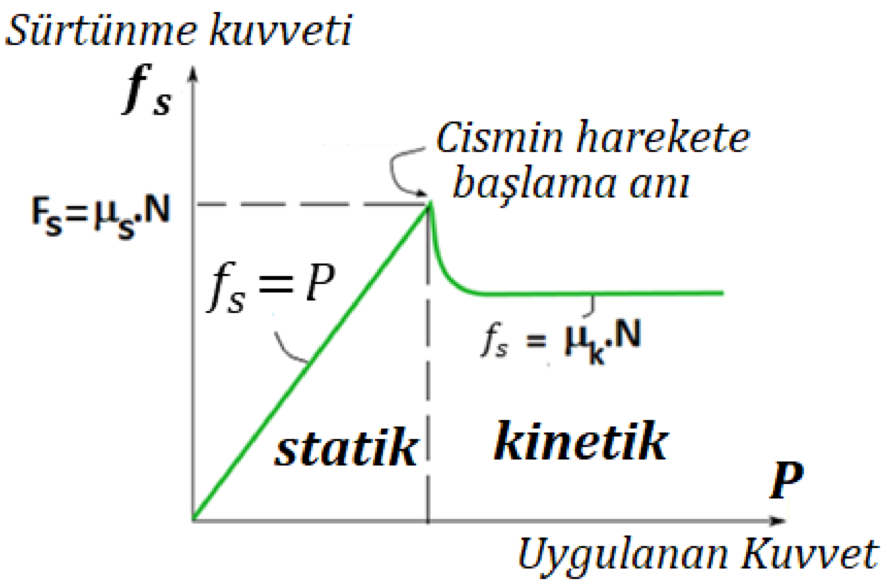


- P kuvveti arttıkça sürtünme kuvveti de artar ve denge belli bir süre bozulmaz. Ancak belli bir P sınır değerinden sonra denge bozulur ve cisim hareket eder. Şimdi dengenin bozulacağı ve hareketin başlayacağı sınır durumu inceleyeceğiz…>>

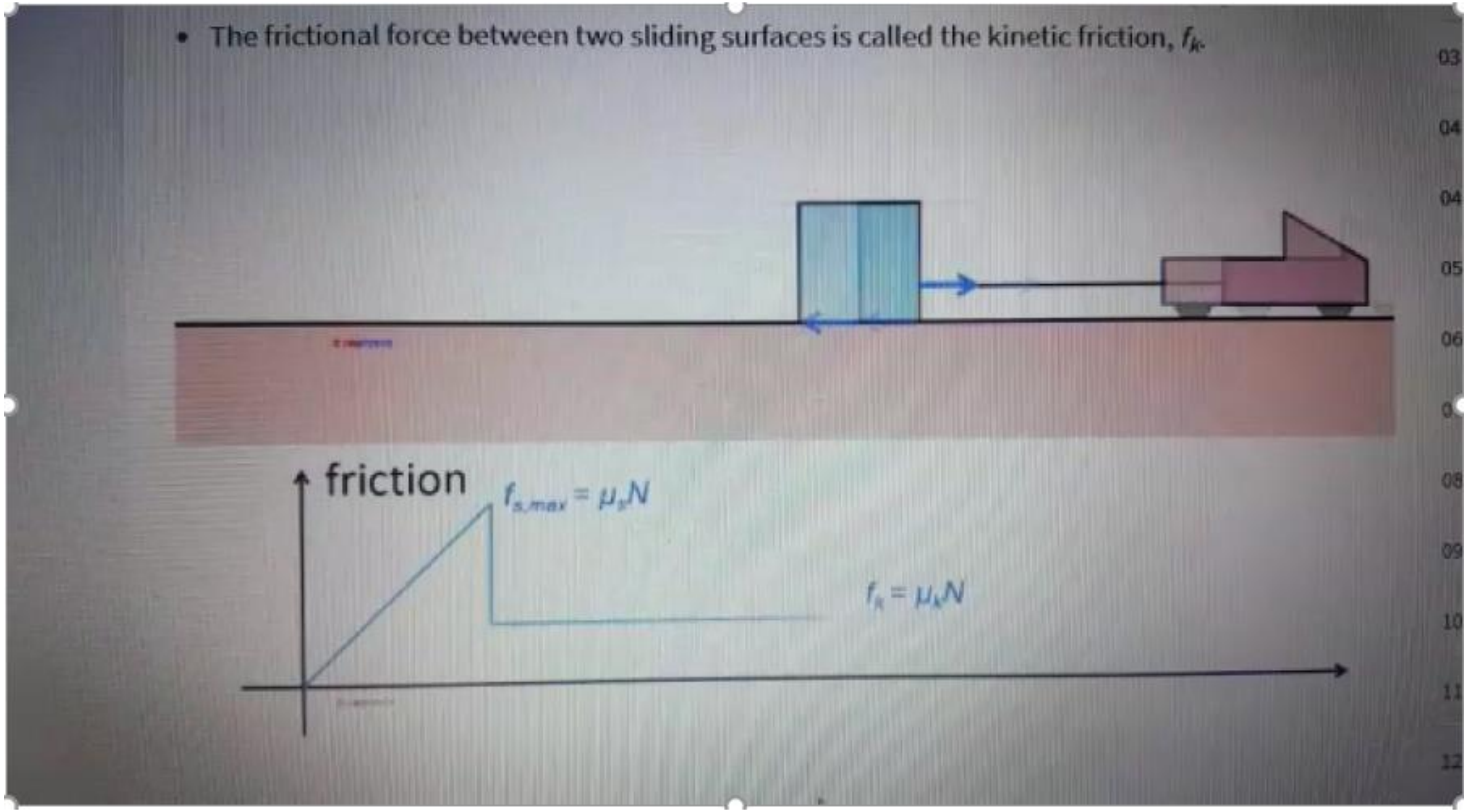
7.5 Denge Sınırı ve Statik ve Kinetik Sürtünme Katsayıları

- Şimdi sürtünmeli bir zeminde bulunan bir sandığı hareket ettirmek için P yatay kuvvetini uygulayacağız. P kuvvetini sıfırdan itibaren yavaş yavaş arttıracağız.
- Belli bir değere kadar sandık yerinden kıpırdamayacaktır. Çünkü o değere kadar sürtünme kuvveti (f_s), P kuvvetine her an eşit şiddette olacak ve P nin artmasıyla f_s de artacaktır.
- Sınır durumda yani sandığın hareket başlayacağı anda, f_s maksimum değerindedir ve μ_s.N değerine eşittir. Bu değeri özel olarak F_s ile gösteririz. ($F_s = f_{s\text{-max}} = \mu_s$.N).
- Burada μ_s statik sürtünme katsayısı ismini verdiğimiz, sürtünen yüzeylerin pürüzlülüğünü ifade eden bir katsayısıdır.
- 0 ile 1 arasında değişen μ_s değeri, 1'e ne kadar yakın ise yüzeyler arasındaki pürüzlülük o kadar fazladır. 0'a ne kadar yakın ise yüzeyler arası pürüzlülük azdır yani daha kaygan bir durum söz konusudur.
- Cisim harekete başladıktan hemen sonra sürtünme katsayısı biraz düşmekte ve kinetik sürtünme katsayısı ismini verdiğimiz μ_k değerine inmektedir. Bu durumda hareket sırasında sürtünme kuvveti μ_k.N değerine eşit olur.



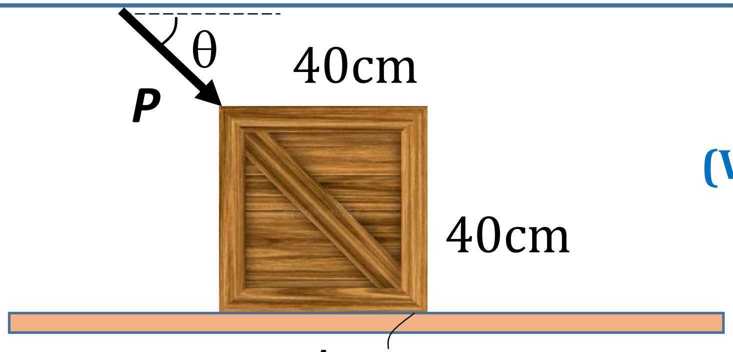


Statik ve Kinetik Sürtünme Katsayılarının Etkileri.



Örnek 7.1

(Video 7- Örn 7.1)



A $\mu_s = 0.25,\ \mu_k = 0.20$

Hareketsiz halde A noktasında bulunan , 40cm x 40cm x 40cm boyutlarında, 400 N ağırlığındaki kübik kutuya, yatayla θ = 60° açı yapacak şekilde bir P kuvveti etki ettirilecektir. Sandık ile yüzey arasındaki statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.25$ ve kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.2$ olduğuna göre, sandığa etki edecek f_s sürtünme kuvvetini,

a-) P= 250N için,

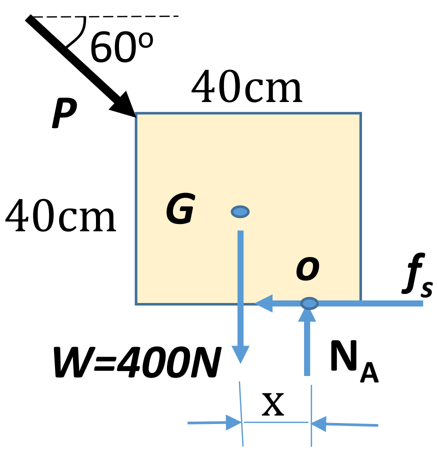
b-) P = 500 N için hesaplayınız.

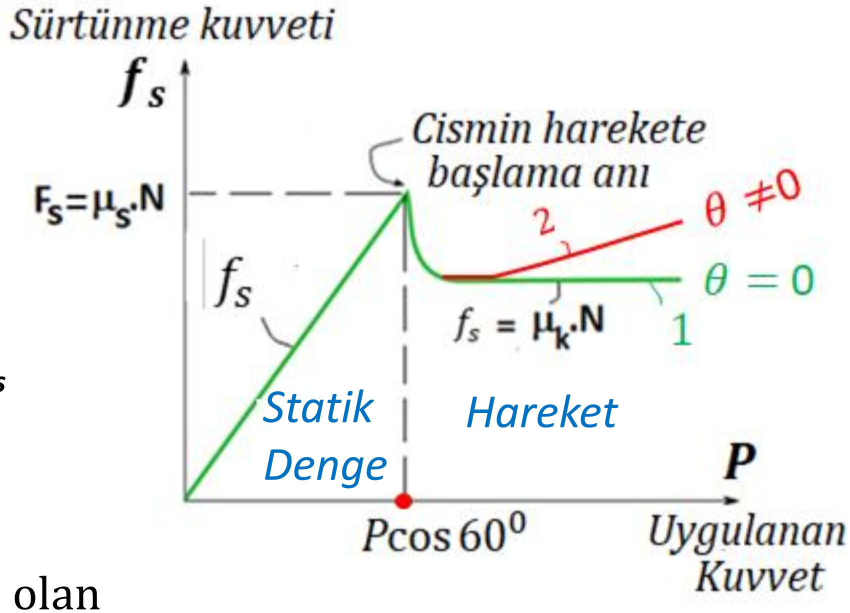
c-) P= 300N değeri için, sürtünme kuvvetini ve çubuğun devrilmemesi için zeminden gelen bileşke tepkinin konumunun sınır değerini belirleyiniz (x=?).

Çözüm:

Öncelikle Statik dengenin bozulup hareketin başlayacağı sınır durumda P kuvvetini bulalım:

SCD





Harekete başlama anı olan

Sınır durumda sürtünme kuvveti : $F_s = \mu_s N_A$ (I)

$$\Sigma F_x = 0 \ \rightarrow P\cos\theta - F_s = 0 \quad \rightarrow P\cos 60^0 - \mu_s N_A = 0$$

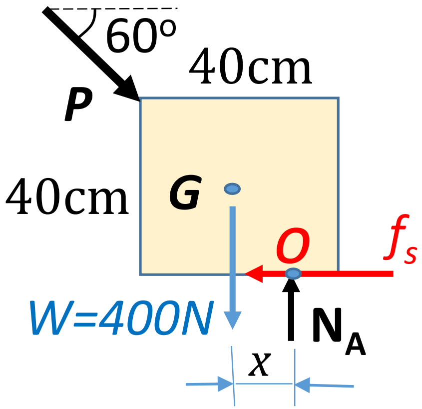
$$\rightarrow 0.5P - 0.25N_A = 0 \ \rightarrow N_A = 2P$$

$$\Sigma F_y = 0 \ \rightarrow N_A - W - P\sin 60^0 = 0$$

$$\rightarrow 2P - 400 - 0.866P = 0 \ \boxed{\rightarrow P = 352.73N}$$

(sınır değer)

Bu değerin üstünde statik denge bozulur.



a-) P = 250 N için, sınır değer aşılmadığından (250 < 352.73) statik denge söz konusudur.
(Bu şık için Kutunun devrilmediği de kabul edilmiştir.)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow P\cos 60^0 - f_S = 0 \quad \rightarrow f_S = 250\cos 60^0 \quad \rightarrow f_S = 125N$$

b-) P = 500 N için, sınır değer aşılır (500 > 352.73) , kutu hareket halindedir ve kinetik sürt.kats. (μ_k) etkindir.

$$\Sigma F_y = 0 \ \rightarrow N_A - W - P\sin 60^0 = 0 \rightarrow N_A = W + P\sin 60^0 \quad \text{(II)} \quad \rightarrow N_A = 400 + 500 sin60^0 \ \rightarrow N_A = 833N$$

Hareket halinde iken sürtünme kuvveti :$\rightarrow f_S = \mu_k N_A$ (III) $\rightarrow f_S = 0.2(833)$ $\rightarrow f_S = 166.6\ N$

c-) P = 300 N için, sınır değer aşılmadığından (300 <352.73)statik denge söz konusudur.

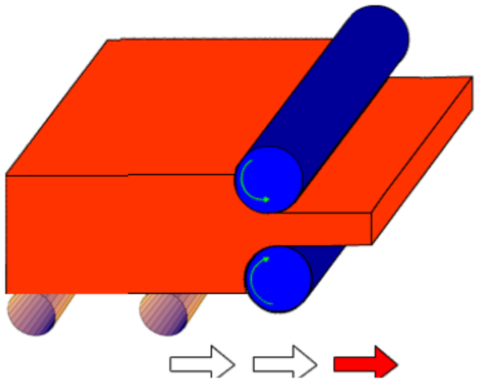
$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow P\cos 60^0 - f_S = 0 \quad \rightarrow f_S = 300\cos 60^0 = 150N$$

(bu değerin üstünde kutu devrilir.)

Devrilmeme şartı: $\Sigma M_o = 0 \rightarrow W.x + Psin60^0.(20+x) - Pcos60^0(40) = 0$

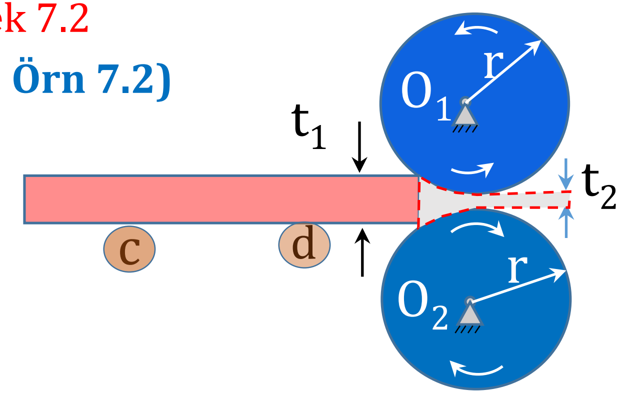
$$\rightarrow 400.x + 300sin60^0.(20+x) - 300cos60^0(40) = 0 \quad \rightarrow x \cong 1.22cm$$

- *P açılı geldiğinden, P'nin N_A ve dolayısıyla f_s üzerinde etkisi vardır (II ve III denklemi geçerlidir.). Bu sebeple diyagramdaki kinetik bölgede 2 doğrusu geçerlidir. (μ_k sabit kabul edilmiştir.)*
- *(P=500N için x yönünde statik denge sağlanmaz ve ivmeli hareket söz konusudur. İvmeyi hesaplarsak:*
  $\Sigma F_x = ma_x \quad \rightarrow P\cos 60^0 - f_S = ma_x \quad \rightarrow 500\cos 60^0 - 166.6 = \left(400/9.81\right)a_x \quad \rightarrow a_x = 2.04 m/s^2$



Örnek 7.2

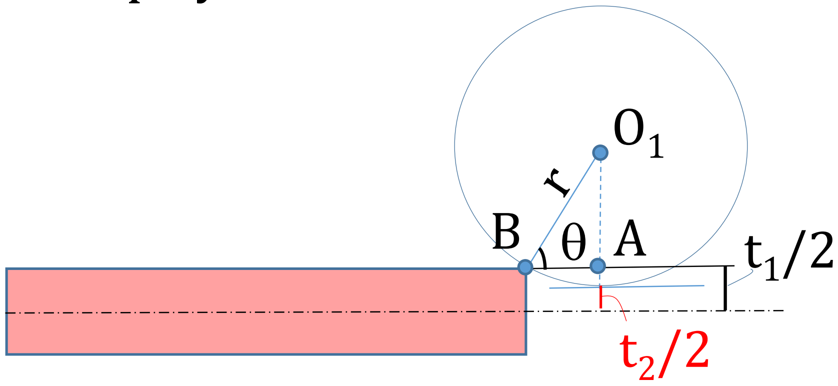
(Video 7- Örn 7.2)



Haddeleme makinasına sokulan $t_1 = 120mm$ kalınlığındaki metalik bir levha c ve d sürtünmesiz tekerleri üzerinden kaydırılarak ve r = 300mm yarıçaplarındaki sürtünmeli silindirler arasından geçirilerek $t_2 = 94.7mm$ kalınlığına indirilmek istenmektedir. Levhayı silindirler arasına itmek için silindirlerle levha arasında olması gereken statik sürtünme katsayısının minimum değerini hesaplayınız.

Çözüm:

Öncelikle geometriden θ açısını hesaplayalım:

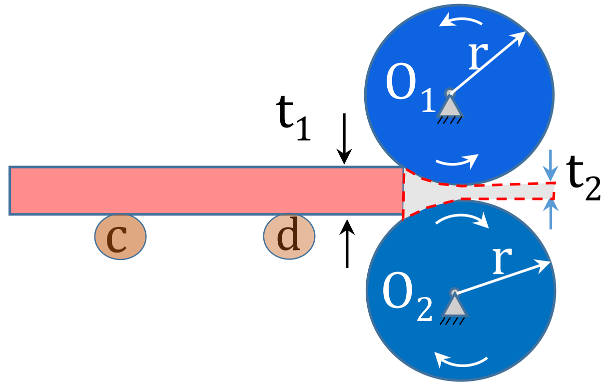


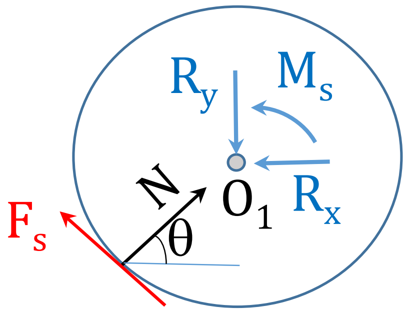
$$sin\theta = \frac{O_1A}{O_1B} = \frac{r + {t_2}/{2} - {t_1}/{2}}{r}$$

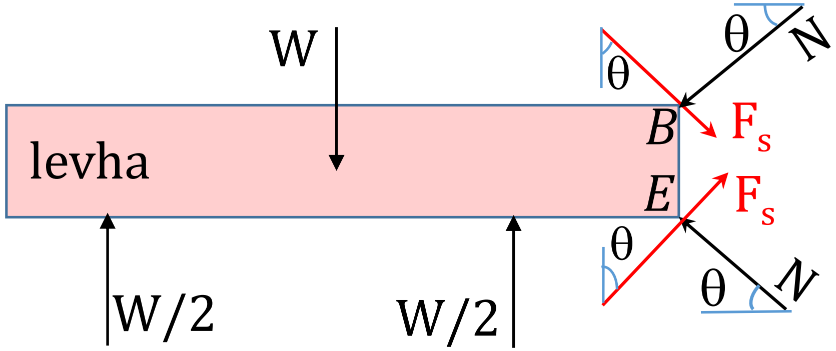
$$= \frac{300 + {94.7}/{2} - {120}/{2}}{300} = 0.96$$

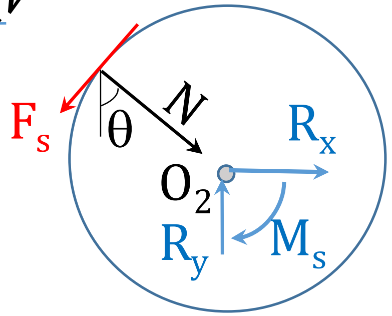
$$\rightarrow \theta = 73.3^o$$

..>>









- *Levhanın ağırlığını c ve d tekerlekleri dengeler. Levhanın silindirlere temas noktaları olan B ve E noktalarında F_s ve N tepkilerinin düşey bileşenleri simetriden dolayı birbirini dengeler.* $(\Sigma F_y = 0)$
- *Silindirlerin dengesi, merkezindeki yatakta ortaya çıkan tepki kuvvetleri (R_x , R_y) ve sürtünme momenti (M_s) ile sağlanır.*
- *Levhanın hareket edeceği anda sürtünme kuvveti $F_s = \mu_s N$ olur.*
- *Silindirler arası boşluk levhanın son kalınlığı t_2 ye eşit olmalıdır.*
- *Sürtünme kuvvetleri temas noktalarındaki teğet yönünde etki eder. N tepkileri teğete dik ve dolaysıyla silindir merkezine doğrudur.*

SCD çizimleri:

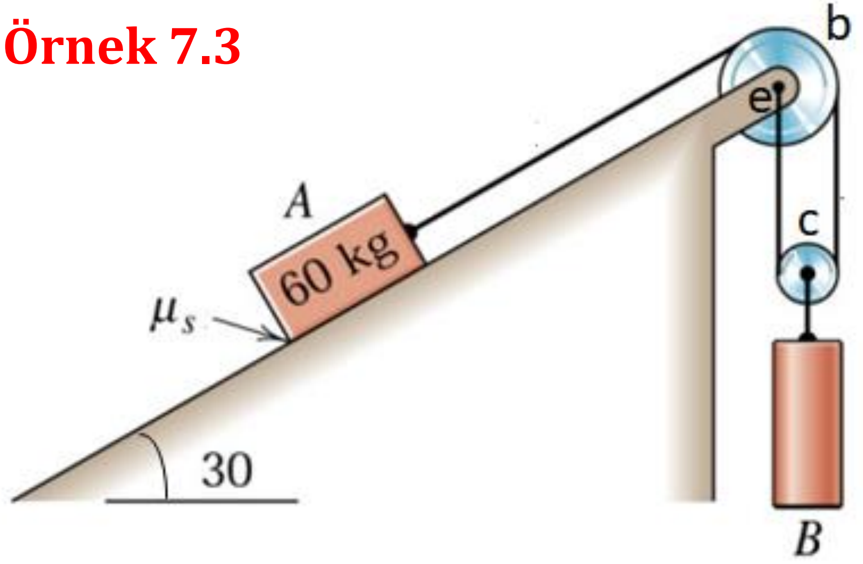
$(\theta = 73.3^o$ bulunmuştu)

Harekete başlayacağı anda,
Levhanın *x* yönündeki dengesinden:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow 2F_s sin\theta - 2Ncos\theta \; = \; 2\mu_s N sin\theta - 2Ncos\theta = 0$$

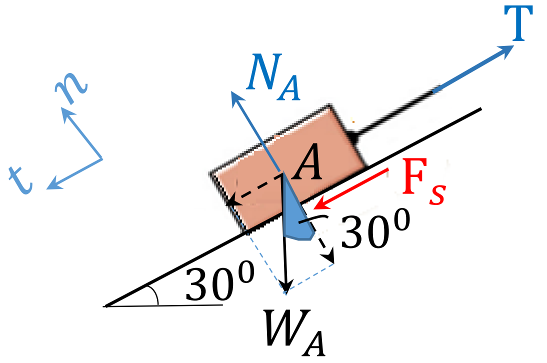
$$\rightarrow \mu_s = \frac{cos\theta}{sin\theta} = cotan\theta \; = cotan\,(73.3^o) \; \rightarrow \; \mu_s = 0.3 \; = \mu_{s-min}$$

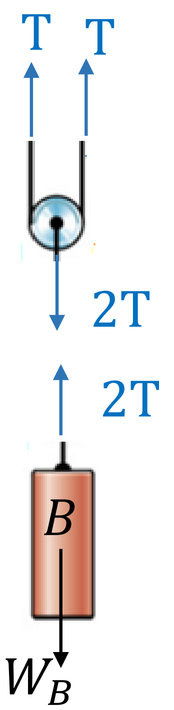
Örnek 7.3



Şekildeki sistemde A kütlesi ile 30^0 lik eğik düzlem arasında statik sürtünme katsayısı μ_s=0.25 dir. A kütlesini yukarı doğru harekete geçirmek için c makarasına asılması gereken minimum B kütlesini değerini hesaplayınız. Sistemde tek ip vardır.

Cevap: $m_{B_{min}} = 85.98kg$





Tek ip olduğundan ipin tüm kısımlarında tek germe kuvveti(T) oluşur.

A cisminin statik dengesinden:

$$\sum F_n = 0$$

$$N_A - W_A \cos 30^0 = 0$$

$$N_A - (60)(9.81)\cos 30^0 = 0$$

$$\rightarrow N_A = 509.74N$$

Dengenin bozulacağı sınır anı için

$$F_s = \mu_s N_A = (0.25)(509.74)$$

$$\rightarrow F_s = 127.43N$$

$$\sum F_t = 0 \quad \rightarrow W_A \sin 30^0 + F_s - T = 0$$

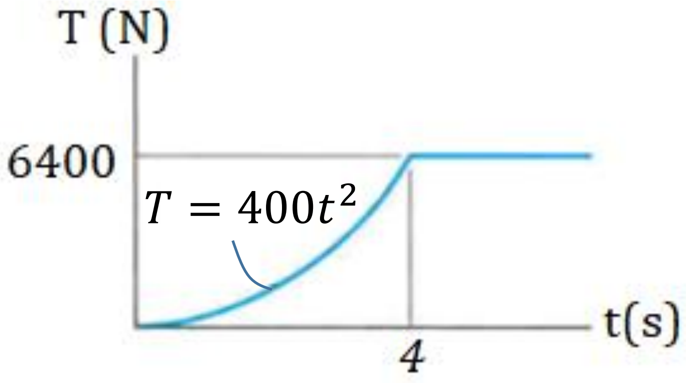
$$\rightarrow (60)9.81 \sin 30^0 + 127.43 - T = 0 \quad \rightarrow T = 421.73N$$

B cisminin statik dengesinden:

$9.81m/s^2$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow 2T - W_{B_{min}} = 0 \quad \rightarrow (2)(421.73) - m_{B_{min}} g = 0$$

Statik dengeyi bozacak olan minimum B kütlesi: $\rightarrow m_{B_{min}} = 85.98kg$



Örnek 7.4 (*): Bir halat, bir ucundan 500kg kütleli B zemine yatırılmış büyük bir boruya, diğer ucundan ise bir motora bağlanmıştır. Motorun çalıştırılmasıyla halatta oluşan T kuvveti yardımıyla boru çekilmektedir. T kuvvetinin zamana bağlı değişim grafiği şekildeki gibidir. Boruyla zemin arasındaki kinetik ve statik sürtünme katsayıları sırasıyla μ_k= 0.3 ve μ_s= 0.5 olduğuna göre; motorun çalıştırılmasından 3 saniye sonra boruya zeminden etki eden sürtünme kuvvetini hesaplayınız. (**Cevap**: $1471.5N$)