



Püf Noktalarıyla

# MUKAVEMET - 2

## Ders Notları

(Son Güncelleme 03.12.2023)

Prof. Dr. Mehmet Zor  
Dokuz Eylül Üniversitesi – Makine Mühendisliği Bölümü

## Önsöz

### Değerli Öğrenciler ve Araştırmacılar

Katı cisimlerden oluşan sistemlerin tasarım aşamasında, dayanım ve işlevsellik açısından optimum boyutlarının belirlenmesi Mukavemet biliminin temel konusudur. Statik bilgisi üstüne yapılabilecek olan mukavemet hesapları, yükleme tipine ve bazen de geometriye göre farklılık arz etmektedir. Gerilme, şekil değiştirme gibi temel kavramların yanısıra gerçek hayatta en çok karşımıza çıkan, çeki-bası, millerin burulması, basit eğilme gibi yüklemeler için boyutlandırma hesaplamaları; ayrıca akma ve kırılma kriterleri, mohr çemberi, bileşik yüklemeler gibi temel konular Mukavemet 1 dersinde anlatılmıştır. Mukavemet 2 dersi ise genel olarak Mukavemet 1 konularının devamı ve daha özel halleri niteliğindedir. Örneğin Mukavemet 1 dersinde burulma konusu sadece dairesel kesitler için anlatılmış iken, gerçek hayatta daha az rastlanan dairesel olmayan kesitlere sahip elemanların burulması, Mukavemet 2 dersi kapsamına alınmıştır. Bununla birlikte, yorulma, burkulma, enerji metodları gibi sadece Mukavemet 2 de anlatılan bağımsız ve çok önemli konuların da olduğunu söylememiz gerekir. Bu sebeplerle Mukavemet 1 deki temel kavramların ve konuların iyi anlaşılması, bunların devamı niteliğindeki Mukavemet 2 konularının da anlaşılmasında son derece gerekli bir şarttır. Flinizdeki bu notlarla Mukavemet 2 dersinin kapsamına giren birçok konuyu basit ve dostane bir üslupla ve yine önemli püf noktalarını vurgulayarak, örnekler çözerek anlatmaya gayret ettim. Konuları çalışmaya başlamadan önce Mukavemet 1 notlarını öncelikle bir kez tekrar edip hatırlanmanızı özellikle tavsiye eder, notlarımın tüm öğrencilere, akademisyenlere ve araştırmacılara faydası olmasını dilerim.

Jemmuz 2023  
Prof. Dr. Mehmet Zor

## Mukavemet 2 Konuları

- 1 *3 Boyutta Gerilme Dönüşümleri ve 3 Boyutlu Mohr Çemberi*
- 2 *Eğik Eğilme (Simetrik Olmayan Eğilme)*
- 3.1 Elastik Eğri-1-Analitik Yöntem (İntegrasyon Metodu)
- 3.2 Elastik Egri -2- Moment Alanı Metodu
- 3.3 Elastik Egri -3-Eşlenik Çubuk Metodu
- 3.4 Elastik Egri-4-Süperpozisyon Metodu ve Hiperstatik Sistemler
- 4 Kesmeli Eğilmede Kayma Merkezi
- 5.1 Enerji Metodları-1 / Şekil Değiştirme İşi ve Enerjisi
- 5.2.a Enerji Metodları-2/ Castigliona Teoremleri -1/ Örnekli Konu Anlatımı
- 5.2.b Enerji Metodları-3/Castigliona Teoremleri -2 / Örnek Problemler -1 / Doğrusal Eksenli Çubuklar
- 5.2.c Enerji Metodları-4 / Castigliona Teoremleri-3/Örnek Problemler -2 / Eğrisel Eksenli Çubuklar
- 5.3 Enerji Metodları -5 / Elasto Kinetik Tesirler
- 6.a Kolonların Burkulması -1 /Örnekli Konu Anlatımı
- 6.b Kolonların Burkulması -2 / Örnek Problemler
- 7 Eğri Eksenli Çubukların Eğilmesi
- 8 Düzlemde Gerilme Dönüşümleri ve Strainage Ölçümleri ile Deneysel Gerilme Tespitleri
- 9 İnce Cidarlı Kapalı Tüplerin Burulması
- 10 Dikdörtgen veya İnce Profil Kesitli Çubukların Burulması
- 12 Yorulma (Tekrarlı Yüklemeler)
- \* *İleride yeni konular eklenebilir.*

## **Güncelleme Farkları**

*17.07.2023 tarihli eski ders notlarındaki örnekler kontrol edilerek birkaç hata tespit edilmiş ve düzeltilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarındaki şekiller, metinler ve denklemler kontrol edilmiş bazı düzeltmeler yapılmıştır. Bazı sayfalar yeniden düzenlenmiştir. Tüm düzeltmeler ilgili kısımlarda **kırmızı** ile yazılmış ve belirginleştirilmiştir. Yeni bir konu veya yeni örnek eklenmemiştir.*

### **WEB SİTEM: [mehmetzor.com](http://mehmetzor.com)**

a - Ders Eğitim Videoları (Herbir konunun örneklerle anlatıldığı videolardır.)

b- Ders Notları.pdf (bu notlar ve diğer derslere ait notlar ve sınav soruları)

### **Not:**

**Kendi dersinde bu notları takip etmek isteyen öğretim üyeleri ile**

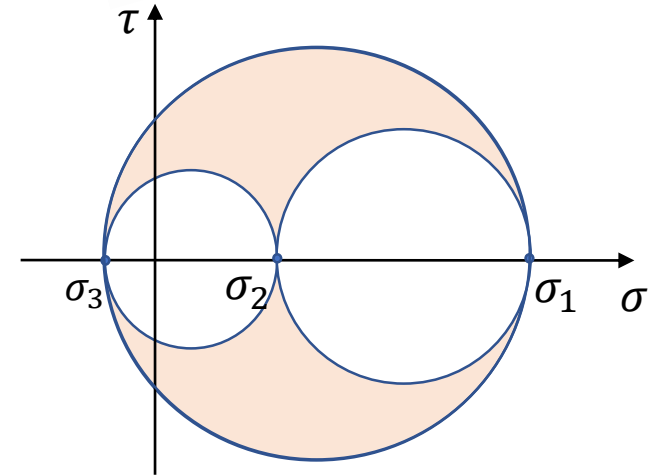
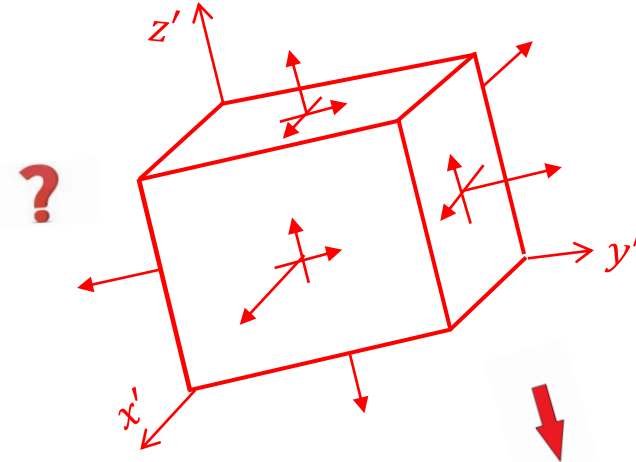
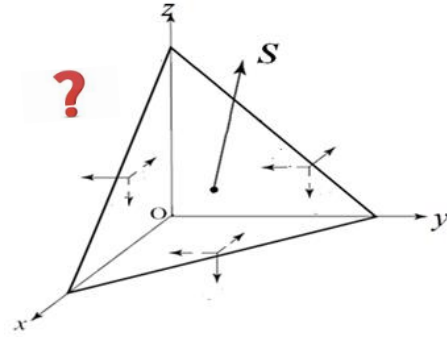
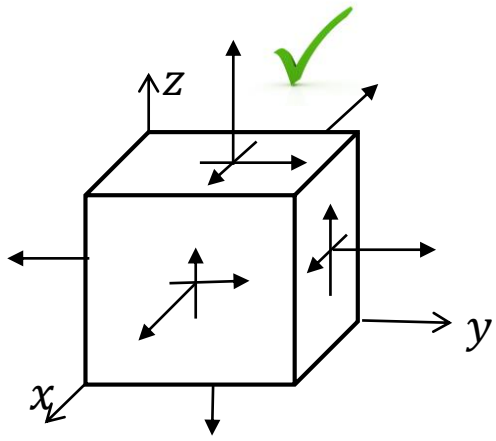
**Sunum Dosyaları ve Soru çözümleri paylaşmaktadır.**

(Lütfen kurumsal mail adresinizden iletişim kurunuz.)

### **İletişim**

Tüm soru, görüş ve önerileriniz için:

**e-posta: [mehmet.zor@deu.edu.tr](mailto:mehmet.zor@deu.edu.tr) , [mehmetzor66@gmail.com](mailto:mehmetzor66@gmail.com)**



# 1 Üç Boyutta Gerilme Dönüşümleri ve 3D Mohr Çemberi

[\(Video 6c ve 6d\)](#)

Bu bölümde **amacımız**, bir noktada üç boyutlu gerilme durumu (6 gerilme bileşeni) mevcut iken, aynı noktada farklı düzlemlerdeki gerilme bileşenlerini hesaplamak ve 3 boyutlu mohr çemberini çizmektir.

## 1.1 Hatırlatma: Düzlemde Gerilme Dönüşüm Denklemleri ve Mohr Çemberi Nasıl Bulunurdu?

x-y düzleminde  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  gerilmeleri belli iken  $x' - y'$  eksen takımına göre  $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$  gerilmeleri aşağıdaki dönüşüm formüllerinden hesaplıyorduk.

Dengede olan kübik elemanı  $k$  düzlemi ile ayırdığımızda sol kısmının statik dengesinden  $\sigma_{x'}$  ve  $\tau_{x'y'}$  şu şekilde bulunur:

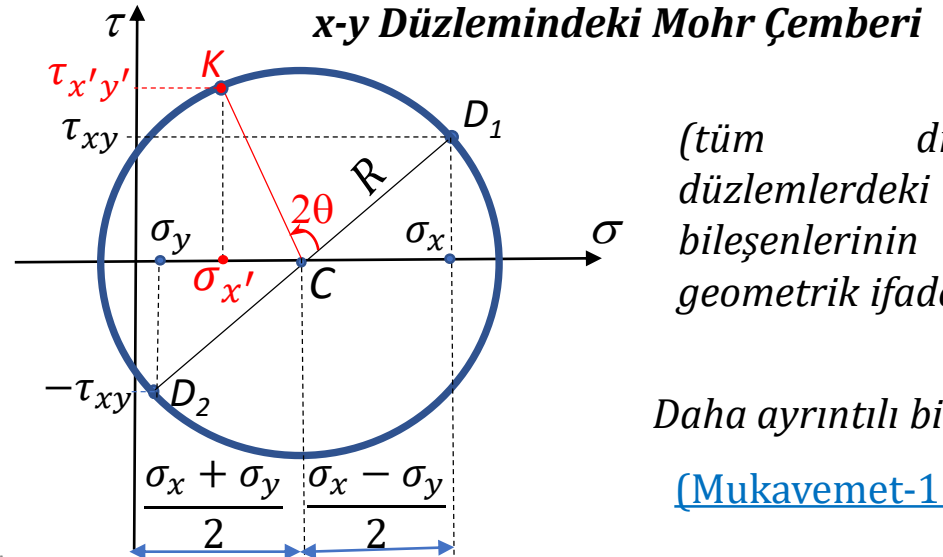
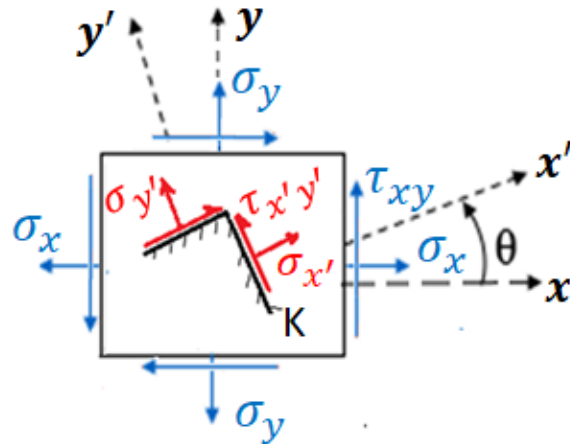
$\sigma_{x'}$  denkleminde  $\theta$  yerine  $\theta + 90$  koyarak  $k$  ya dik düzlemdeki normal gerilme olan  $\sigma_{y'}$  şu şekilde bulunur:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

x-y düzleminde bakış



## Şimdi aynı hesaplamaları, aynı mantıkla 3 boyutlu Gerilme Durumu için Yapacağız.

### Püf Noktası-1.1:

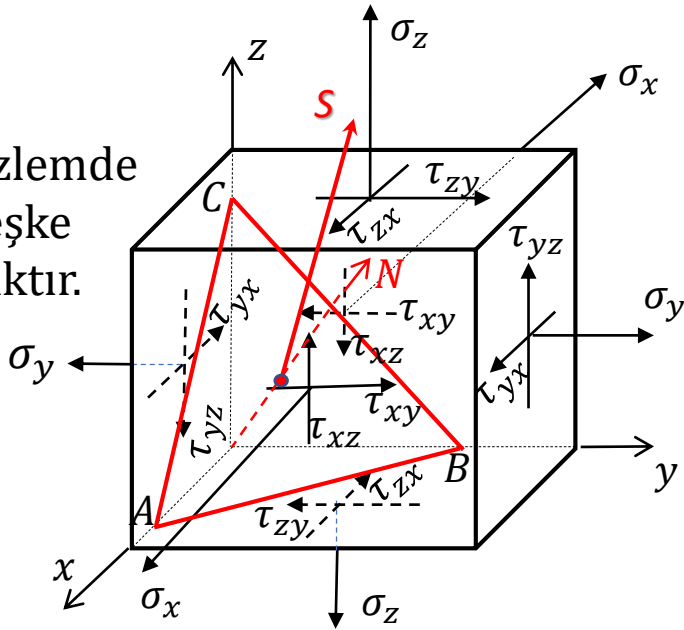
- Bilinen değerler : kartezyen gerilme bileşenleri ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ ), ve gerilmesini aradığımız eğik düzlemin normalinin eksenlerle yaptığı açılar ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) bilinmektedir.
- Bundan sonraki hesaplamalarda bilinmeyen değerleri daima bu bilinenler cinsinden bulmayı hedefleyeceğiz.

### Püf Noktası-1.2:

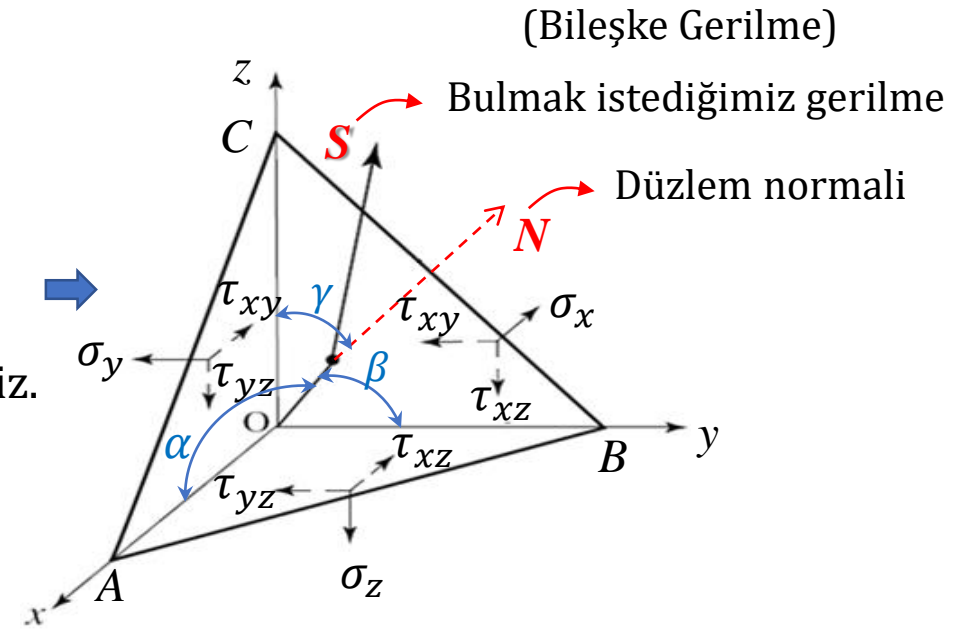
Bir eksen takımına göre gerilme bileşenleri bilirse, aynı noktadaki tüm eksen takımlarına göre gerilme bileşenleri hesaplanabilir.

- Kavram kargaşası olmaması için bu püf noktaları daima aklımızda olmalıdır.

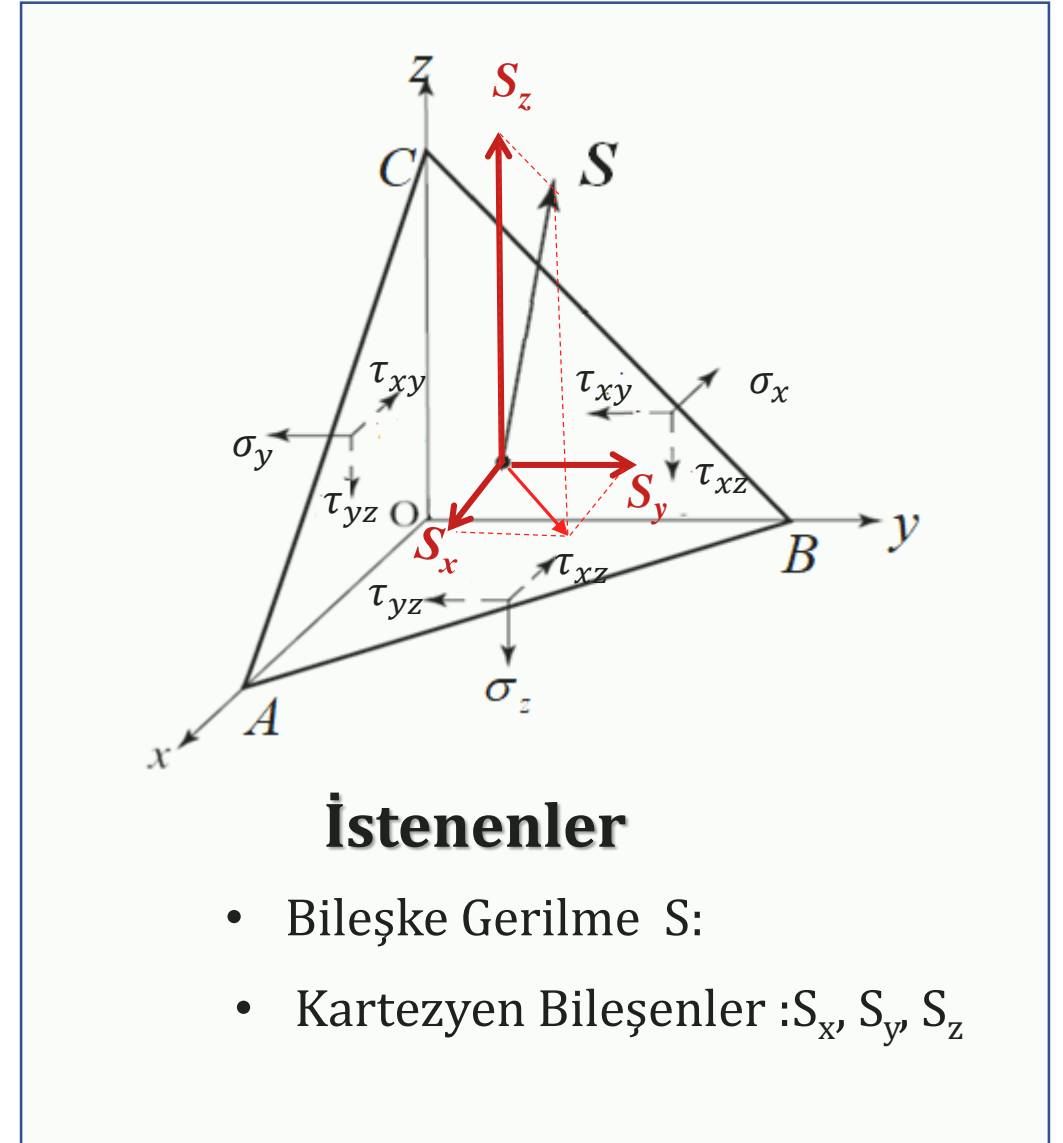
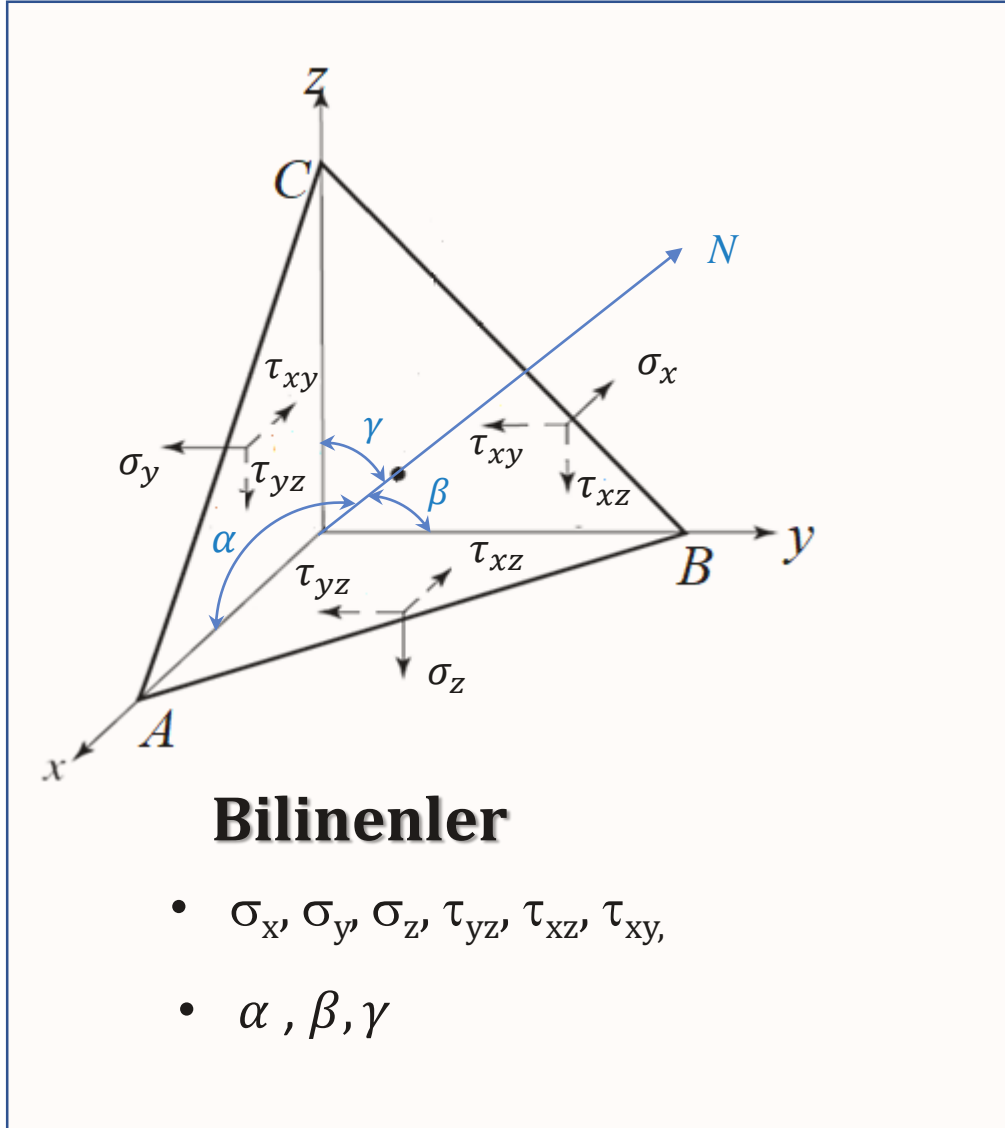
İlk hedefimiz ise 4üncü bir eğik düzlemde ortaya çıkan S bileşke gerilmesini bulmaktır.



Kübik Elemanı Eğik düzlemden ayırıp, Sol kısmın dengesini inceleriz.



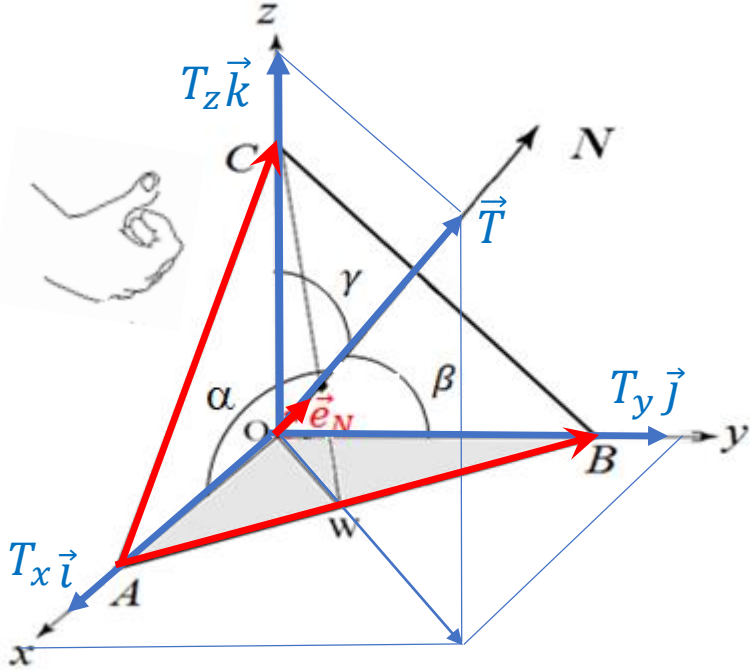
## 1.2- Bir Eğik Düzlemdeki Bileşke Gerilmenin ve Kartezyen Bileşenlerinin Hesabı (x, y, z Referans eksen takımına göre) :



## 1.2.1 Kosinüs Doğrultmanları

Düzlem normali (N) ile pozitif kartezyen eksenler arasındaki açılar kosinüsleridir:

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma$$



$\vec{AB}$  sağ elle tutulup  $\vec{AC}$  üzerine kapatılırsa başparmağımız  $\vec{T} = \vec{AB} \times \vec{AC}$  vektörünün yönünü gösterir. (Bknz Örnek 1.1)

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 = T^2 (l^2 + m^2 + n^2) \rightarrow l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1.2)$$

### Kosinüs Doğrultmanları Arasındaki İlişki:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{AB} \times \vec{AC} = (\vec{AO} + \vec{OB}) \times (\vec{AO} + \vec{OC}) \\ &= \vec{AO} \times \vec{OC} + \vec{OB} \times \vec{AO} + \vec{OB} \times \vec{OC} \\ &= \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} \\ &= \underbrace{\vec{OB} \times \vec{OC}}_{T_x \vec{i}} + \underbrace{\vec{OC} \times \vec{OA}}_{T_y \vec{j}} + \underbrace{\vec{OA} \times \vec{OB}}_{T_z \vec{k}} \end{aligned}$$

$$\vec{T} = (T_x) \vec{i} + (T_y) \vec{j} + (T_z) \vec{k}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{i} = T \cdot |\vec{i}| \cdot \cos \alpha = T_x \rightarrow T_x = T \cdot l \quad (1.1a)$$

$$\vec{T} \cdot \vec{j} = T \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \beta = T_y \rightarrow T_y = T \cdot m \quad (1.1b)$$

$$\vec{T} \cdot \vec{k} = T \cdot |\vec{k}| \cdot \cos \gamma = T_z \rightarrow T_z = T \cdot n \quad (1.1c)$$

### Püf noktası 1.3:

(1.1a-c) denklemlerinden anlıyoruz ki; Normal yöndeki T gibi bir vektörün bir eksen yönündeki bileşenin şiddeti, kosinüs doğrultmanıyla bileşke vektörün şiddetinin çarpımına eşittir.

### Kosinüs Doğrultmanları ile Alanlar Arasındaki İlişki:

Bir üçgenin alanı: İki kenarının konum vektörlerinin vektörel çarpımlarının şiddetinin yarısına eşittir.

Buna göre OBC ve ABC üçgenlerinin alanları:

$$(OBC)_A = \frac{|\vec{OB} \times \vec{OC}|}{2} = \frac{T_x}{2} \quad (1.3a)$$

$$(ABC)_A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{T}{2} \quad (1.3a)$$

$$\frac{T_x}{T} = l = \frac{(OBC)_A}{(ABC)_A} \quad (1.3a)$$

$$(OCA)_A = \frac{|\vec{OC} \times \vec{OA}|}{2} = \frac{T_y}{2} \rightarrow \frac{T_y}{T} = m = \frac{(OCA)_A}{(ABC)_A} \quad (1.3b)$$

$$(OAB)_A = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{2} = \frac{T_z}{2} \rightarrow \frac{T_z}{T} = n = \frac{(OAB)_A}{(ABC)_A} \quad (1.3c)$$

### Normal yöndeki birim vektör:

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{T_x \vec{i} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k}}{T} = \frac{T(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})}{T}$$

$$\vec{e} = \vec{e}_N = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \quad (1.4)$$

**Kosinüs Doğrultmanlarının işaretleri:**  $\vec{e}_N$  in bileşenlerinin işaretleriyle aynıdır. Bu bilgi özellikle işaretlerin doğruluğunu kontrolünde işimize yarar.

## 1.2.2 x,y,z Referans Eksen Takımına Göre Kartezyen Bileşenlerin Hesaplanması

$$(1.3a-c) \text{ denklemleri: } l = \cos \alpha = \frac{OBC}{ABC} \quad , \quad m = \cos \beta = \frac{OAC}{ABC} \quad , \quad n = \cos \gamma = \frac{OAB}{ABC}$$

alan  $\rightarrow$

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow S_x \cdot ABC - \sigma_x \cdot OBC - \tau_{xy} \cdot OAC - \tau_{xz} \cdot OAB = 0$$

$$\rightarrow S_x \frac{ABC}{ABC} = \sigma_x \frac{OBC}{ABC} + \tau_{xy} \frac{OAC}{ABC} + \tau_{xz} \frac{OAB}{ABC} \rightarrow S_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \quad (1.5a)$$

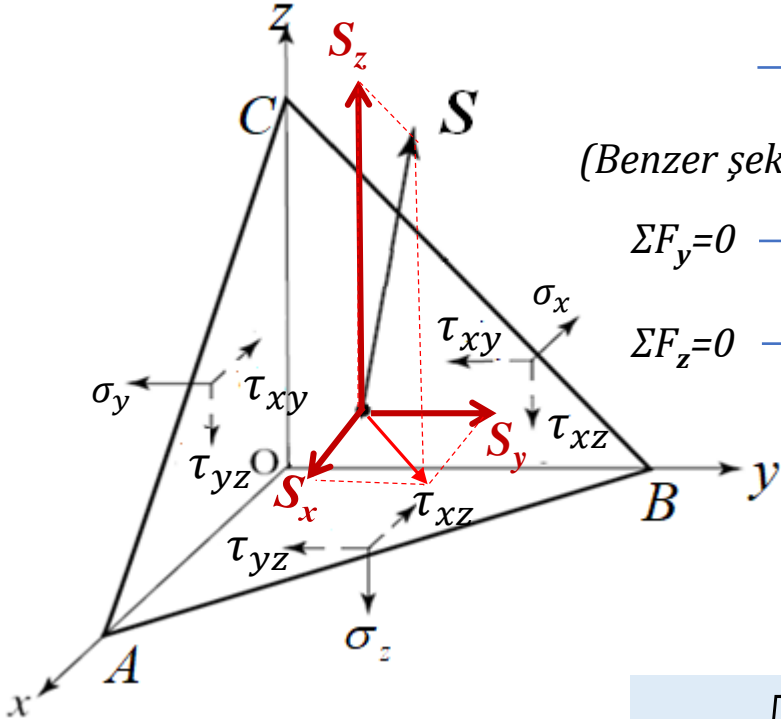
(Benzer şekilde alttaki iki denge denkleminin her iki tarafına ABC ye böleriz)

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow S_y \cdot ABC - \tau_{xy} \cdot OBC - \sigma_y \cdot OAC - \tau_{yz} \cdot OAB = 0 \rightarrow S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \quad (1.5b)$$

$$\Sigma F_z=0 \rightarrow S_z \cdot ABC - \tau_{xz} \cdot OBC - \tau_{yz} \cdot OAC - \sigma_z \cdot OAB = 0 \rightarrow S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad (1.5c)$$

(1.5a,b,c) denklemlerini Matris formatında yazarsak:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$



$S$  bileşke gerilmesinin şiddeti:  $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (1.7)$

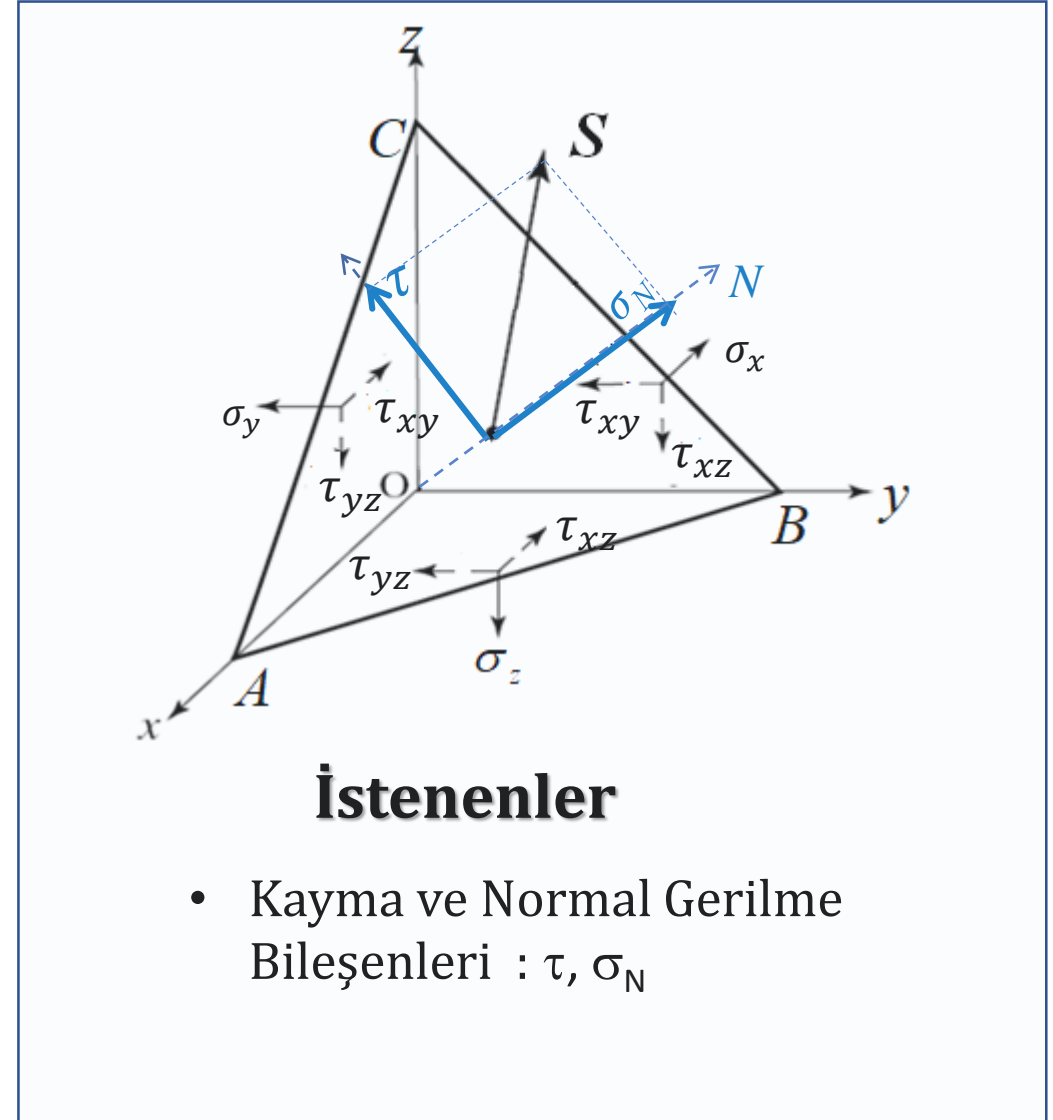
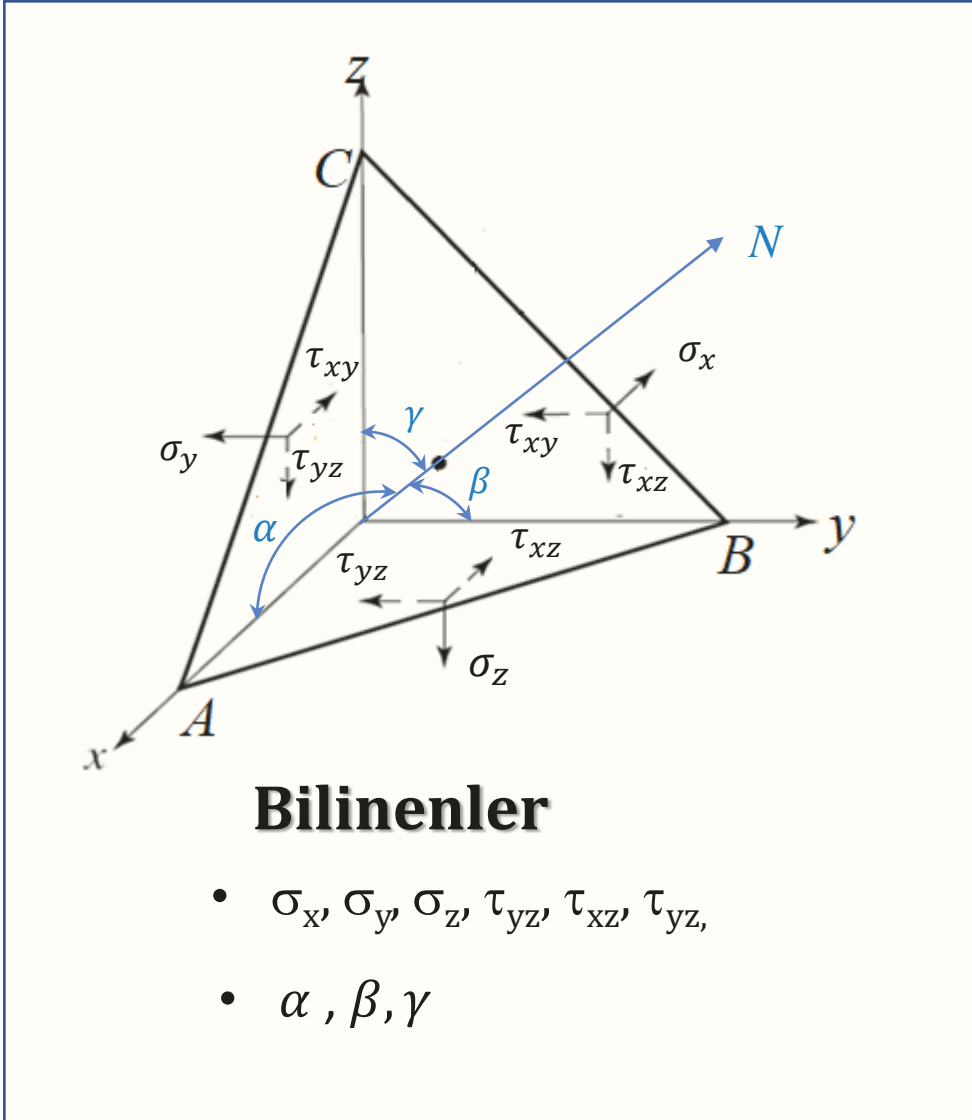
$S$  gerilme vektörü:  $\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k} \quad (1.8)$

**Püf noktası 4:** Bir vektörün herhangi bir eksen takımına göre bileşenlerinin şiddetini bulmak için, o vektörü, o eksen takımına ait birim vektörlerle skaler çarparız. Buna göre:

$$S_x = \vec{S} \cdot \vec{i} \quad (1.9a) \quad , \quad S_y = \vec{S} \cdot \vec{j} \quad (1.9b) \quad , \quad S_z = \vec{S} \cdot \vec{k} \quad (1.9c)$$

**Not:**  $S$  vektörü düzlem normali yönünde olsaydı, 1.9a-c denklemlerinin 1.1a-c denklemleri ile aynı olacağını fark edin.

## 1.3 Eğik Düzlemdeki Bileşke Gerilmenin Kayma ve Normal Bileşenlerinin Hesabı:



### 1.3.1 Kayma ve Normal Bileşenlerin Hesabı

(1.5)-(1.7) denklemlerinden Kartezyen bileşenleri ( $S_x, S_y, S_z$ ) ve bileşke gerilmeyi ( $S$ ) hesapladıktan sonra;

Püf noktası 4'ü, t-N eksenlerine uygularsak

$\sigma_N$  bileşenin şiddeti:

$$\sigma_N = \vec{S} \cdot \vec{e}_N = (S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}) \cdot (l \vec{i} + m \vec{j} + n \vec{k}) \longrightarrow \boxed{\sigma_N = S_x l + S_y m + S_z n} \quad (1.10a)$$

(1.5) denklemlerinden

$$S_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

veya

$$\boxed{\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} l m + \tau_{xz} l n + \tau_{yz} m n)} \quad (1.10b)$$

$\sigma_N$  bileşenin vektörel ifadesi:

$$\boxed{\vec{\sigma}_N = \sigma_N \cdot \vec{e}_N = (S_x l + S_y m + S_z n) \cdot (l \vec{i} + m \vec{j} + n \vec{k})} \quad (1.11)$$

$\tau$  bileşenin şiddeti:

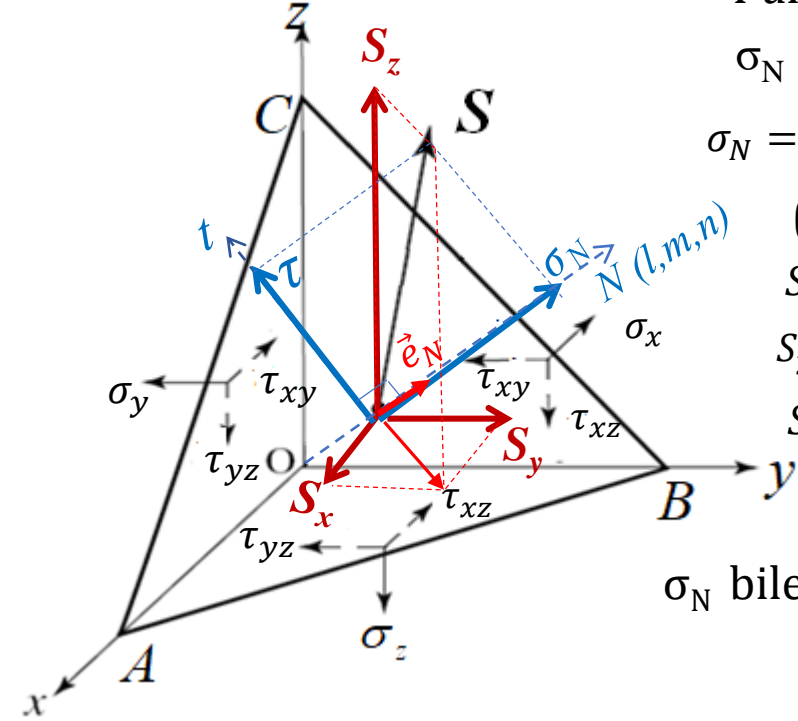
$$\tau^2 = S^2 - \sigma_N^2$$

(1.7) denkleminde  $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$

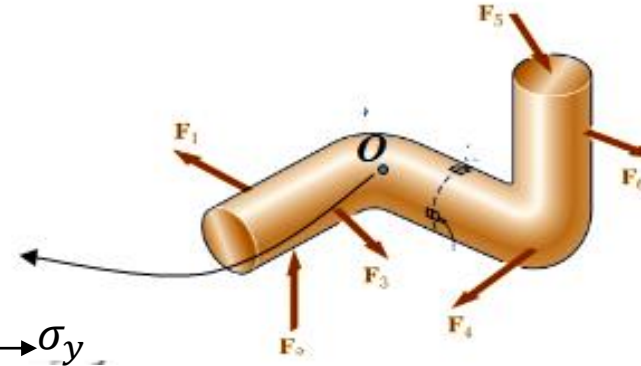
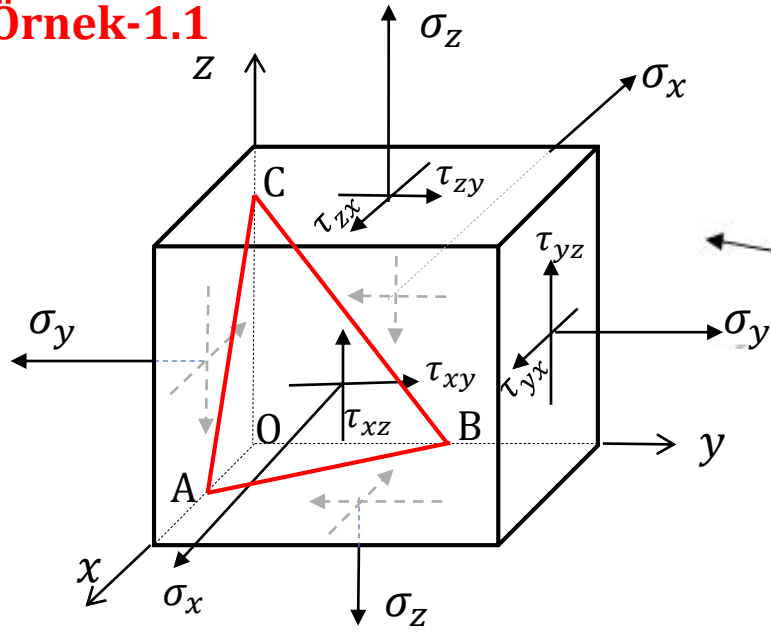
$$\boxed{\tau = \sqrt{S^2 - \sigma_N^2}} \quad (1.12a)$$

$\tau$  bileşenin vektörel ifadesi:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{S} - \vec{\sigma}_N} \quad (1.12b)$$



## Örnek-1.1



Dış yüklerle maruz ve dengede olan yandaki cismin O noktasındaki gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 50 \\ 40 & -30 & -10 \\ 50 & -10 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Uç noktalarının koordinatları: A (5,0,0) , B (0,10,0) , C (0,0,15) olan eğik düzlemdeki  
a-) bileşke gerilmeyi ve kartezyen bileşenlerini;  
b-) Kayma ve normal gerilme bileşenlerini hesaplayınız.

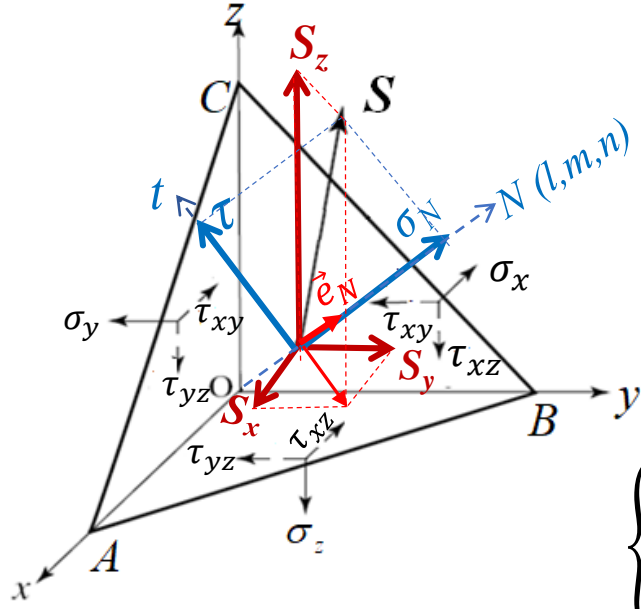
**Çözüm:**

Önce eğik düzlemin normal yönündeki birim vektörü hesaplayacağız.

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{CA} \times \vec{CB}}{|\vec{CA} \times \vec{CB}|} = \frac{(5\vec{i} - 15\vec{k}) \times (10\vec{j} - 15\vec{k})}{|\vec{CA} \times \vec{CB}|} = \frac{150\vec{i} + 75\vec{j} + 50\vec{k}}{\sqrt{150^2 + 75^2 + 50^2}} = \frac{150\vec{i} + 75\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$\rightarrow \vec{e}_N = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

Statikten biliyoruz ki: İki vektörün vektörel çarpımı bu vektörlerin bulunduğu düzleme dik başka bir vektördür. Sağ el kaidesine göre Çarpılan ilk vektör sağ elimizin 4 parmağıyla tutulur ve ikinci vektör üzerine kapatılır. Bu durumda baş parmağımızın yönü sonuç vektörünün yönünü verir. Bu kuralı  $\vec{CA}$  ve  $\vec{CB}$  konum vektörleri için uygularsak, N normal yönündeki birim vektörü yukarıdaki gibi elde ederiz.



$$A(5,0,0), B(0,10,0), C(0,0,15)$$

1.4 denklemden

$$\vec{e}_N = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

Doğrultman kosinüsleri

$$l = \frac{6}{7}, \quad m = \frac{3}{7}, \quad n = \frac{2}{7}$$

ABC eğik düzlemindeki bileşke gerilme  $S$ 'in kartezyen bileşenleri  $S_x, S_y, S_z$

Denk.(6)dan

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 50 \\ 40 & -30 & -10 \\ 50 & -10 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{1}{7} = \begin{Bmatrix} 340 \\ 130 \\ 390 \end{Bmatrix} \frac{1}{7} \rightarrow \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 48.57 \\ 18.57 \\ 55.71 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\vec{S} = S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k} = 48.57\vec{i} + 18.57\vec{j} + 55.71\vec{k}$$

Denk.(1.7) den:  $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \sqrt{48.57^2 + 18.57^2 + 55.71^2} \rightarrow S = 76.2 \text{ MPa}$  (Bileşke kuvvetin şiddeti)

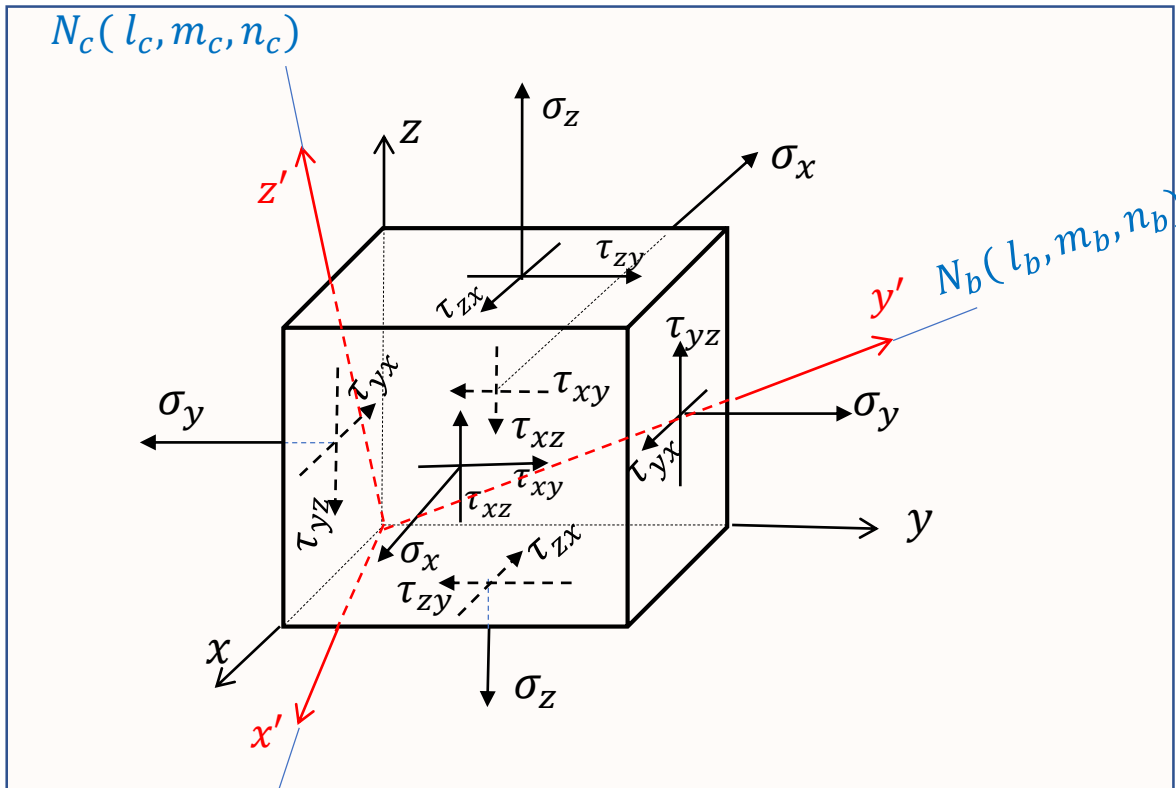
Denk.(1.10a) dan  $S$  gerilmesinin normal bileşeni:  $\sigma_N = \vec{S} \cdot \vec{e}_N$

$$= (48.57\vec{i} + 18.57\vec{j} + 55.71\vec{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}\right) = \frac{1}{7} \{ (48.57)(6) + (18.57)(3) + (55.71)(2) \} \rightarrow \sigma_N = 65.5 \text{ MPa}$$

Denk.(1.12a) dan  $S$  bileşke gerilmesinin kayma bileşeni:  $\tau = \sqrt{S^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{76.2^2 - 65.5^2} \rightarrow \tau \cong 38.94 \text{ MPa}$

## 1.4 Üç Boyutta Farklı bir Eksen Takımına Göre Gerilme Dönüşüm Bağıntıları

Şimdi amacımız  $x,y,z$  eksen takımına göre gerilme bileşenleri belli iken  $x',y',z'$  gibi bir eksen takımına göre gerilme bileşenlerini bulmaktır.



$N_c(l_c, m_c, n_c)$

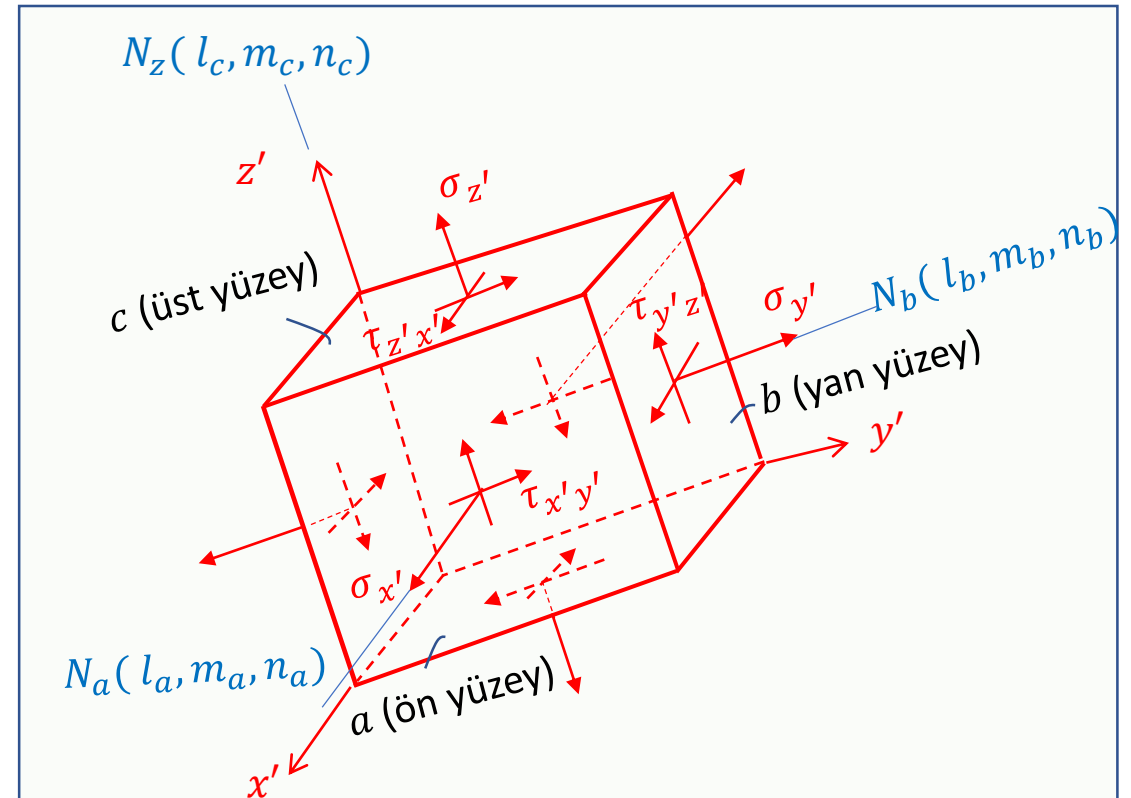
$N_b(l_b, m_b, n_b)$

$N_a(l_a, m_a, n_a)$

**Bilinenler**

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$

$x'$ için :	$l_a$	$m_a$	$n_a$	} Doğrultman kosinüsleri
$y'$ için :	$l_b$	$m_b$	$n_b$	
$z'$ için :	$l_c$	$m_c$	$n_c$	



$N_z(l_c, m_c, n_c)$

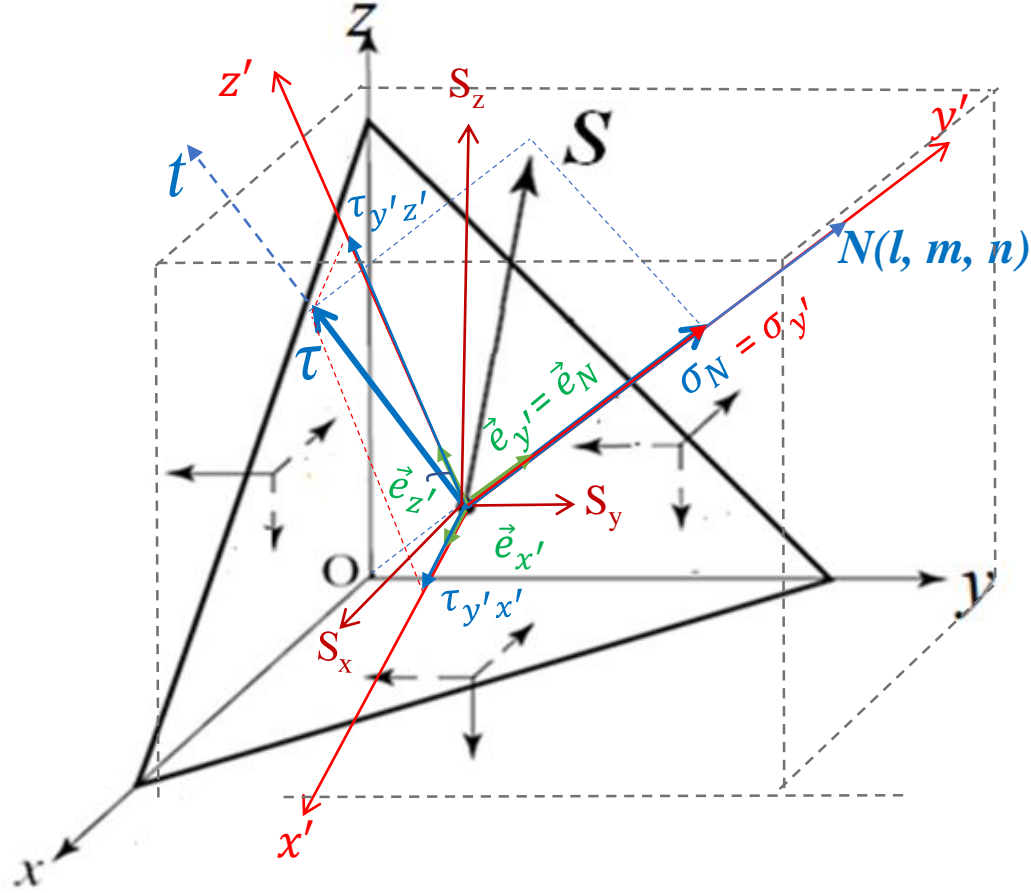
$N_b(l_b, m_b, n_b)$

$N_a(l_a, m_a, n_a)$

**İstenenler**

$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\sigma_{z'}$
$\tau_{x'y'}$	$\tau_{z'x'}$	$\tau_{z'y'}$

## 1.4.1 Bir Eğik Düzlemdeki Bileşke Gerilmenin Farklı Bir Eksen Takımına Göre Bileşenleri



Öncelikle normali  $y'$  olan eğik düzlemdeki  $S$  bileşkesinin, yüzeye dik ( $\vec{\sigma}_N$ ) ve paralel bileşeni ( $\vec{\tau}$ ) bileşenlerinden giderek  $x', y', z'$  eksenlerindeki bileşenlerini bulacağız:

Eğik düzlemin  $N$  normali ile  $y'$  eksenini ile çakıştığını düşünüyoruz.

Bu durumda  $\sigma_N = \sigma_{y'}$  olur.

$S$  bileşke gerilmesinin düzlem normali ( $N$ ) yönündeki bileşeni 1.10b denkleminde şu şekilde hesaplamıştık. Buna göre

$S$ 'in normal bileşeninin şiddeti:

$$\sigma_{y'} = \sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{xz} ln + \tau_{yz} mn) \quad (1.10b)$$

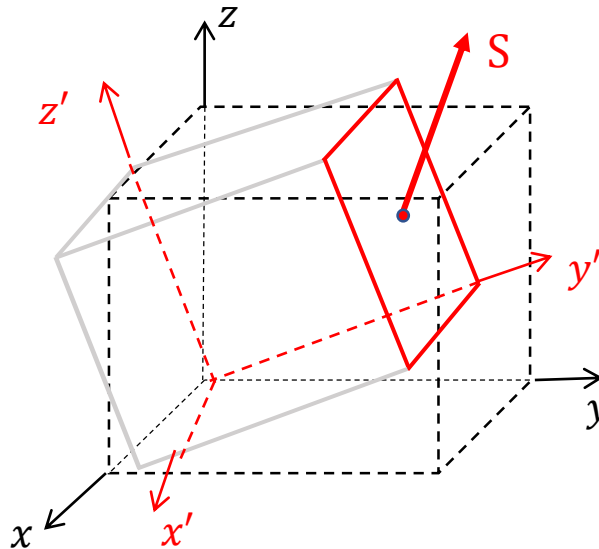
$S$ 'in kayma bileşeni  $\tau$  iki bileşene ayrılabilir:  $\tau_{y'x'}$  ve  $\tau_{y'z'}$

Ayrıca biliyoruz ki, bir vektörün bir yöndeki bileşeninin şiddeti, o vektörün o yöndeki birim vektörle skaler çarpımına eşittir. Buna göre :

$S$ 'in Kayma gerilmelerinin şiddetleri:

$$\tau_{y'x'} = \vec{S} \cdot \vec{e}_{x'} \quad (1.13)$$

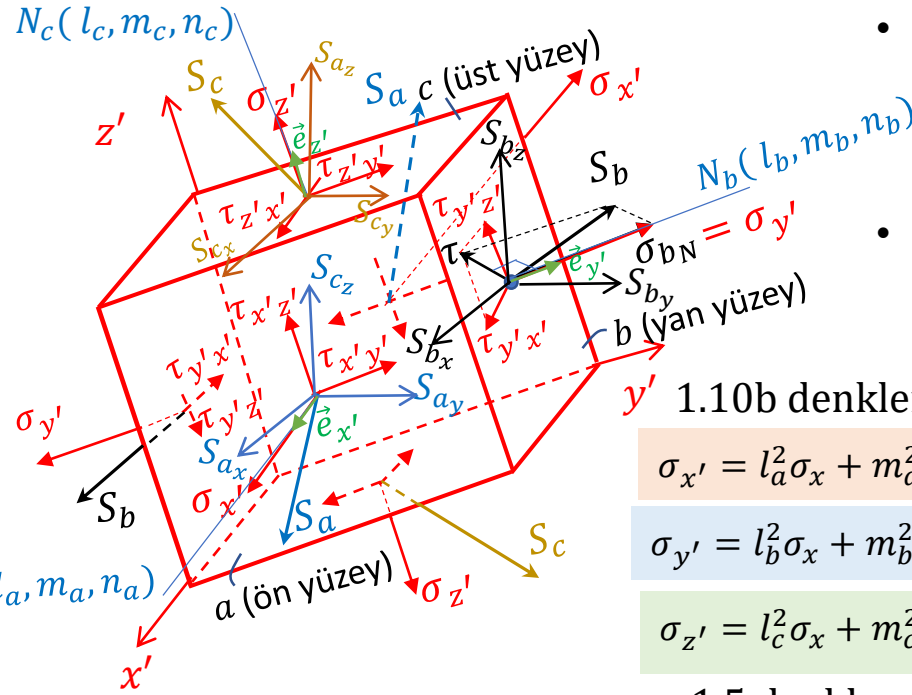
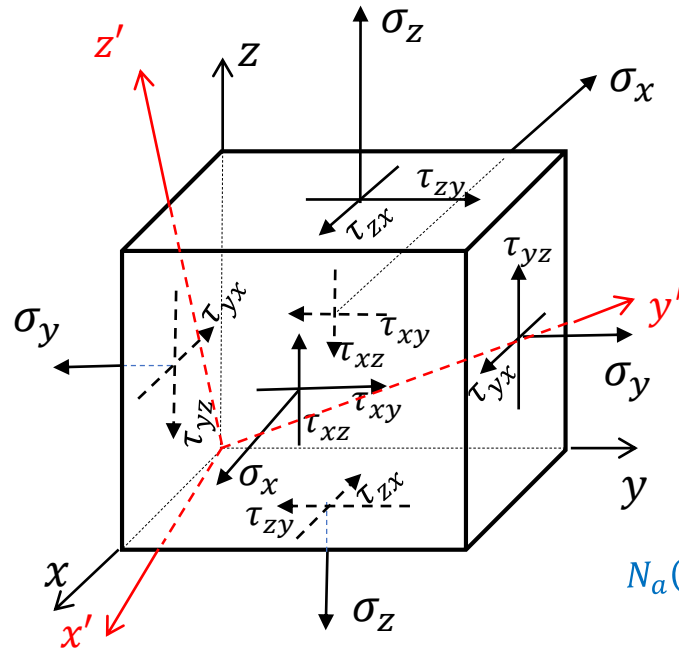
$$\tau_{y'z'} = \vec{S} \cdot \vec{e}_{z'} \quad (1.14)$$



### Not:

Eğik düzlemin şekli önemli değildir. Üçgen, dikdörtgen hatta dairesel bile incelenebilir. Önemli olan eğik düzlemin normalinin yönüdür yani kosinüs doğrultmanlarının değeridir.

## 1.4.2 Üç Boyutta Farklı bir Eksen Takımına Göre Gerilme Dönüşüm Bağlıları:



- 1.10b, 1.13 ve 1.14 denklemlerini, normalleri sırasıyla  $x'$ ,  $y'$  ve  $z'$  olan, a,b,c yüzeyleri için uyguladığımız zaman 3 boyutta gerilme dönüşüm bağıntıları ortaya çıkacaktır.
- Bu sayfadaki çizimleri ve denklemleri dikkatlice inceleyiniz, istenen değerleri veren denklemleri fark ediniz.

1.10b denkleminde normal gerilme bileşenlerini bulabiliriz.

$$\sigma_{x'} = l_a^2 \sigma_x + m_a^2 \sigma_y + n_a^2 \sigma_z + 2(l_a m_a \tau_{xy} + l_a n_a \tau_{xz} + m_a n_a \tau_{yz}) \quad (1.15)$$

$$\sigma_{y'} = l_b^2 \sigma_x + m_b^2 \sigma_y + n_b^2 \sigma_z + 2(l_b m_b \tau_{xy} + l_b n_b \tau_{xz} + m_b n_b \tau_{yz}) \quad (1.16)$$

$$\sigma_{z'} = l_c^2 \sigma_x + m_c^2 \sigma_y + n_c^2 \sigma_z + 2(l_c m_c \tau_{xy} + l_c n_c \tau_{xz} + m_c n_c \tau_{yz}) \quad (1.17)$$

1.5 denkleminde :

$$S_{b_x} = \sigma_x l_b + \tau_{xy} m_b + \tau_{xz} n_b \quad (1.22) \quad S_{c_x} = \sigma_x l_c + \tau_{xy} m_c + \tau_{xz} n_c \quad (1.26)$$

$$S_{b_y} = \tau_{xy} l_b + \sigma_y m_b + \tau_{yz} n_b \quad (1.23) \quad S_{c_y} = \tau_{xy} l_c + \sigma_y m_c + \tau_{yz} n_c \quad (1.27)$$

$$S_{b_z} = \tau_{xz} l_b + \tau_{yz} m_b + \sigma_y n_b \quad (1.24) \quad S_{c_z} = \tau_{xz} l_c + \tau_{yz} m_c + \sigma_y n_c \quad (1.28)$$

$$\vec{e}_{y'} = l_b \vec{i} + m_b \vec{j} + n_b \vec{k} \quad (1.25) \quad \vec{e}_{z'} = l_c \vec{i} + m_c \vec{j} + n_c \vec{k} \quad (1.29)$$

$$S_{a_x} = \sigma_x l_a + \tau_{xy} m_a + \tau_{xz} n_a \quad (1.18)$$

$$S_{a_y} = \tau_{xy} l_a + \sigma_y m_a + \tau_{yz} n_a \quad (1.19)$$

$$S_{a_z} = \tau_{xz} l_a + \tau_{yz} m_a + \sigma_y n_a \quad (1.20)$$

$$\vec{e}_{x'} = l_a \vec{i} + m_a \vec{j} + n_a \vec{k} \quad (1.21)$$

Bilinenler:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$   
 $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$   
 $l_a, m_a, n_a$   
 $l_b, m_b, n_b$   
 $l_c, m_c, n_c$

İstenenler:

$\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}$   
 $\tau_{x'y'}, \tau_{z'x'}, \tau_{z'y'}$

1.13 ve 1.14 denklemlerinden Kayma bileşenleri:

$$\tau_{y'x'} = \tau_{x'y'} = \vec{S}_b \cdot \vec{e}_{x'} = \vec{S}_a \cdot \vec{e}_{y'} = l_a l_b \sigma_x + m_a m_b \sigma_y + n_a n_b \sigma_z + (m_a n_b + m_b n_a) \tau_{yz} + (l_a n_b + l_b n_a) \tau_{xz} + (l_a m_b + l_b m_a) \tau_{xy} \quad (1.30)$$

$$\tau_{x'z'} = \tau_{z'x'} = \vec{S}_c \cdot \vec{e}_{x'} = \vec{S}_a \cdot \vec{e}_{z'} = l_a l_c \sigma_x + m_a m_c \sigma_y + n_a n_c \sigma_z + (m_a n_c + m_c n_a) \tau_{yz} + (l_a n_c + l_c n_a) \tau_{xz} + (l_a m_c + l_c m_a) \tau_{xy} \quad (1.31)$$

$$\tau_{z'y'} = \tau_{y'z'} = \vec{S}_c \cdot \vec{e}_{y'} = \vec{S}_b \cdot \vec{e}_{z'} = l_b l_c \sigma_x + m_b m_c \sigma_y + n_b n_c \sigma_z + (m_b n_c + m_c n_b) \tau_{yz} + (l_b n_c + l_c n_b) \tau_{xz} + (l_b m_c + l_c m_b) \tau_{xy} \quad (1.32)$$

## Örnek 1.2

x, y, z kartezyen koordinat sisteminde bir makine elemanının bir noktasındaki gerilme değerleri yandaki gibi verilmiştir. Buna göre;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Kübik elamanın z eksenini etrafında saat ibreleri tersi yönünde  $\theta=37^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen  $x' - y' - z'$  eksen takımına göre gerilme bileşenlerini hesaplayınız.

## ÇÖZÜM

$\theta=37^\circ$  için,  $N_a$ ,  $N_b$  ve  $N_c$  normallerinin x,y,z eksenleriyle yaptıkları açıları bulalım:

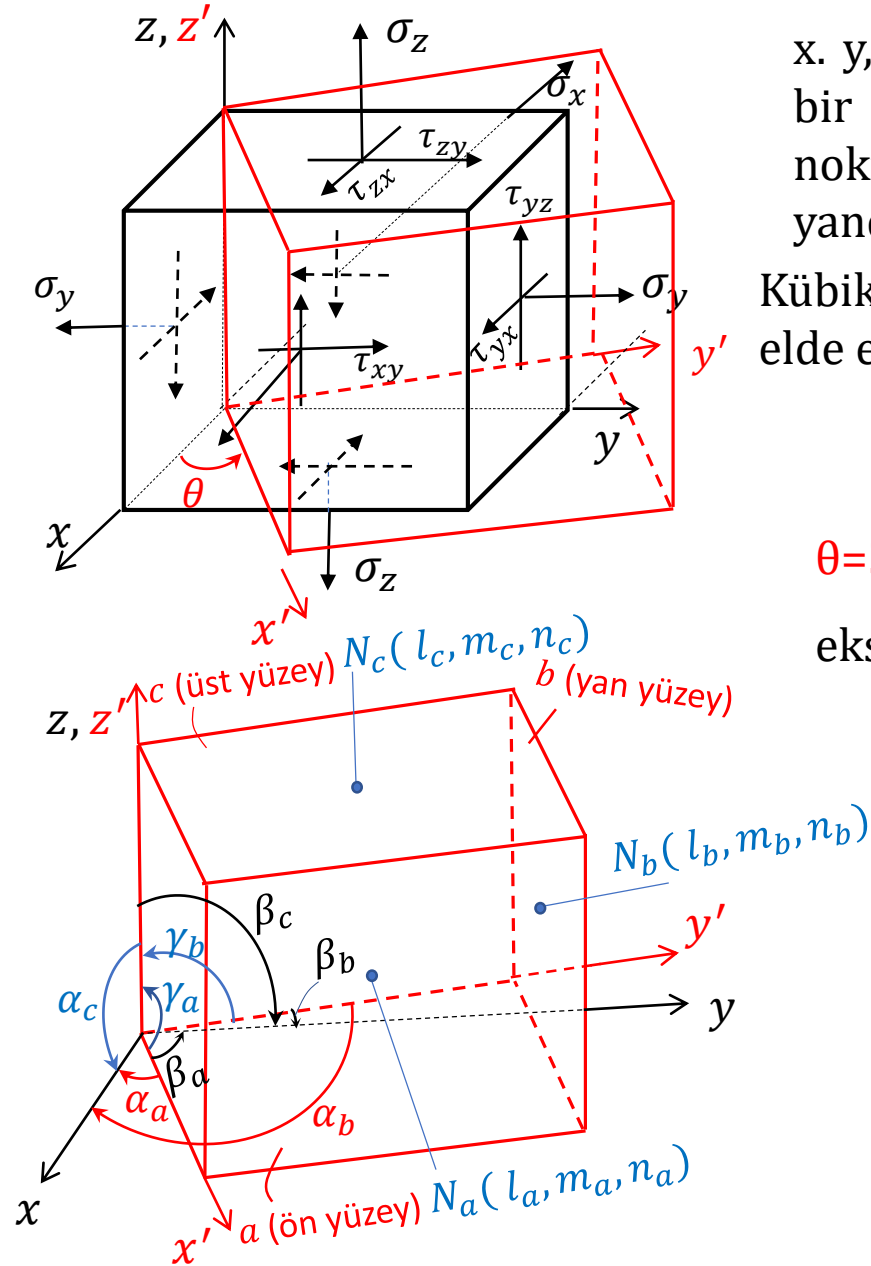
$$\left. \begin{array}{l} \alpha_a = 37^\circ, \beta_a = 53^\circ, \gamma_a = 90^\circ \\ \alpha_b = 127^\circ, \beta_b = 37^\circ, \gamma_b = 90^\circ \\ \alpha_c = 90^\circ, \beta_c = 90^\circ, \gamma_c = 0^\circ \end{array} \right\}$$

Bu açıların kosinüsleri yani kosinüs doğrultmanları aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

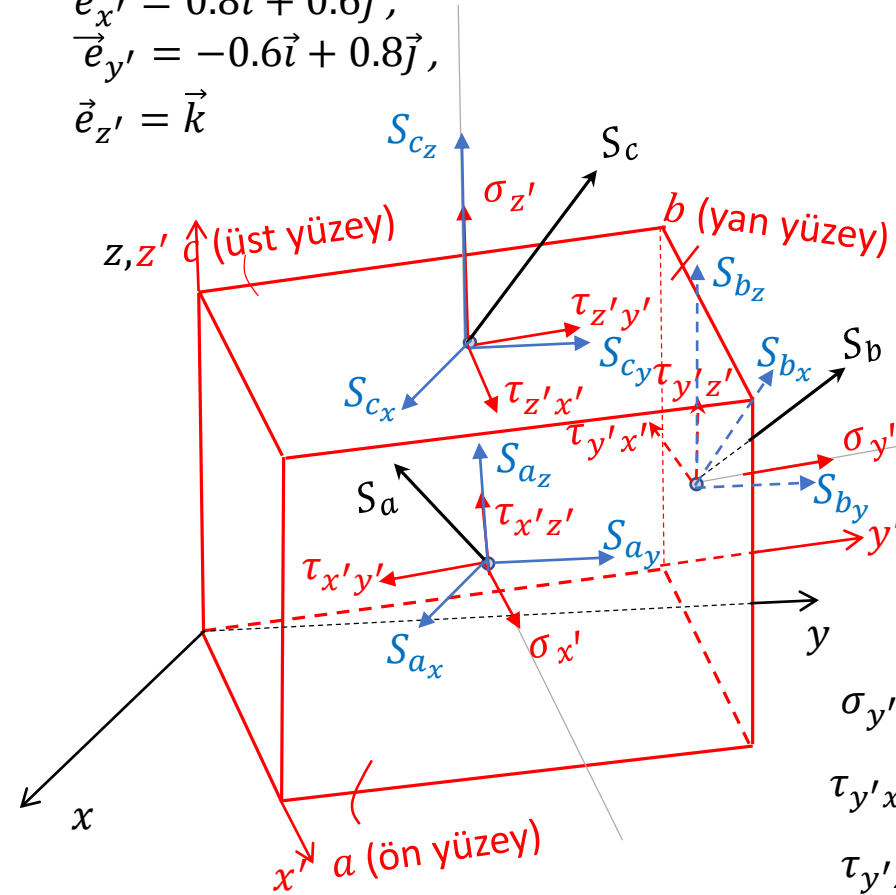
	x	y	z
$x'$	$l_a = \cos\alpha_a = 0.8$	$m_a = \cos\beta_a = 0.6$	$n_a = \cos\gamma_a = 0$
$y'$	$l_b = \cos\alpha_b = -0.6$	$m_b = \cos\beta_b = 0.8$	$n_b = \cos\gamma_b = 0$
$z'$	$l_c = \cos\alpha_c = 0$	$m_c = \cos\beta_c = 0$	$n_c = \cos\gamma_c = 1$

Birim vektörleri bulalım:  $\vec{e} = \vec{e}_N = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$$\vec{e}_{x'} = 0.8\vec{i} + 0.6\vec{j} \quad , \quad \vec{e}_{y'} = -0.6\vec{i} + 0.8\vec{j} \quad , \quad \vec{e}_{z'} = \vec{k}$$



$$\begin{aligned}\vec{e}_{x'} &= 0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}, \\ \vec{e}_{y'} &= -0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}, \\ \vec{e}_{z'} &= \vec{k}\end{aligned}$$



1.6 denklemini her bir yüzey için uygulayıp bileşke gerilmeleri hesaplayalım:

$$\{S_a\} = \begin{Bmatrix} S_{ax} \\ S_{ay} \\ S_{az} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_a \\ m_a \\ n_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} S_{ax} \\ S_{ay} \\ S_{az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46 \\ 20 \\ 24 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x'} = \vec{S}_a \cdot \vec{e}_{x'} = (S_{ax}\vec{i} + S_{ay}\vec{j} + S_{az}\vec{k}) \cdot \vec{e}_{x'} = (46\vec{i} + 20\vec{j} + 24\vec{k}) \cdot (0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}) = 48.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = \vec{S}_a \cdot \vec{e}_{y'} = (S_{ax}\vec{i} + S_{ay}\vec{j} + S_{az}\vec{k}) \cdot \vec{e}_{y'} = (46\vec{i} + 20\vec{j} + 24\vec{k}) \cdot (-0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}) = -11.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'z'} = \vec{S}_a \cdot \vec{e}_{z'} = (S_{ax}\vec{i} + S_{ay}\vec{j} + S_{az}\vec{k}) \cdot \vec{e}_{z'} = (46\vec{i} + 20\vec{j} + 24\vec{k}) \cdot (\vec{k}) = 24 \text{ MPa}$$

$$\{S_b\} = \begin{Bmatrix} S_{bx} \\ S_{by} \\ S_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_b \\ m_b \\ n_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} S_{bx} \\ S_{by} \\ S_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22 \\ 10 \\ 32 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \vec{S}_b \cdot \vec{e}_{y'} = (S_{bx}\vec{i} + S_{by}\vec{j} + S_{bz}\vec{k}) \cdot \vec{e}_{y'} = (-22\vec{i} + 10\vec{j} + 32\vec{k}) \cdot (-0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}) = 21.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{y'x'} = \vec{S}_b \cdot \vec{e}_{x'} = (S_{bx}\vec{i} + S_{by}\vec{j} + S_{bz}\vec{k}) \cdot \vec{e}_{x'} = (-22\vec{i} + 10\vec{j} + 32\vec{k}) \cdot (0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}) = -11.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{y'z'} = \vec{S}_b \cdot \vec{e}_{z'} = (S_{bx}\vec{i} + S_{by}\vec{j} + S_{bz}\vec{k}) \cdot \vec{e}_{z'} = (-22\vec{i} + 10\vec{j} + 32\vec{k}) \cdot (\vec{k}) = 32 \text{ MPa}$$

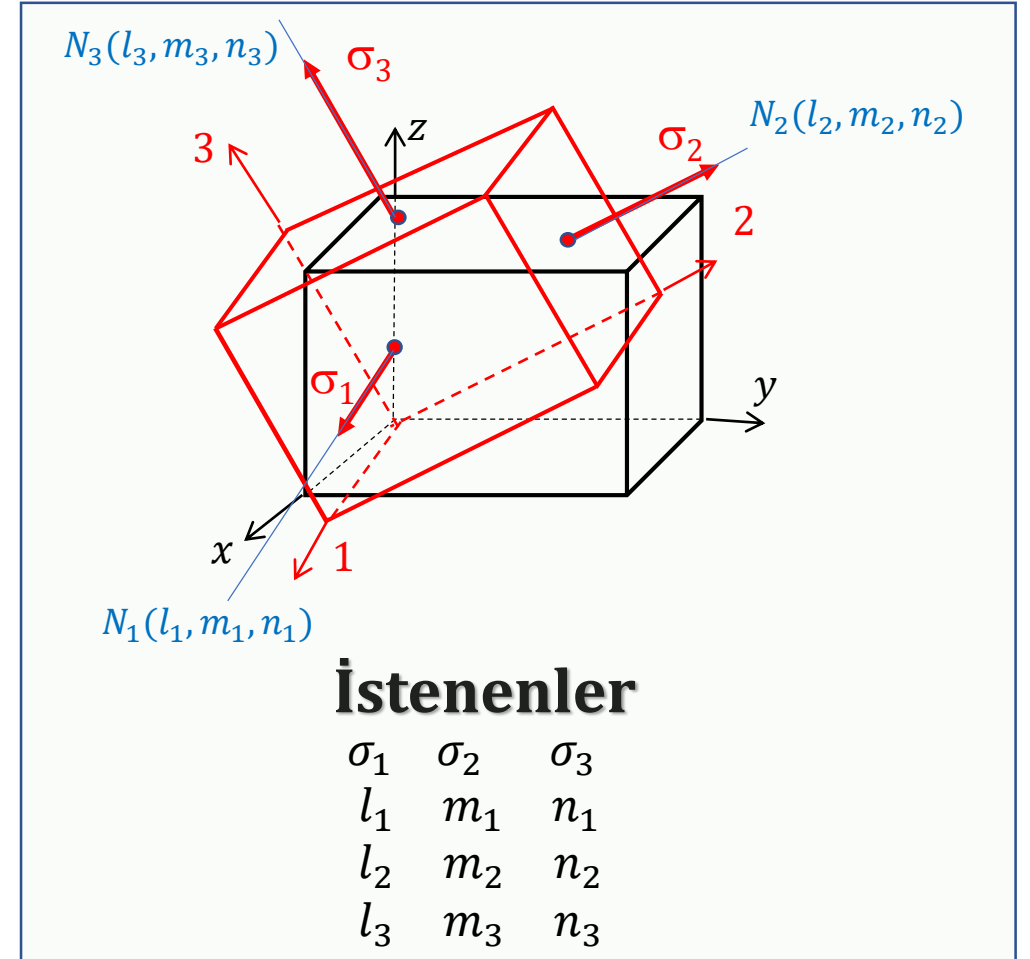
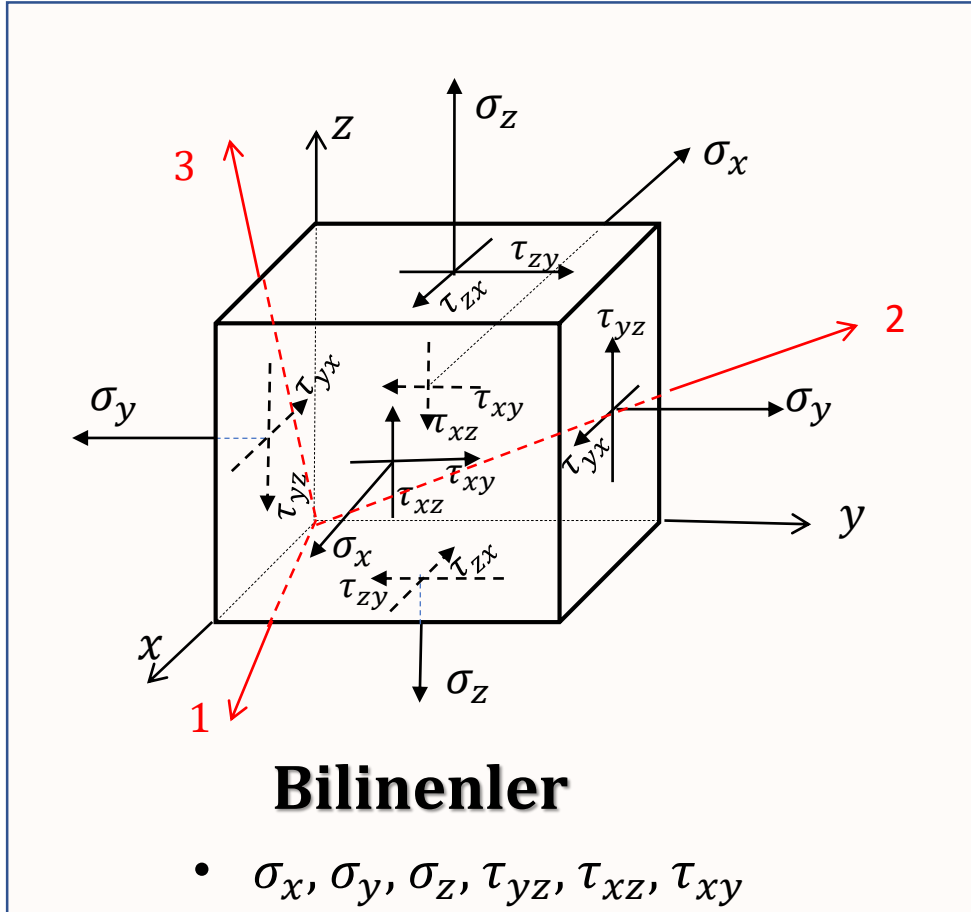
Bir vektörün bir yöndeki bileşenin şiddeti = vektörle o yöndeki birim vektörün skaler çarpına eşittir.

Örn:  $\sigma_{x'} = \vec{S}_a \cdot \vec{e}_{x'}$

$$\left. \begin{aligned} \{S_c\} &= \begin{Bmatrix} S_{cx} \\ S_{cy} \\ S_{cz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_c \\ m_c \\ n_c \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} S_{cx} \\ S_{cy} \\ S_{cz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma_{z'} &= \vec{S}_c \cdot \vec{e}_{z'} = (40\vec{j} + 30\vec{k}) \cdot (\vec{k}) = 30 \text{ MPa} \\ \tau_{z'x'} &= \vec{S}_c \cdot \vec{e}_{x'} = (40\vec{j} + 30\vec{k}) \cdot (0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}) = 24 \text{ MPa} \\ \tau_{z'y'} &= \vec{S}_c \cdot \vec{e}_{y'} = (40\vec{j} + 30\vec{k}) \cdot (-0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}) = 32 \text{ MPa} \end{aligned}$$

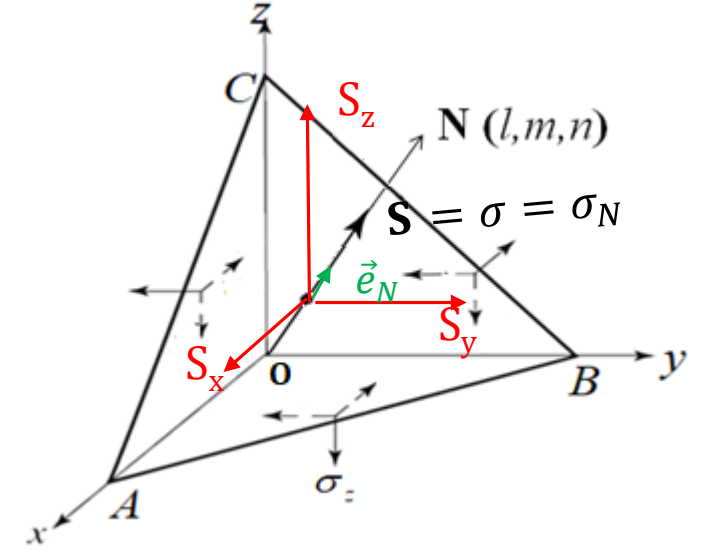
## 1.5 Üç Boyutta Asal Gerilmeler, Asal Düzlemler ve Asal Eksenler (1,2,3)

Kayma gerilmelerinin olmadığı (sıfır olduğu) birbirine dik üç düzleme **asal düzlemler**, bu düzlemlerdeki gerilmelere **asal gerilmeler** denir. Amacımız bu özel gerilmeleri ve düzlemlerini (Kosinüs doğrultmanlarını) bilinenler cinsinden hesaplamaktır.



Normali  $\mathbf{N}$  olan dördüncü (ABC) düzlemi dikkate alalım.

Bu düzlemin asal düzlem olması için  $\mathbf{S}$  gerilme vektörünün kayma gerilmesi bileşeni olmamalıdır. Bu durumda  $\mathbf{S}$  vektörü,  $\mathbf{N}$  normali doğrultusundadır. (+ N veya -N yönünde olabilir)



N yönündeki bir bileşke vektörün şiddeti ile kosinüs doğrultmanları çarpılırsa, Kartezyen bileşenler elde edilir. (püf noktası 3'den)

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma \cdot l = \sigma \cos \alpha \\ S_y &= \sigma \cdot m = \sigma \cos \beta \\ S_z &= \sigma \cdot n = \sigma \cos \gamma \end{aligned}$$

Aynı zamanda, Kartezyen bileşenler için (1.5a-c) denklemlerinden biliyoruz ki:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ S_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ S_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = l\sigma \\ S_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} = m\sigma \\ S_z &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = n\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \sigma l &= 0 \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \sigma m &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n - \sigma n &= 0 \end{aligned}$$

$$l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = 0 \quad (1.34)$$

$$l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{yz} = 0 \quad (1.35)$$

$$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) = 0 \quad (1.36)$$

Bu son denklemleri matris formatında yazacak olursak..>>

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.37)$$

(1.2) denklemini hatırlarsak:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \longrightarrow$$

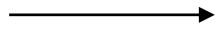
Ancak (1.2) denklemine göre kosinüs doğrultmanlarının hepsi aynı anda sıfır olamaz.  $\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \neq 0$

Bu durumda çarpılan ilk matrisin determinanı sıfır olması gerekir. Problem özdeğer problemi olur.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.38)$$

Determinantın açılımı:

$$\underbrace{\sigma^3 - [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]\sigma^2}_{I_1} + \underbrace{[\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2]\sigma}_{I_2} - \underbrace{[\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)]}_{I_3} = 0$$



$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

(1.39)

3. dereceden olan bu son 1.39. denkleminin **üç adet reel kökü** ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) **asal gerilmelerdir**.

$I_1, I_2$  ve  $I_3$  katsayılarına '**gerilme invariantları**' (değişmez veya sabit) denilmektedir.

Bunlar, gerilme elemanının dönüşümünden etkilenmezler.

### Gerilme invariantları:

Kartezyen Gerilme Bileşenleri Cinsinden

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (1.40a)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (1.40b)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) \quad (1.40c)$$

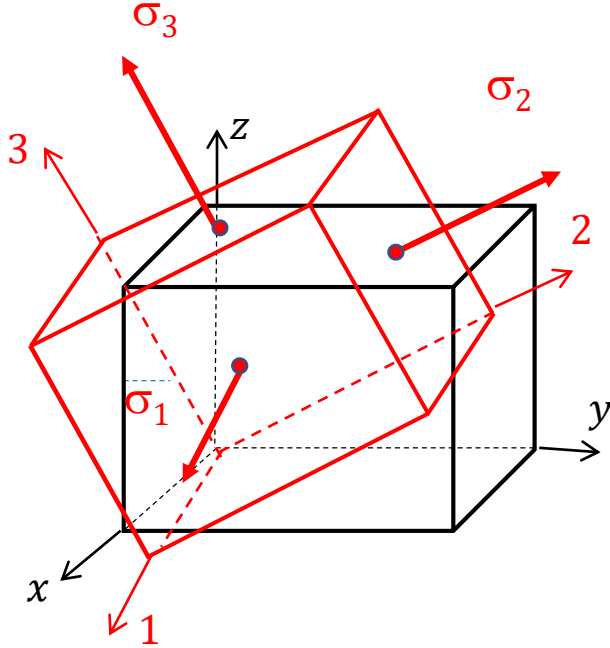
Asal Gerilmeler Cinsinden  
(1,2,3 eksen takımında sadece normal gerilmeler olduğundan 1.40 denklemleri normal gerilmeler (asal gerilmeler) için yazılır.)

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.41a)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (1.41b)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (1.41c)$$

Asal gerilmeler ve eksenleri özel değerler oldukları için, 1,2 ve 3 notasyonları ile simgelenirler :



ve daima  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  olacak şekilde kullanılırlar.

1,2 ve 3 eksenleri asal eksenler birbirlerine diktirler ve Başlangıçta yönleri yani kosinüs doğrultmanları bilinmemektedirler ve her birisi bilenenler yani kartezyen gerilme bileşenleri cinsinden hesaplanabilirler.

Denklem 1.39 in köklerinden asal gerilmeleri ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) bulduğumuzu kabul ediyoruz.

Gerilme dönüşüm bağıntıları artık bu eksen takımının göre de yapılabilir. (Püf noktası-1'i hatırlayınız.)

## 1.5.1 Asal Eksenlerin (1,2,3) Bulunuşu:

Asal eksen doğrultuları da bilinmeyenler arasındadır.

Her birisinin Kosinüs Doğrultmanı bulunursa Asal Eksenler ve Düzlemleri bulunmuş olur.

Şimdi bunların nasıl bulunduğunu göreceğiz:

Daha önce herhangi bir eğik düzlem için elde edilen Denklem (1b) ve bir asal düzlem için yazabildiğimiz Denklem (1.34-1.36) yı, bir  $i$  düzlemi için şöyle yazabiliriz:

$$\text{Denklem (1.2): } l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

$$(\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0$$

$$\text{Denklem (1.34-1.36): } \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0$$

$$\tau_{xz}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0$$

$$i = 1 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \{l_1 \ m_1 \ n_1\}$$

$$i = 2 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \{l_2 \ m_2 \ n_2\}$$

$$i = 3 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \{l_3 \ m_3 \ n_3\}$$

Örneğin  $i = 1$  için bu 4 denklemi yazarsak:  $\sigma_1$ ,  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  değerlerini bulabiliriz.

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

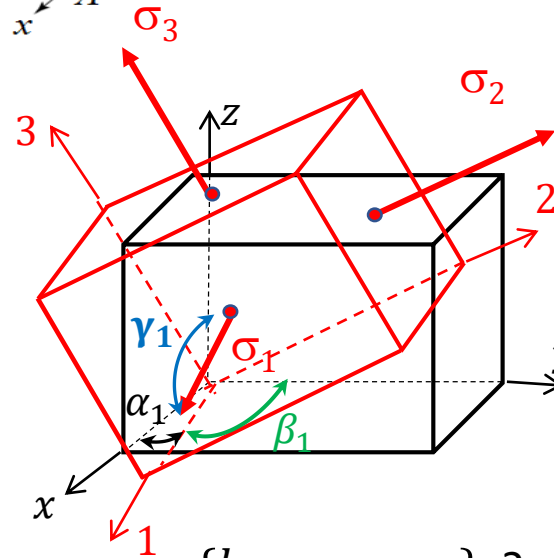
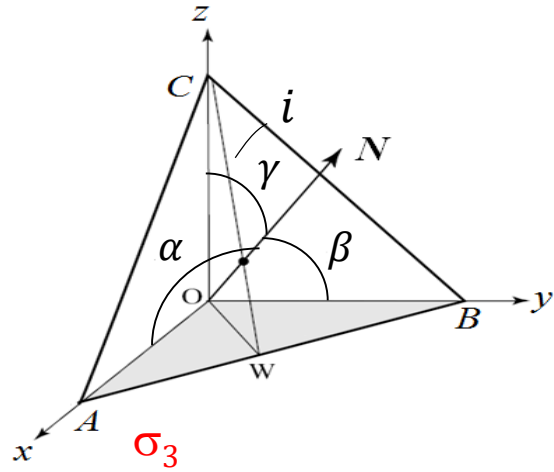
$$(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = 0$$

$$\tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 = 0$$

$$\tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0$$

Bununla birlikte bu denklemlerden türetilmiş olan 3ncü derecedeki Denk. (1.39) dan daha önce  $\sigma_1$  asal gerilmesini bulmuş isek, bu 4 denklemden 3 tanesini kullanarak  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  kosinüs doğrultmanlarını hesaplarız.

Benzer şekilde aynı hesaplama şekli  $i = 2$  ve  $3$  için geçerli olur.



$$\{l_1 \ m_1 \ n_1\} : ?$$

$$\{l_2 \ m_2 \ n_2\} : ?$$

$$\{l_3 \ m_3 \ n_3\} : ?$$

**1.6-) 3 Boyutlu Mohr Çemberi:**

- **Mohr çemberi: bir noktada, tüm düzlemlerdeki gerilmelerin geometrik ifadesidir.**
- **Şimdi  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$  Bilinenlerine göre elde edilen Asal Gerilmeler yardımıyla 3 boyutlu Mohr Çemberinin çıkarılışı ve çizim şekli anlatılacaktır:**
- Herhangi bir eğik düzlem için, birim vektörü ve gerilme bileşenlerini hatırlarsak:

$$\vec{e} = \vec{e}_N = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

Denk.(1.10a-b) den S gerilmesinin normal bileşeni:

$$S_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$\sigma_N = \sigma = \vec{S} \cdot \vec{e} = S_x l + S_y m + S_z n$$

$$S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{xz} ln + \tau_{yz} mn)$$

$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

- x,y,z eksen takımı yerine 1,2,3 asal eksenlerini kullanacağız. Çünkü herhangi bir eksen takımına göre gerilme bileşenleri bilirse, diğer tüm düzlemlerdeki gerilme bileşenleri bulunur (Püf noktası-1).
- Denklem 1.39 den daha önce hesapladığımız Asal gerilmeler  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  artık bilinen değerlerimizdir.
- Eğik düzlemin kosinüs doğrultmanları  $(l, m, n)$  ise artık asal eksenler (1, 2 ve 3) ile yapılan açılarının kosinüsleri olacaktır. Asal düzlemlerde kayma gerilmeleri sıfırdır. Buna göre;

$$x \equiv 1 \longrightarrow$$

$$S_1 = \sigma_1 l \quad (1.42a)$$

$$S_2 = \sigma_2 m \quad (1.42b)$$

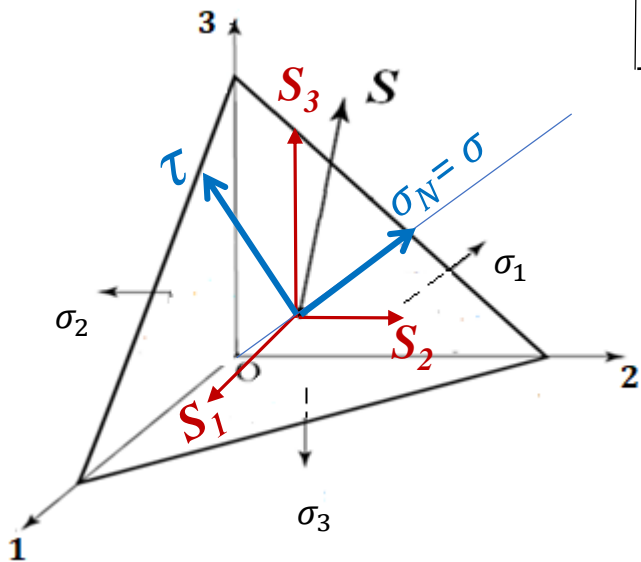
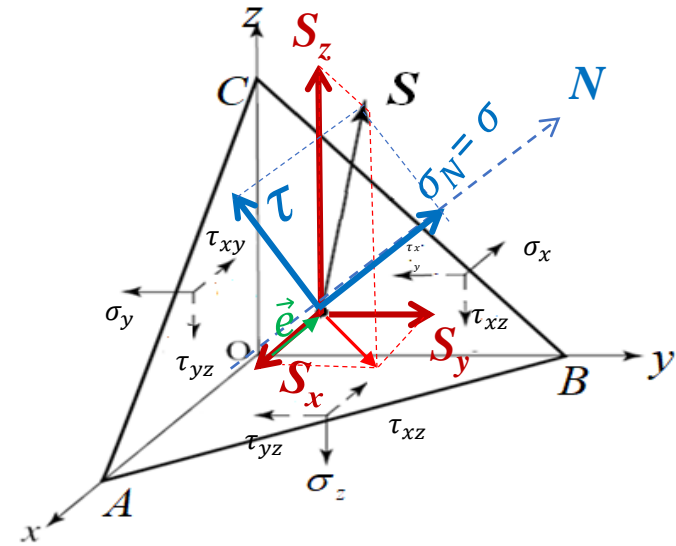
$$S_3 = \sigma_3 n \quad (1.42c)$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (1.42d)$$

$$\sigma = S_1 l + S_2 m + S_3 n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1.43)$$

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2 = (\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2) - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (1.44)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1.2)$$



(1.2), (1.43) ve (1.44) denklemlerinden;

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

olduğunu dikkate alarak;

$$\begin{array}{l}
 \downarrow \\
 l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (1.45a) \\
 m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (1.45b) \\
 n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (1.45c)
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 l^2 \geq 0 \text{ dir.} \longrightarrow \sigma_1 - \sigma_2 > 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_1 - \sigma_3 > 0 \text{ olacağı için} \longrightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0 \quad (1.46a) \\
 m^2 \geq 0 \text{ dir.} \quad \sigma_2 - \sigma_1 < 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_2 - \sigma_3 > 0 \text{ olacağı için} \longrightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) \leq 0 \quad (1.46b) \\
 n^2 \geq 0 \text{ dir.} \longrightarrow \sigma_3 - \sigma_1 < 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_3 - \sigma_2 < 0 \text{ olacağı için} \longrightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0 \quad (1.46c)
 \end{array} \right\}$$

(1.46a) eşitsizliği açılırsa:

$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 \geq 0$$

Bu son eşitsizliğe  $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$  eklenir ve çıkarılırsa :

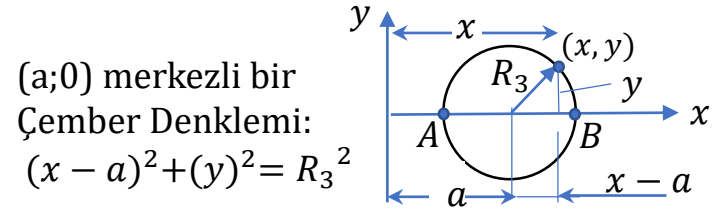
$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

Son denklemi Tekrar düzenlersek...>>

$$\tau^2 + \left( \sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1.47)$$

1.47 denkleminin sınır durumu eşitlik olmasıdır ve bu eşitlik x ekseninde bir çember denklemine benzetilebilir.



$$\tau^2 + \left( \sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

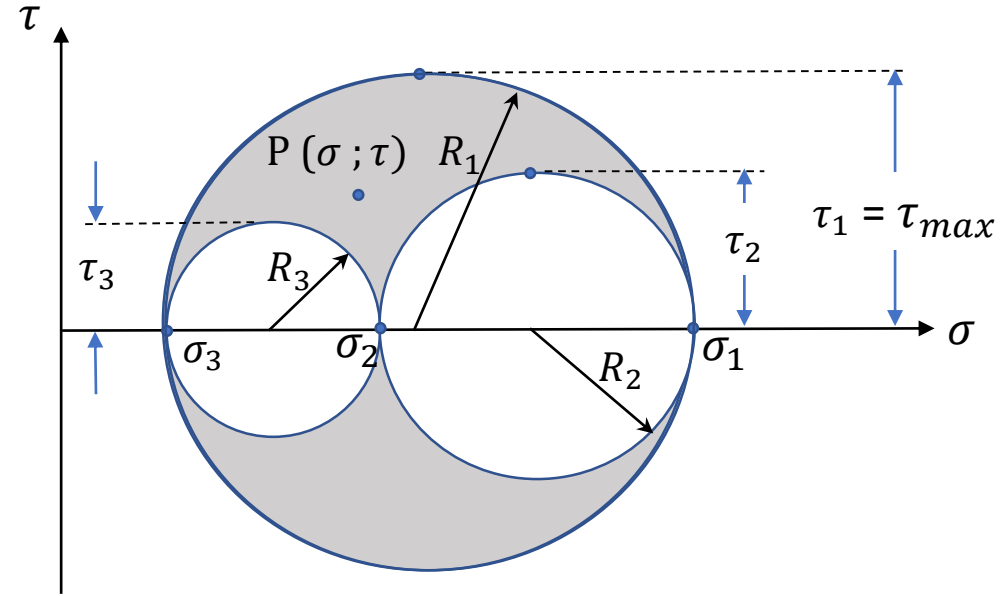
$a = \frac{A + B}{2}, R_3 = \frac{B - A}{2}$

- Dikkat edilirse Denklem (1.47) yi  $R_3$  yarı çaplı çemberin üzerinde veya dışındaki noktalar sağlayabilir.

(1.46b) ve (1.46c) eşitsizlikleri için benzer işlemler yapıldığında yandaki eşitlikler elde edilir.

$$\tau^2 + \left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 \leq \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \quad (1.48)$$

$$\tau^2 + \left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (1.49)$$



3 Boyutlu Durumda MOHR Çemberi

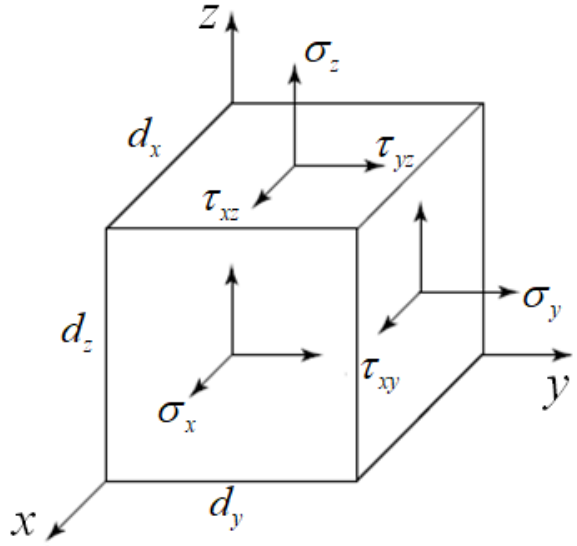
$$R_3 = \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$R_2 = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$R_1 = \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{max}$$

- 1.48 ve 1.49 Denklemlerin sınır durumundaki (eşitlik durumunda) çemberler de çizilebilir:
- Denklem (1.48) i  $R_1$  yarıçaplı çemberin üzerindeki veya içindeki noktalar sağlayabilir.
- Denklem (1.49) u ise  $R_2$  yarıçaplı çemberin üzerindeki veya dışındaki noktalar sağlayabilir.
- Netice olarak 4ncü bir P eğik düzlemindeki gerilme bileşenlerini veren P ( $\sigma ; \tau$ ) noktası, bu üç çemberin arasında kalan gri alanda yer alır. Şimdi P noktasının ölçekli çizimle nasıl bulunacağı gösterilecektir... >>



**Örnek 1.3**

Bir noktadaki gerilme durumu yandaki gibi verilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -4.7 & 6.45 \\ -4.7 & 4.6 & 11.8 \\ 6.45 & 11.8 & -8.3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Buna göre;

- Asal gerilmeleri bulunuz.
- Maksimum asal gerilme düzlemini tespit ediniz.
- Mohr çemberlerini çizerek maksimum kayma gerilmesini belirleyiniz.
- 1,2 ve 3 Asal Eksenlerinin pozitif yönleriyle sırasıyla  $\alpha = 150^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$  ve  $\gamma = 60^\circ$  açı yapan bir P eğik düzlemindeki kayma ve normal gerilme bileşenlerini hesaplayınız ve ölçekli Mohr Çemberi çizerek bu değerleri ölçümlerle tekrar tespit ediniz.

**Çözüm:** Önce 1.40 denklemlerinden Gerilme İnvariantlarını bulalım:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -19 + 4.6 - 8.3 = -22,7$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = (-19) \times 4.6 + (-19) \times (-8.3) + 4.6 \times (-8.3) - [(-4.7)^2 + (6.45)^2 + (11.8)^2] = -170.81$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) = 2647.52$$

$$\text{Denk. (1.39'dan): } \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \longrightarrow \sigma^3 + 22.7\sigma^2 - 170.81\sigma - 2647.52 = 0$$

(Bu denklemin kökleri bize asal gerilmeleri verir.)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 11.62 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -9.00 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -25.32 \text{ MPa} \end{aligned} \right\}$$

**b-)** Maksimum asal gerilme ( $\sigma_1$ ) doğrultusunu bulmak için, Denk.(1.2) ve Denk. (1.34-36)  $i=1$  için yazarız:

$i=1$  için

Denklem (1.2):  
(Bağımsız denklemdir.)

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (1)$$

Denklemler (1.34-36):

(Bu denklemlerden 2si bağımsızdır)

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0 \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0 \\ \tau_{xz}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = 0 \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 = 0 \\ \tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0 \end{array}$$

$$(-19 - 11.62)l_1 - 4.7m_1 + 6.45n_1 = 0 \quad \rightarrow \quad -30.62l_1 - 4.7m_1 + 6.45n_1 = 0 \quad (2)$$

$$-4.7l_1 + (4.6 - 11.62)m_1 + 11.8n_1 = 0 \quad \rightarrow \quad -4.7l_1 - 7.02m_1 + 11.8n_1 = 0 \quad (3)$$

$$6.45l_1 + 11.8m_1 + (-8.3 - 11.62)n_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 6.45l_1 + 11.8m_1 - 19.92n_1 = 0 \quad (4)$$

Toplam 3 bağımsız denklem ve 3 bilinmeyen vardır. (2), (3), (4) denklemlerinden 2si, (1) nci denklemle birlikte kullanılarak:

$\sigma_1$  asal gerilmesinin doğrultman kosinüsleri  
( $l_1, m_1, n_1$ ) şu şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{array}{ll} l_1 = \cos\alpha_1 = 0.0266 & \rightarrow \alpha_1 = 88.47^\circ \\ m_1 = \cos\beta_1 = -0.864 & \rightarrow \beta_1 = 149.77^\circ \\ n_1 = \cos\gamma_1 = -0.503 & \rightarrow \gamma_1 = 120.20^\circ \end{array}$$

Not: Benzer işlemler  $i=2$  ve  $i=3$  için yapılarak,  $\sigma_2$  ve  $\sigma_3$  asal gerilmelerinin doğrultman kosinüsleri ( $l_2, m_2, n_2$ ) ve ( $l_3, m_3, n_3$ ) bulunur.

## c-)3 Boyutlu Mohr Çemberini çizelim.

$$\sigma_1 = 11.62 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -9.00 \text{ MPa}$$

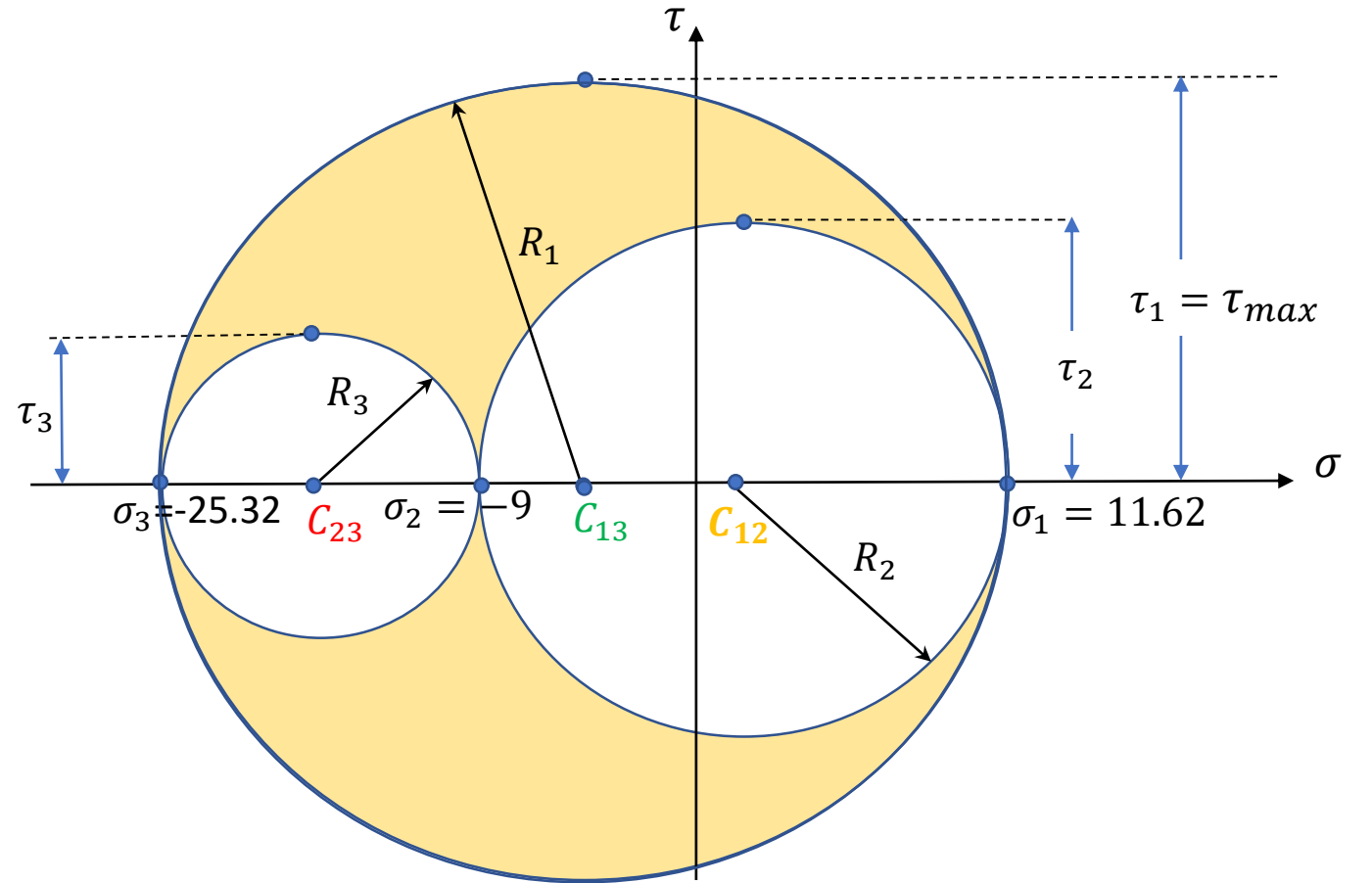
$$\sigma_3 = -25.32 \text{ MPa}$$

$$R_3 = \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{-9 - (-25.32)}{2} = 8.16 \text{ MPa}$$

$$R_2 = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{11.62 - (-9)}{2} = 10.31 \text{ MPa}$$

$$R_1 = \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{max}$$

$$\tau_{max} = \frac{11.62 - (-25.32)}{2} = 18.47 \text{ MPa}$$



d-) P eğik düzlemindeki normal ve kayma gerilme bileşenlerinin bulunması

Hesaplamayla:

$$\alpha = 150^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\gamma = 60^\circ$$

Kosinüs doğrultmanları

$$l = \cos \alpha = -0.866$$

$$m = \cos \beta = 0.707$$

$$n = \cos \gamma = 0.5$$

(a şıkında hesaplanan)

Asal gerilmeler

$$\sigma_1 = 11.62 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -9.00 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -25.32 \text{ MPa}$$

P eğik düzlemindeki S bileşke gerilmesinin asal doğrultulardaki bileşenleri

1.42 denklemlerinden:

$$S_1 = \sigma_1 l = 11.62 \times (-0.866) = -10.06 \text{ MPa}$$

$$S_2 = \sigma_2 m = -9 \times (0.707) = -6.36 \text{ MPa}$$

$$S_3 = \sigma_3 n = -25.32 \times (0.5) = -12.66 \text{ MPa}$$

1.43 denklemden S bileşke gerilmesinin normal yöndeki bileşeni:

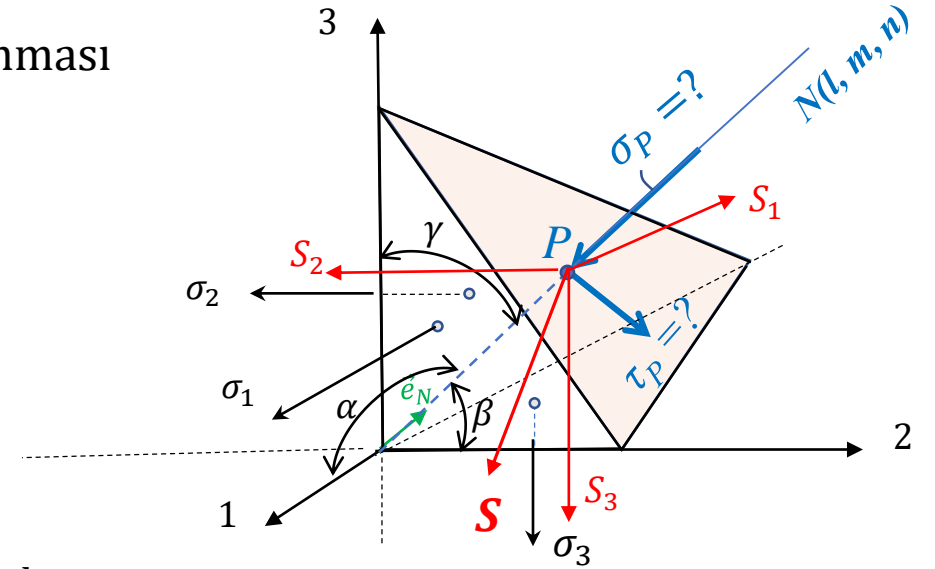
$$\sigma_p = S_1 l + S_2 m + S_3 n$$

$$= (-10.07) \times (-0.866) + (-6.36) \times 0.707 + (-12.66) \times 0.5$$

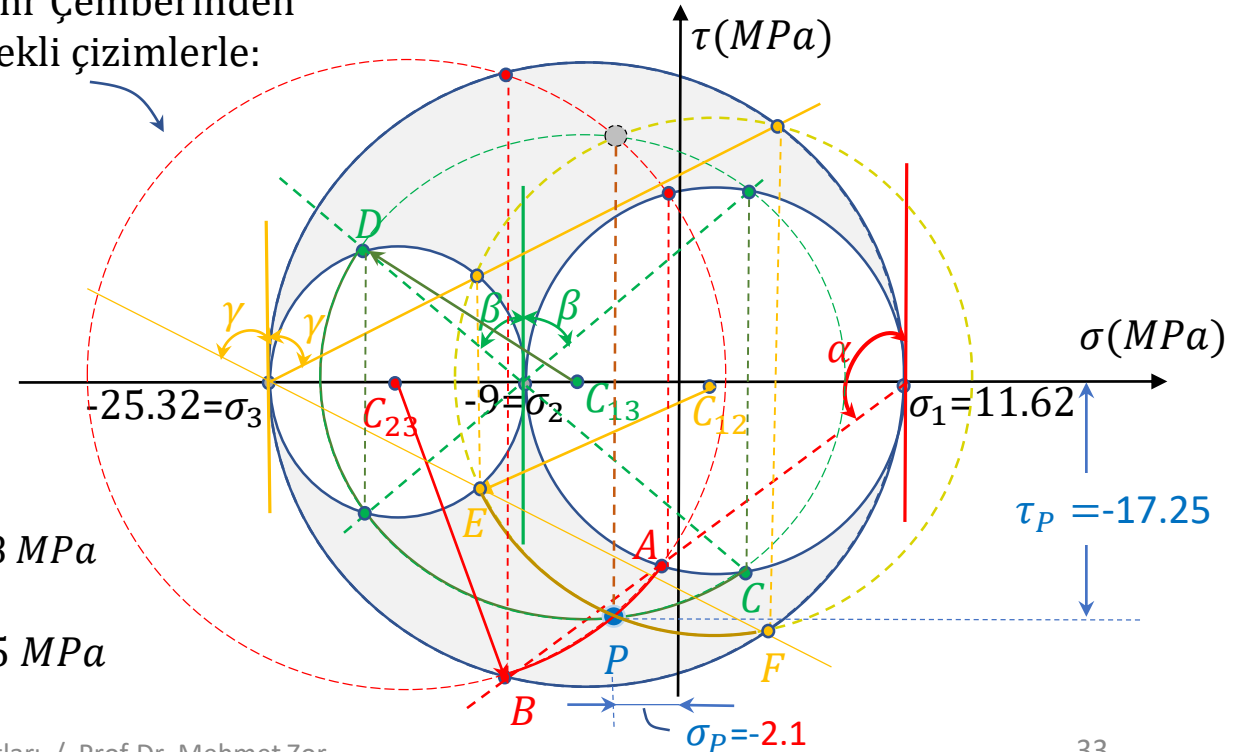
$$\rightarrow \sigma_p = -2.1 \text{ MPa}$$

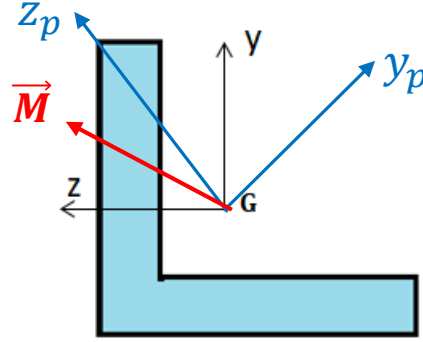
$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \sqrt{(-10.07)^2 + (-6.36)^2 + (-12.66)^2} \rightarrow S = 17.38 \text{ MPa}$$

$$\text{Kayma bileşeni: } \tau_p = \sqrt{S^2 - \sigma_p^2} = \sqrt{17.38^2 - (-2.1)^2} \rightarrow \tau_p = 17.25 \text{ MPa}$$



Mohr Çemberinden  
ölçekli çizimlerle:



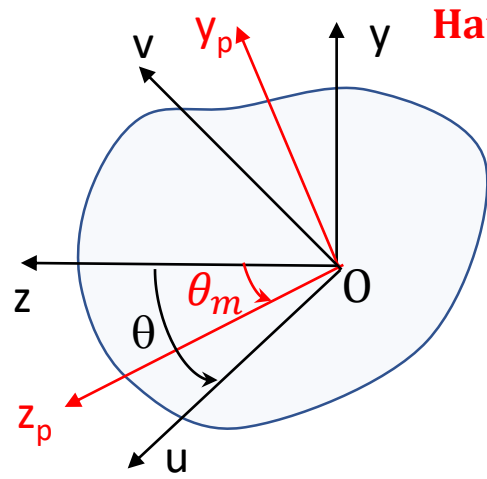


# 2 - EĞİK EĞİLME

(Simetrik Olmayan Eğilme)

(video 9a) (video 9b) (video 9c)

**Bu bölümde Amacımız:** Bir kirişte, iki eksenli eğilme veya diğer ismiyle eğik eğilme mevcut iken kiriş kesitinde normal gerilme dağılımını formülize etmektir. Eğik Eğilmenin ne olduğunu anlamak için öncelikle Statik ve Mukavemet 1 den iki hatırlatma yapacağız:

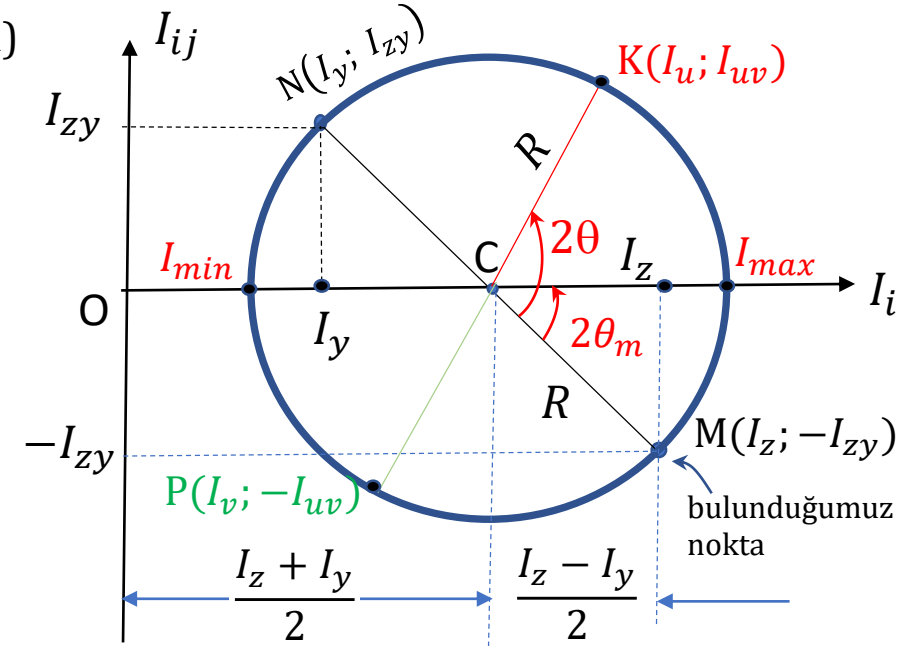


**Hatırlatma-1 :** (Statik 6c konusundan Asal Atalet Eksenleri)

Bir noktadan geçen tüm eksenlere göre atalet momentlerinin geometrik ifadesi olan mohr çemberi aşağıdaki adımlarla çizilir:

- 1-  $M(I_z; -I_{zy})$  noktası belirlenir.
- 2-  $N(I_y; I_{zy})$  noktası belirlenir.
- 3- M-N birleştirilir.
- 4- C merkezli çember çizilir.

5- Çember üzerinde bulunduğumuz M noktasından itibaren gerçekteki ile aynı yönde  $2\theta$  kadar dönülünce, geldiğimiz K noktasının koordinatları aradığımız  $I_u; I_{uv}$  değerlerini verir. K dan itibaren çemberde  $180^\circ$  (gerçekte ise  $90^\circ$ ) dönülürse geldiğimiz nokta olan P nin koordinatları ise  $I_v; -I_{uv}$  değerine eşittir.



y-z düzlemindeki bir alanın herhangi bir O noktasından geçen herhangi u-v eksenlerine göre atalet momentleri alttaki dönüşüm formüllerinden hesaplanır: ( $I_y, I_z$  ve  $I_{zy}$  ve  $\theta$  biliniyorken)

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{zy} \sin 2\theta \quad (2.1)$$

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{zy} \sin 2\theta \quad (2.2)$$

$$I_{uv} = -\frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{zy} \cos 2\theta \quad (2.3)$$

Çemberin yarıçapı:

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad (2.4)$$

Asal Atalet momentleri:

$$I_{\max} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm R \quad (2.5)$$

Asal Atalet eksenini açısı:

$$\tan 2\theta_m = \frac{|I_{zy}|}{\left|\frac{I_z - I_y}{2}\right|} \quad (2.6)$$

Not: Statik 6c konusunda alan x-y düzleminde incelenmişti. Ancak Mukavemetteki eğilme konularında kesit y-z düzleminde incelenmektedir. Bu nedenle statik 6c konusundaki formüller, y-z eksenlerine göre tekrar uyarlanmıştır.

**Hatırlatma 2: (Mukavemet 1 den Basit Eğilme)**

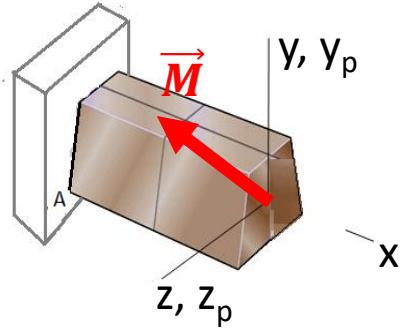
Mukavemet 1 de öğrendiğimiz üzere, bir kirişin y-z düzlemindeki kesitinde Basit Eğilme aşağıdaki iki şart mevcutken oluşur:

- 1- Kesit y veya z eksenlerinden en az birisine göre simetrik olmalıdır.
- 2- Kesitteki bileşke moment vektörünün doğrultusu y veya z eksenlerinden birisiyle çakışmalıdır.

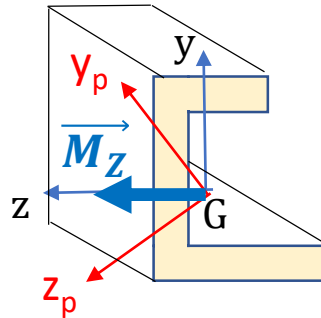
**Eğik Eğilme nedir? Ne zaman oluşur?**

Yukarıdaki iki şarttan en az birisi sağlanmıyorsa kesitte Eğik Eğilme oluşur.

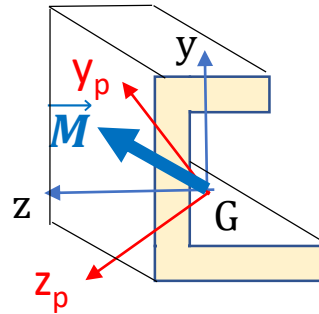
Aşağıda eğik eğilme durumuna 3 örnek verilmiştir.



(2nci şart sağlanmıyor)

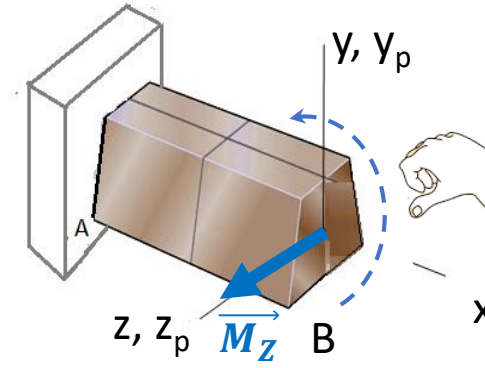


(1nci şart sağlanmıyor)

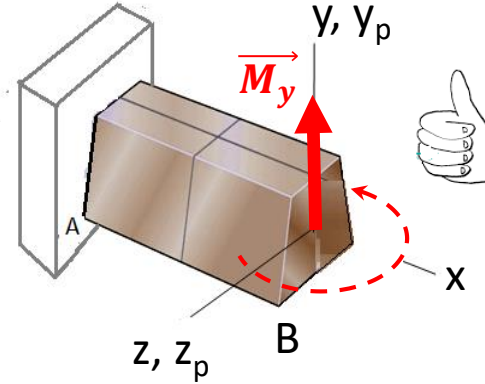


(1nci ve 2nci şartlar sağlanmıyor)

z yönünde basit eğilme



y yönünde basit eğilme



Tümü Eğik Eğilme

**Normal Gerilme Formülü**

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

Bu formülün başında niçin «-» yok. Cevap için Muk1/5a.7 konusuna bakınız

$$\sigma_x = ?$$

**Amacımız** Eğik Eğilme Durumunda normal gerilme dağılımını elde etmektir.

*Eksen takımı daima kesitin G ağırlık merkezine yerleştirilmelidir.*

*Simetrik kesitlerde asal atalet eksenleri ( $y_p, z_p$ ) y ve z eksenleriyle çakışmıştır.*

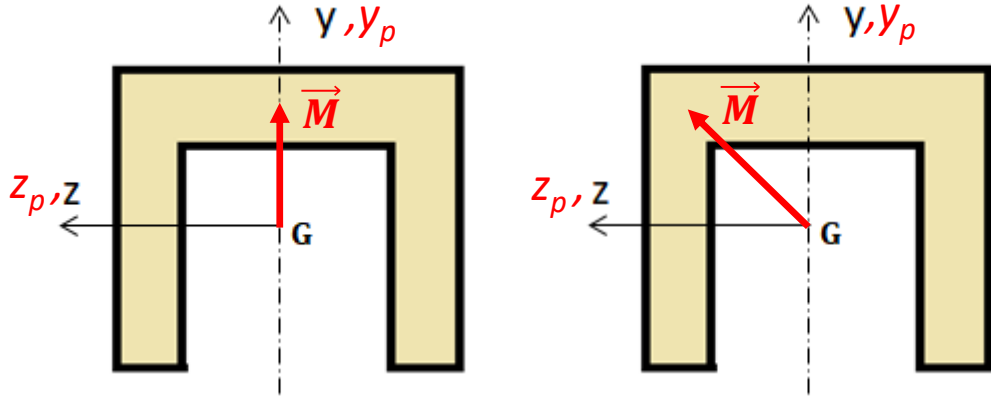
## Eğik Eğilme Tespitinde;

**Daha Genel Kural:** Simetrik veya Simetrik olmayan kesitlerde, Bileşke Eğilme Moment Vektörünün doğrultusu, asal atalet eksenlerinden birisiyle çakışırsa, (asal eksen takımına göre) basit eğilme oluşur. Aksi Halde Eğik Eğilme Oluşur.

## Simetrik kesitler için Örnekler

**Püf Noktası:** Simetrik kesitlerde Kartezyen eksenler aynı zamanda asal atalet eksenleridir.

$$y_p \equiv y, z_p \equiv z$$



## Basit Eğilme

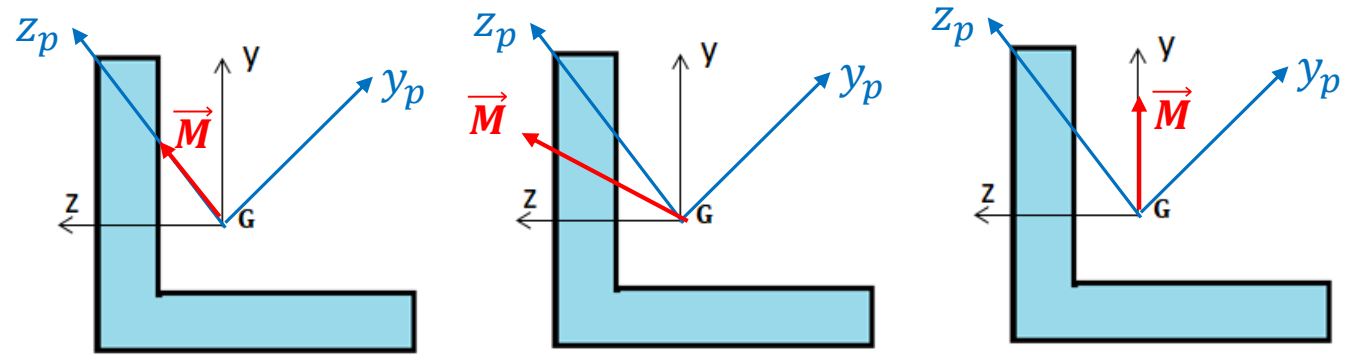
(Bileşke moment asal eksenlerden birisiyle çakışmış.)

## Eğik Eğilme

(Bileşke moment asal eksenlerden hiçbiriyle çakışmamış.)

## Simetrik olmayan kesitler için Örnekler

Asal atalet eksenleri y ve z eksenlerinden farklıdır.



## Basit Eğilme

(Bileşke moment asal eksenlerden birisiyle çakışmış.)

## Eğik Eğilme

(Bileşke moment asal eksenlerden hiçbiriyle çakışmamış.)

## Eğik Eğilme

(Bileşke moment asal eksenlerden hiçbiriyle çakışmamış. y ile çakışmış ama y asal atalet eksenine değil)

Eğik Eğilme de Normal Gerilme ( $\sigma_x$ ) Hesaplamaları:**1. Yöntem:** Eğik Eğilmenin 2 tane Basit Eğilmeye İndirgenmesi (Süperpozisyon Yöntemi)

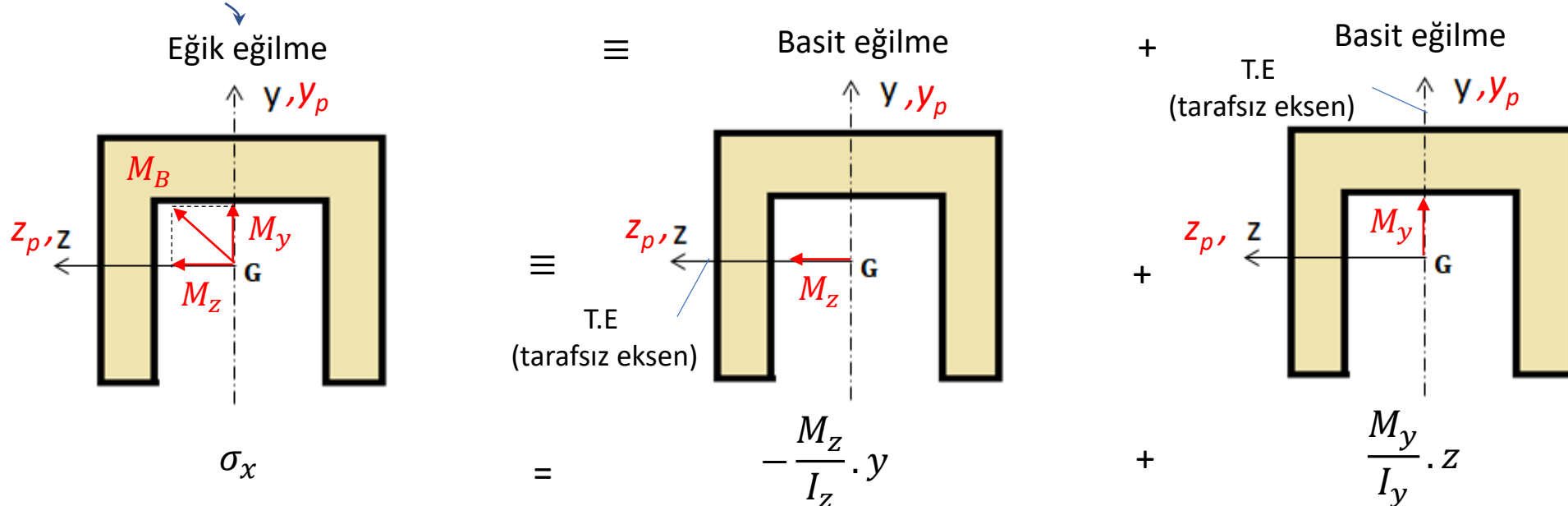
- Bu yöntemde bileşke moment, asal atalet eksenleri üzerinde bileşenlerine ayrılır.
- Her bir moment bileşeni tek başına basit eğilme oluşturduğu için basit eğilmedeki normal gerilme denklemi kullanılabilir.
- Herbir basit eğilme için bir noktada hesaplanacak  $\sigma_x$  ler üst üste toplanınca eğik eğilmedeki normal gerilme bulunmuş olur.
- Buradaki püf noktası, gerilmesi bulunmak istenen noktanın koordinatlarını asal atalet eksenleri cinsinden yazmaktır.
- Bu yöntem simetrik kesitler için daha avantajlı ve pratiktir. Simetrik olmayan kesitlerde asal atalet momentleri ve eksenlerinin hesaplanması işlemleri uzatabilir.

**1nci Örnek:** Simetrik bir kesitte, simetri eksenlerinden hiçbirisiyle çakışmayan  $M_B$  bileşke iç momenti olduğunu düşünüyoruz.

Kesitin herhangi bir noktasında  $\sigma_x$  normal gerilmesini aşağıdaki gibi hesaplarız:

Önce bileşke momenti  $M_y$  ve  $M_z$  bileşenlerine ayırıp bu bileşenleri sırayla kesite uyguluyoruz ve normal gerilmeleri topluyoruz.

Bileşke moment asal atalet eksenleriyle çakışmadığı için



**2nci örnek:** Simetrik olmayan bir kesit için M bileşke momentinden dolayı kesitin **b** noktasındaki normal gerilmenin hesaplanması:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{Eğik Eğilme} \\ \equiv \\ \text{Basit Eğilme} \\ \equiv \\ \text{Basit Eğilme} \end{array} & \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} & \\
 \begin{array}{c} \text{Eğik Eğilme} \\ \text{Basit Eğilme} \\ \text{Basit Eğilme} \end{array} & & \\
 \begin{array}{c} \sigma_{x_b} \\ \sigma_{x_b} \end{array} & = & \begin{array}{c} \sigma_{x_{b-1}} \\ \sigma_{x_{b-2}} \end{array} \\
 \sigma_{x_b} & = & -\frac{M_{z_p}}{I_{z_p}} y_{pb} + \frac{M_{y_p}}{I_{y_p}} \cdot z_{pb}
 \end{array} \quad (2.8)$$

$M_{z_p}$  ve  $M_{y_p}$ : M bileşke momentinin asal eksenlerdeki bileşenleridir.

$I_{z_p}$  ve  $I_{y_p}$  asal atalet momentleridir. (Birisi  $I_{max}$  iken diğeri  $I_{min}$ . dur ve 2.5 denkleminde hesaplanırlar.)

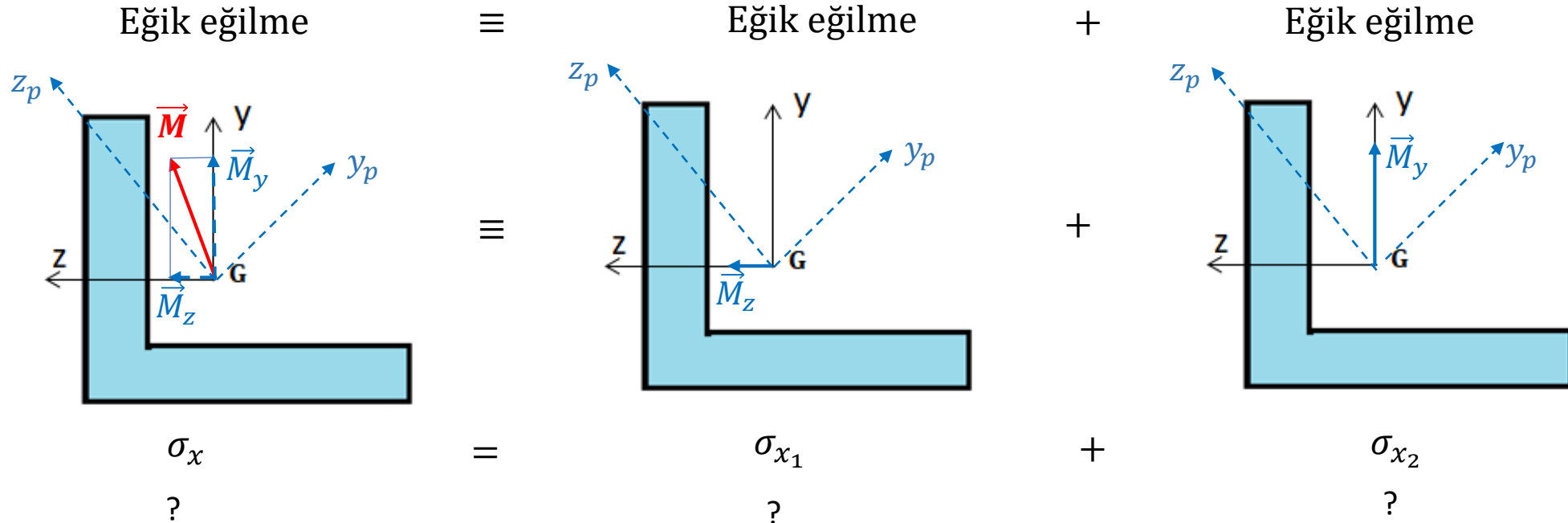
**b** noktasının koordinatlarının asal eksenlere göre  $(y_{pb}, z_{pb})$  yazıldığına dikkat ediniz.

Eğik Eğilme de Normal Gerilme ( $\sigma_x$ ) hesabında,

**2. Yöntem:** Kartezyen koordinatlar cinsinden  $\sigma_x$  denkleminin çıkarılması:

Bu yöntemde Asal atalet momentlerini veya asal atalet eksenlerini kullanmaya gerek olmayacak şekilde normal gerilme formülünü y-z indisine sahip değişkenler ( $I_z, I_y, I_{zy}, M_z, M_y, z, y$ ) cinsinden çıkaracağız.

Bu yöntem simetrik olmayan kesitler için daha pratiktir.

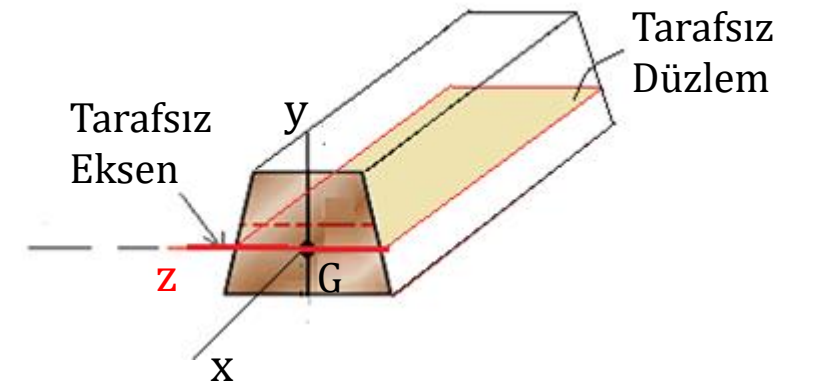
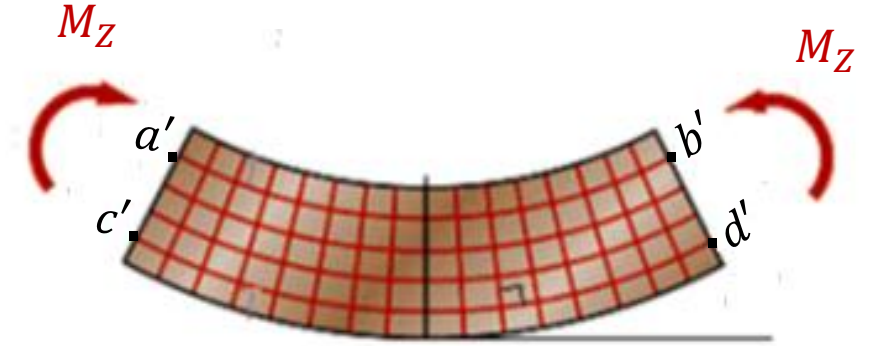
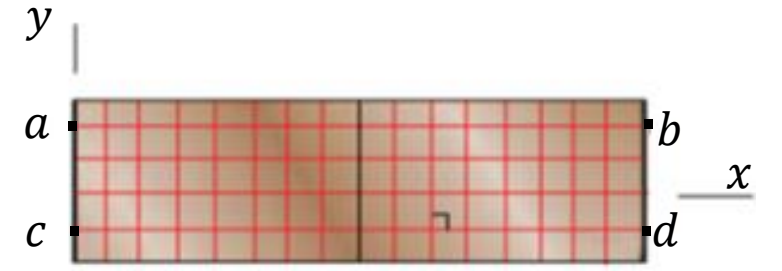


Bileşke momentin Kartezyen bileşenlere ayırsak bile herbirisi için eğik eğilme söz konusudur ve bu nedenle basit eğilmedeki normal gerilme denkleminin geçerli değildir. Asal eksenleri kullanmadan sadece Kartezyen indisler (y-z) cinsinden  $\sigma_x$  i nasıl bulabiliriz?

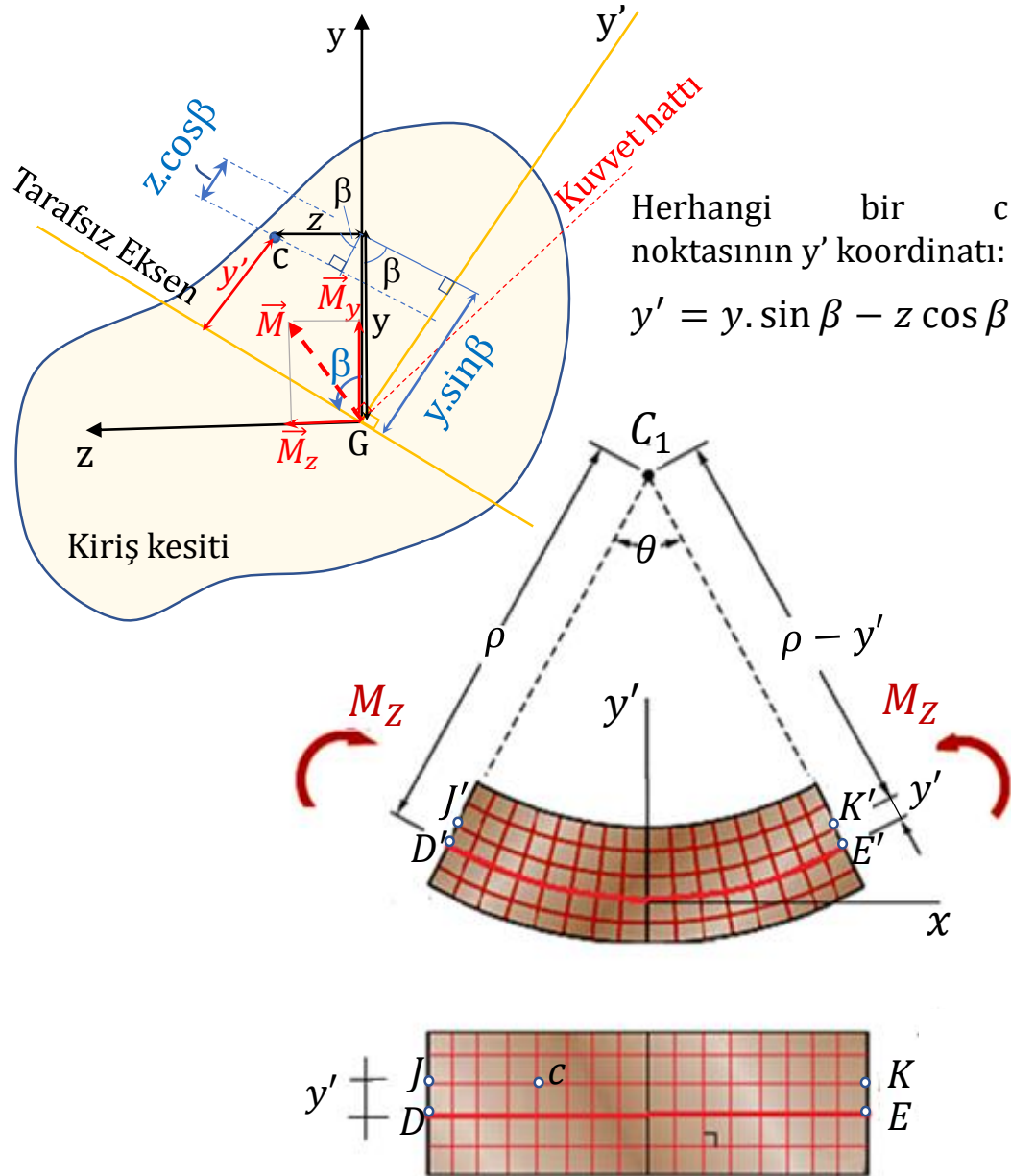
Şimdi bu sorunun cevabını araştıracağız..>>

**Hatırlatma:**

Mukavemet 1 basit eğilme konusunda anlatıldığı üzere, kirişi uzunlamasına liflerden oluşmuş gibi düşündüğümüzde ve yandaki gibi  $M_z$  eğilme momentine maruz bıraktığımızda, üstteki lifler kısalır, alttaki lifler uzar. Alttan üste doğru gidildikçe liflerin uzama miktarı azalır ve sonra kısalan lifler bölgesine geçilir. Arada geçiş bölgesinde öyle lifler vardır ki bu lifler ne uzar ne kısalır, yani boyları değişmez. Boyları aynı kalan ve aynı  $y$  koordinatına sahip bu liflerin bulunduğu düzleme tarafsız düzlem denir. Tarafsız düzlemin bir kesitle kesişim noktası olan çizgi ise tarafsız eksen ismini alır. Basit eğilme durumunda sadece  $M_z$  momenti varken Tarafsız eksen  $z$  eksenine, sadece  $M_y$  momenti varken ise  $y$  eksenine olacaktır. Eğilmeden önce dik çizgiler, eğilmeden sonra da dik kalmaya, düzlem kesitler düzlem kalmaya devam eder kabulleriyle normal gerilme formülü  $(\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y)$  şeklinde Mukavemet 1-5a konusunda çıkarılmıştı.



## Kartezyen Koordinatlara Göre Eğik Eğilme Hesapları:



Simetrik olmayan bir kiriş kesitinde eğik eğilme durumunda Tarafsız Eksen y eksenine belli bir  $\beta$  açısı yapar. Bu  $\beta$  açısı da şu an bilinmeyenler arasındadır.

y': T.E (tarafsız eksene) dik eksendir. Kuvvet hattı ise M bileşke momentine diktir.

Basit eğilme için yapılan kabuller eğik eğilme için x-y' düzleminde geçerlidir. x: kiriş eksen ve kesit normalidir. x-y' düzleminde eksene dik çizgiler, eğilmeden sonra da dik kalır. Düzlem kesitler düzlem kalır.

Eğilme sonucunda çubuğun şekli  $C_1$  merkezli,  $\rho$  yarıçaplı bir yay formu alır. DE: Tarafsız düzlem üzerindeki lifdir. Boyu değişmez. Bu durumda  $DE = D'E'$  JK : tarafsız düzlemden y' kadar uzaklıktaki lifdir. Son boyu  $J'K'$  dür. (Kesitteki c noktasının JK lifi üzerinde olduğunu düşünüyoruz.)

Tüm liflerin İlk boylar eşittir.  $JK = DE$

JK lifi için; son boy:  $J'K' = (\rho - y')\theta$  ,  $D'E' = \rho\theta = DE = JK$

JK lifinin Toplam uzaması :  $\delta = J'K' - JK = (\rho - y')\theta - \rho\theta = -y'\theta$

JK için birim elastik uzama :  $\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y'\theta}{\rho\theta} = -\frac{y'}{\rho}$

JK lifinin geçtiği herhangi bir c noktasında elastik bölgedeki normal gerilme:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x = -E \cdot \frac{y'}{\rho} = -\frac{E}{\rho} (y \cdot \sin \beta - z \cos \beta) \quad (2.9)$$

Son 2.9 denklemini açıp düzenlersek: 
$$\sigma_x = -\frac{E}{\rho} \cdot \sin \beta \cdot y + \frac{E}{\rho} \cdot \cos \beta \cdot z \rightarrow \sigma_x = a \cdot y + b \cdot z$$

Katsayılar tanımlarsak:  $a$   $b$

Dış normal kuvvet olmadığından, kesitte iç normal kuvvet sıfır olmalıdır.

$$F_{x_{iç}} = 0 = \int dF = \int \sigma_x \cdot dA = \int (ay + bz) dA \rightarrow a \int_A y \cdot dA + b \int_A z \cdot dA = 0$$

$dF$  in  $G$ 'ye göre  $z$  dik uzaklığı ile çarpımı  $y$  yönündeki dif. iç momente eşittir.  $dM_y = dF \cdot z$

*Sağ el kaidesine göre pozitiftir.*

$y$  yönündeki toplam iç moment:

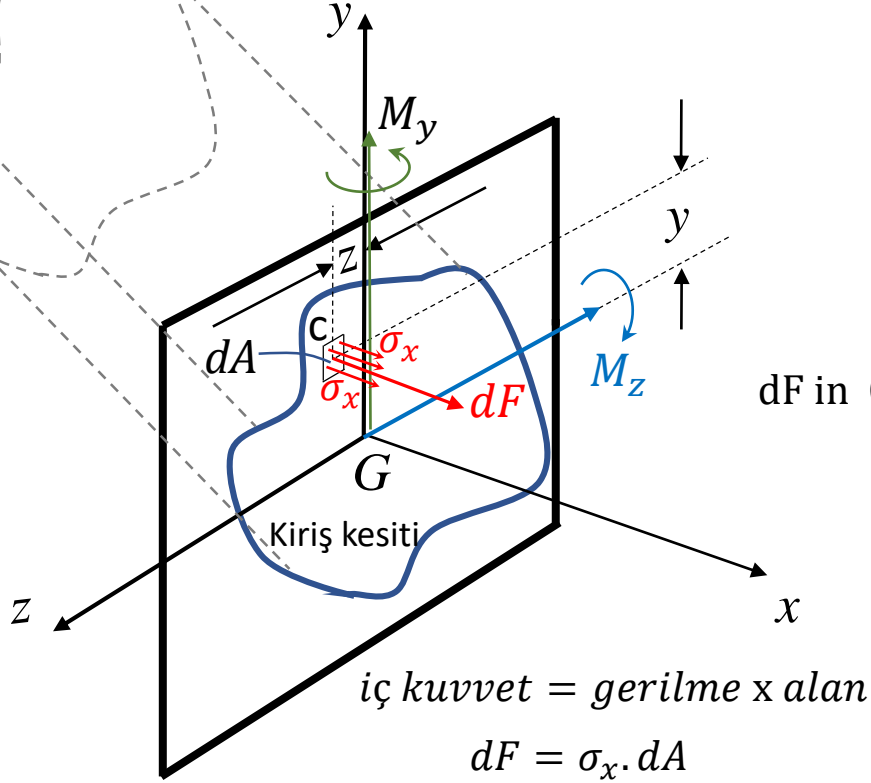
$$M_y = \int dM_y = \int dF \cdot z = \int \sigma_x \cdot z \cdot dA = \int (ay + bz) \cdot z \cdot dA$$

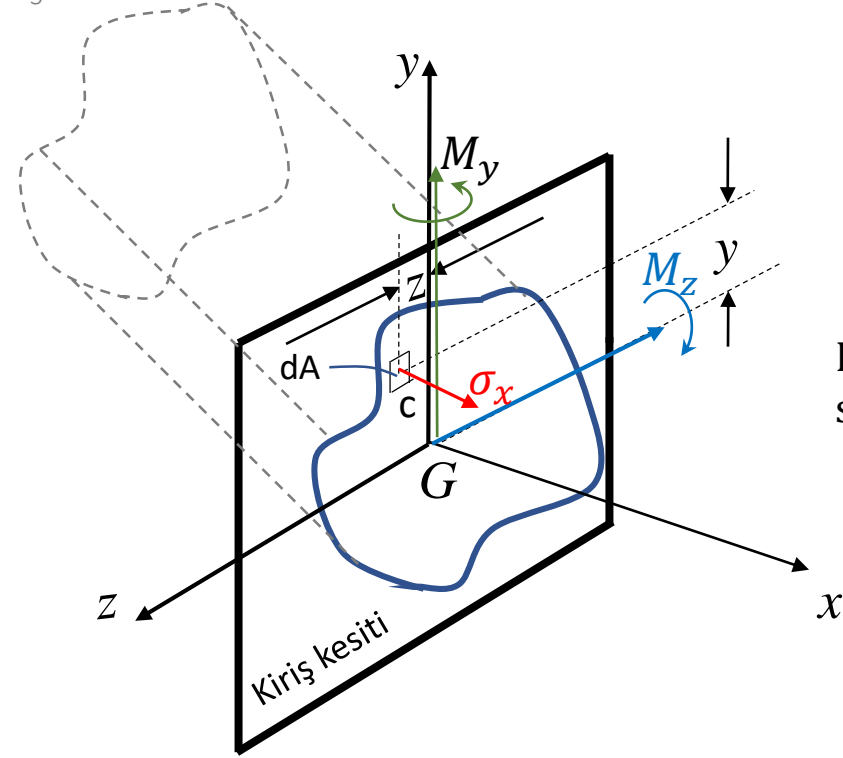
$$\rightarrow a \int_A yz \cdot dA + b \int_A z^2 \cdot dA = 0 \rightarrow M_y = a \cdot I_{zy} + b \cdot I_y \quad (2.10)$$

$dF$  in  $G$ 'ye göre  $y$  dik uzaklığı ile çarpımı  $z$  yönündeki dif. iç momente eşittir.  $dM_z = -dF \cdot y$  (Sağ el kaidesine göre negatiftir.)

$z$  yönündeki toplam iç moment:

$$M_z = \int dM_z = - \int dF \cdot y = - \int \sigma_x \cdot y \cdot dA \rightarrow - \int (ay + bz) \cdot y \cdot dA = M_z = -(a \int y^2 \cdot dA + b \int yz \cdot dA) \rightarrow -M_z = a \cdot I_z + b \cdot I_{zy} \quad (2.11)$$





2.10 ve 2.11 denklemlerinden katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$a = \frac{-M_z I_y + M_y I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}, \quad b = \frac{M_z I_{zy} + M_y I_z}{I_z I_y - I_{zy}^2} \quad (2.12a,b)$$

$$\sigma_x = ay + bz \quad \text{idi.}$$

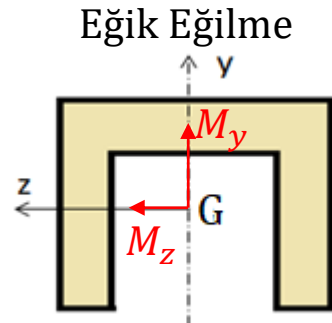
Buna göre, eğik eğilmeye maruz bir kirişin herhangi bir kesitinin y, z koordinatlarına sahip herhangi bir noktasındaki normal gerilme aşağıdaki denklemden hesaplanabilir:

$$\sigma_x = \frac{-(M_z I_y + M_y I_{zy})y + (M_z I_{zy} + M_y I_z)z}{I_z I_y - I_{zy}^2} \quad (2.13)$$

Bu denklemdeki ( $M_y, M_z$ ) moment terimleri, incelenen kesitteki iç momentlerdir ve ayırma prensibiyle bulunur.

2.13 denklemi izotropik cisimler için, elastik bölgede geçerlidir ve tüm eğilme durumlarını kapsayan genel bir denklemdir. Altta 2 özel hallerden 2.13 ün genel bir denklem olduğunu görebiliriz:

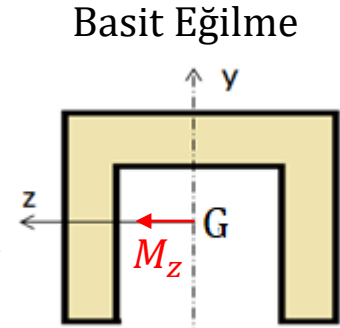
**1. Özel hal:** En az bir eksene göre simetrik kesitlerde çarpım atalet momenti sıfırdır  $I_{zy} = 0$ . Bu durumda 2.13 denklemi 1.yöntemdeki 2.7 denkleme dönüştüğüne dikkat ediniz.



$I_{zy} = 0$  için 2.13 denkleminin son hali:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

**2. Özel hal:** 1. Özel hale ilaveten ayrıca  $M_y = 0$  olursa, basit eğilme durumuna dönülmüş olur ve bu durumda 2.13 denklemi basit eğilmedeki normal gerilme denklemine dönüşür.



$I_{zy} = 0, M_y = 0$  için 2.13 denkleminin son hali:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

*Basit Eğilme aslında eğik eğilmenin özel bir halidir.*

## Tarafsız eksenin doğrultusunu veren $\beta$ açısının elde edilmesi:

Gerilme formülündeki katsayılar daha önce şu şekilde tanımlanmıştı:

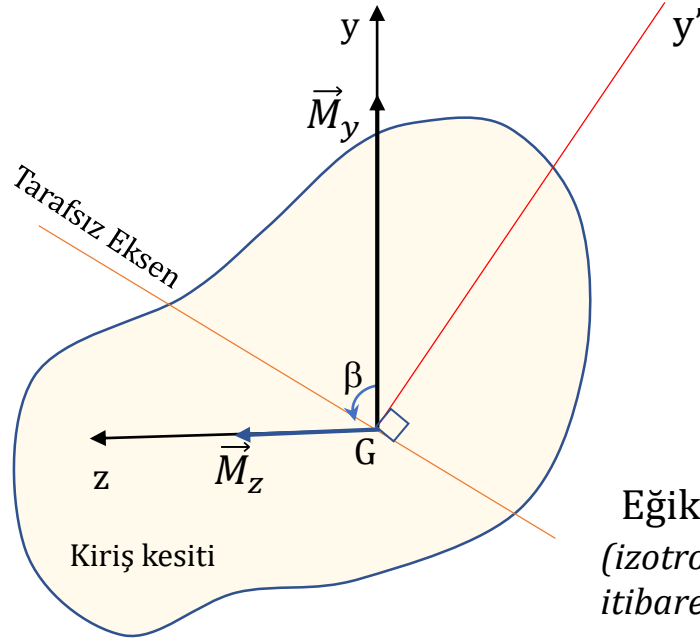
$$a = -\frac{E}{\rho} \cdot \sin \beta \quad , \quad b = \frac{E}{\rho} \cos \beta$$

Bunları birbirine oranlarsak:

$$\frac{a}{b} = \frac{-\left(\frac{E}{\rho}\right) \sin \beta}{\left(\frac{E}{\rho}\right) \cos \beta} = -\tan \beta$$

Ayrıca 2.12a,b denklemlerinden :

$$\frac{a}{b} = \frac{-\frac{M_z I_y + M_y I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}}{\frac{M_z I_{zy} + M_y I_z}{I_z I_y - I_{zy}^2}} = -\frac{M_z I_y + M_y I_{zy}}{M_z I_{zy} + M_y I_z} = -\tan \beta$$



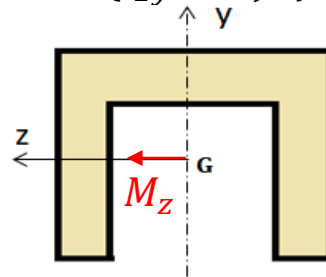
Eğik Eğilme Durumunda Tarafsız eksen doğrultu açısı:  
(izotropik malzemeler için elastik yüklemde geçerlidir. +y ekseninden itibaren saat ibreleri tersi yönündeki açıdır. Tüm eğilme tiplerini kapsar.)

$$\tan \beta = \frac{M_z I_y + M_y I_{zy}}{M_z I_{zy} + M_y I_z} \quad (2.14)$$

### Özel Hal İncelemesi:

En az bir eksene göre simetrik kesit ( $I_{zy} = 0$ ) için  $M_y = 0$  alınırsa basit eğilme durumu oluşur.

Basit Eğilme



Bu durumda 2.14 denkleminde

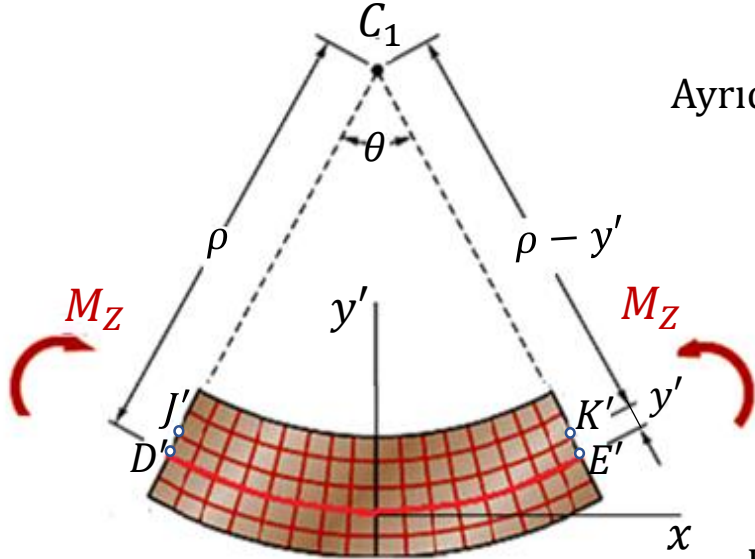
$$\tan \beta = \infty \rightarrow \beta = 0$$

Bu ise tarafsız eksenin z eksenini olduğunu gösterir ki, basit eğilmede böyle olduğu söylenmişti.

**Kirişin eğrilik yarıçapı  $\rho$  nun elde edilmesi:**

x-y' düzleminden bakınca kirişin C merkezine göre eğrilik yarıçapını da elde edebiliriz. Şöyle ki:

Gerilme katsayıların karelerini toplarsak: 
$$a^2 + b^2 = \left(-\frac{E}{\rho} \cdot \sin \beta\right)^2 + \left(\frac{E}{\rho} \cos \beta\right)^2 = \frac{E^2}{\rho^2} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \rightarrow a^2 + b^2 = \frac{E^2}{\rho^2}$$



Ayrıca 2.12a,b denklemlerinden: 
$$a^2 + b^2 = \left(-\frac{M_z I_y + M_y I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}\right)^2 + \left(\frac{M_z I_{zy} + M_y I_z}{I_z I_y - I_{zy}^2}\right)^2 = \frac{E^2}{\rho^2}$$

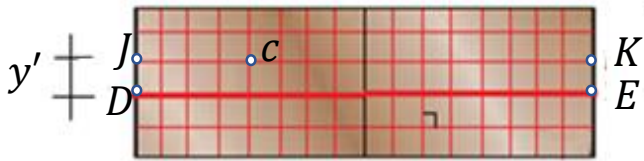
Eğik eğilme durumunda  
Eğrilik yarıçapı genel denklemi:

(izotropik malzemeler için elastik yüklemde geçerlidir. Basit eğilmeyi de kapsar.)

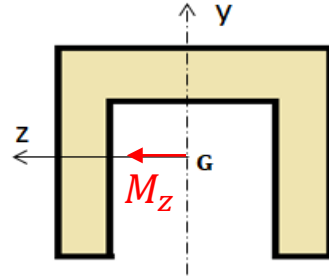
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{(M_z I_y + M_y I_{zy})^2 + (M_z I_{zy} + M_y I_z)^2}{(I_z I_y - I_{zy}^2)^2}} \quad (2.15)$$

**Özel Hal İncelemesi:**

En az bir eksene göre simetrik kesit ( $I_{zy} = 0$ ) için  $M_y = 0$  alınırsa basit eğilme durumu oluşur.



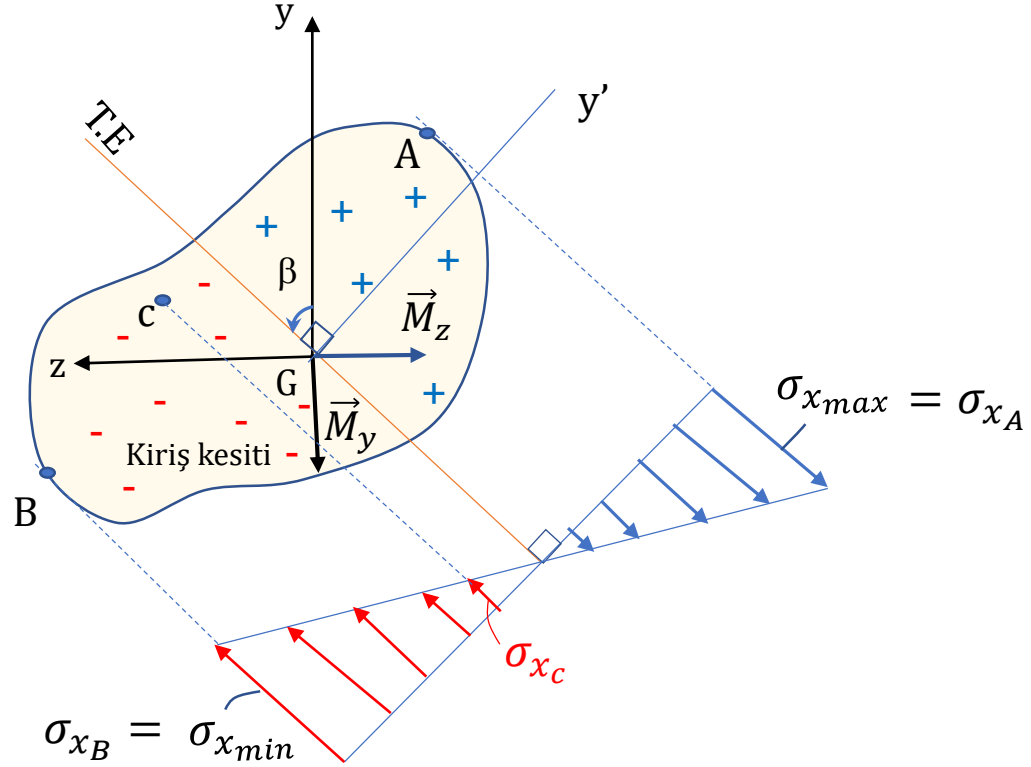
Basit Eğilme



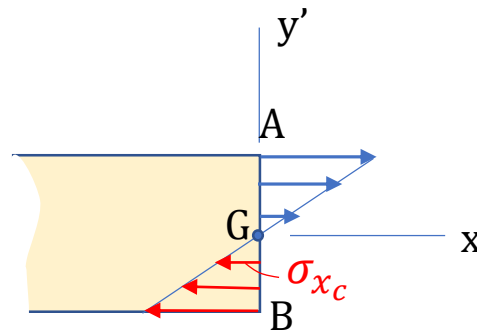
2.15 denklemi bu durumda: 
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

(Basit Eğilme konusunda bu şekilde olduğu ispat edilmişti.)

## Eğik Eğilmede Normal Gerilme Dağılımı:

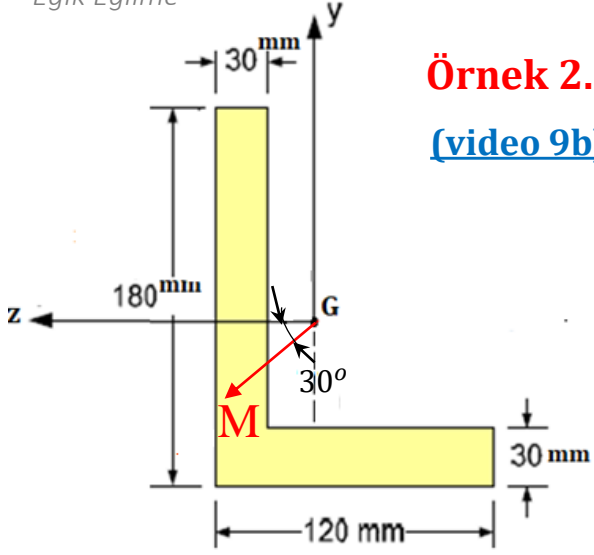


x-y' düzleminde bakışta gerilme dağılımı :



- Basit eğilmede olduğu gibi maksimum ve minimum normal gerilmeler Tarafsız eksenden en uzak noktalardadır.
- Tarafsız Eksenin altında kalan kesit noktaları negatif gerilmeye sahip iken üstünde kalan noktalarda gerilmeler pozitif olur. Ancak momentlerin yönü ve şiddetine göre pozitif ve negatif gerilme bölgeleri yer değiştirebilir.
- Kesitteki herhangi bir c noktasından Tarafsız Eksene paralel çizilerek bu noktadaki gerilmenin grafikteki yeri bulunabilir. Şiddeti ise 2.13 denkleminde elde edilir.
- Gerilmelerin hepsi düzlem normali (x) doğrultusundadır. Burada üstteki şekilde y-z düzleminde gerilme şiddetleri için şematik bir dağılım gösterilmiştir. Gerilmelerin gerçek yönü ve dağılımı x-y' düzleminde bakışta ancak gözükür.

**Örnek 2.1**  
(video 9b)

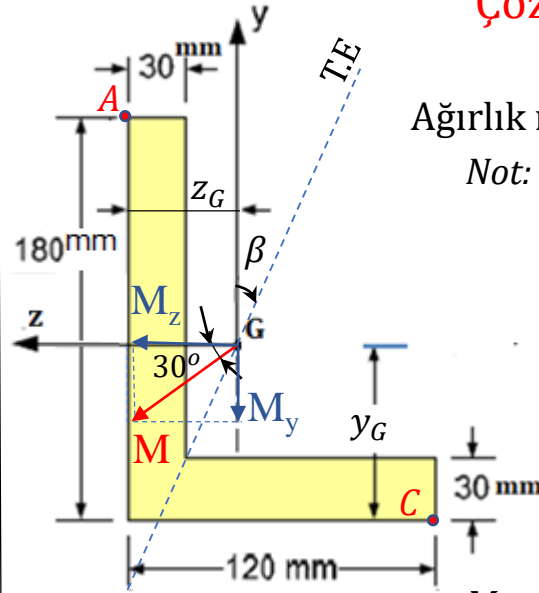


L profilli bir çubuğun herhangi bir kesitinde oluşan bileşke eğilme momenti  $M=20\text{kNm}$  ve bu momentin  $+z$  eksenine yaptığı açı  $30^\circ$  olarak hesaplanmıştır. Malzemenin akma mukavemeti  $200\text{MPa}$  ve emniyet katsayısı  $n=2$  ise, bu kesitin emniyet sınırlarını aşıp aşmayacağını belirleyiniz.

**Çözüm:**

$y$ - $z$  Kartezyen koordinatları kullanılarak (**2.Yöntemle**) çözüm: Ağırlık merkezi ve atalet moment değerleri hesaplandığında şu değerler bulunur.

Not: (Hesaplamalar için Statik 6c videosunun sonundaki örneğe bakınız.)



Sol alt köşeye göre Ağırlık merkezinin koordinatları:

$$z_G = 35\text{mm}, y_G = 65\text{mm}$$

Atalet momentleri:

$$I_z = 24.91 \times 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_y = 8.708 \times 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_{zy} = 8.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Moment Bileşenleri:

$$M_z = M \cdot \cos 30^\circ = 20 \times \cos 30^\circ = 17.32 \text{ kNm}, \quad M_y = -M \cdot \sin 30^\circ = -10 \text{ kNm}$$

Kesit simetrik olmadığından  $M$  momentinden dolayı eğik eğilme oluşur. 2.13 denkleminde:

$$\sigma_x = \frac{-(M_z I_y + M_y I_{zy})y + (M_z I_{zy} + M_y I_z)z}{I_z I_y - I_{zy}^2}$$

$$= \frac{-[17.32 \times 8.708 + (-10) \times 8.1]y + [17.32 \times 8.1 + (-10) \times 24.91]z}{(24.91 \times 8.708 - 8.1^2)(10^6)^2}$$

$$\sigma_x = -0.461y - 0.719z$$

T.E denklemi :

Tarafsız Eksen (T.E) üzerindeki noktalarda gerilmeler sıfırdır:  $\sigma_x = 0 = -0.461y - 0.719z \rightarrow y = -1.56z$   
Maksimum ve minimum gerilmeler tarafsız eksenin en uzak olan A(115;35) ve C(-65;-85) noktalarındadır.

$$\sigma_{x_A} = -0.461 \times 115 - 0.719 \times 35 \rightarrow \sigma_{x_A} = -78.18 \text{ MPa} = \sigma_{x_{min}}$$

$$\sigma_{x_C} = -0.461 \times (-65) - 0.719 \times (-85) \rightarrow \sigma_{x_C} = 91.08 \text{ MPa} = \sigma_{x_{max}}$$

$$\sigma_{em} = \frac{\sigma_{ak}}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{x_{min}}| < \sigma_{em}$$

$$\sigma_{x_{max}} < \sigma_{em}$$

emniyetlidir.

Asal Eksenler  $y_p - z_p$  kullanılarak (**1.Yöntemle**) çözüm:

Statik 6.c videosunun sonundaki örnekte aynı geometri için hesaplanan değerler:

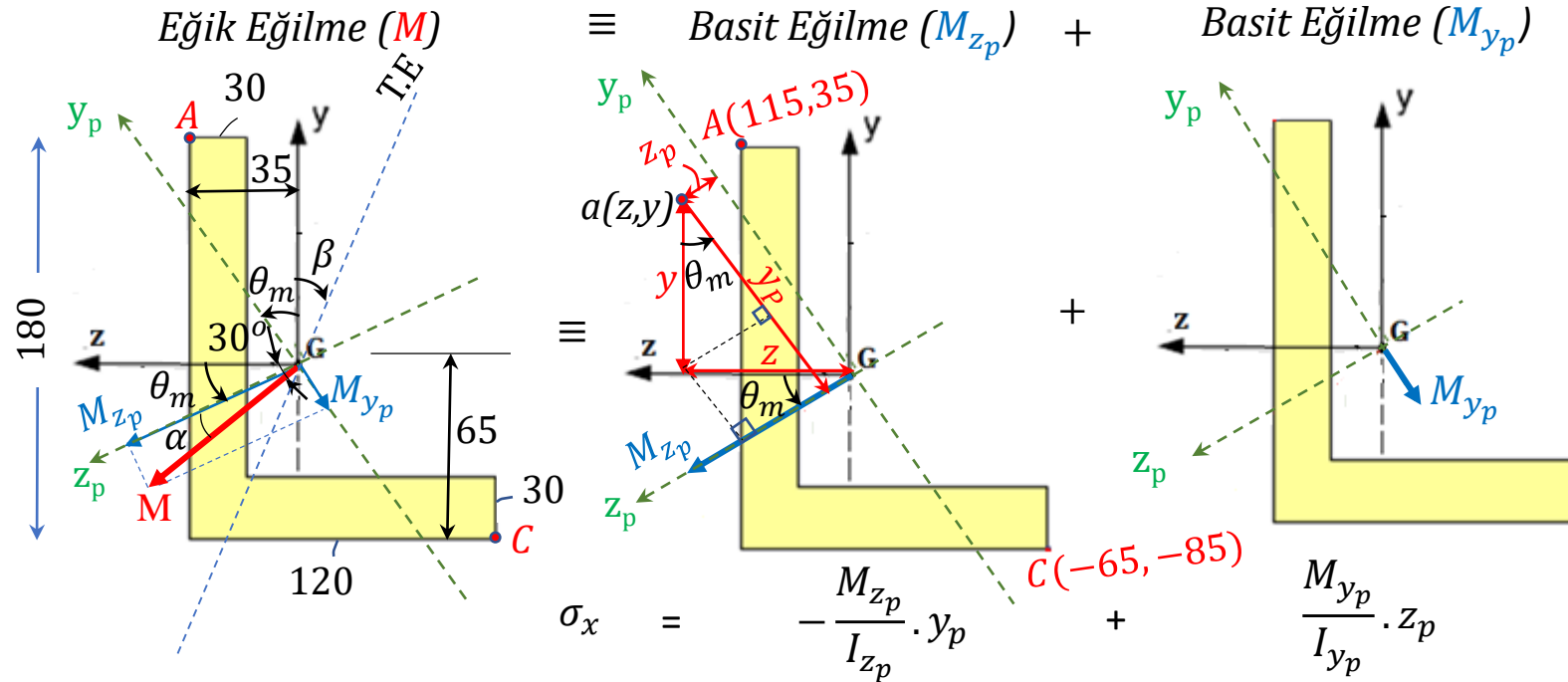
asal atalet eksenlerinin açısı  
(+z eksenini ile max. Asal eksenin yaptığı açı):

asal atalet momentleri: 
$$I_{max} = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}$$
$$I_{min} = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}$$

$$I_{max} = I_{z_p} = 28.26 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{min} = I_{y_p} = 5.36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{tg}(2\theta_m) = \frac{I_{zy}}{I_z - I_y} \rightarrow \theta_m = 22.5^\circ$$



$$\alpha = 30 - \theta_m = 30 - 22.5^\circ = 7.5^\circ$$

$$M_{y_p} = -M \sin(7.5^\circ) = -20 \sin(7.5^\circ) = -2.61 \text{ kNm}$$

$$M_{z_p} = M \cos(7.5^\circ) = 20 \cos(7.5^\circ) = 19.82 \text{ kNm}$$

 $a(z, y)$  gibi herhangi bir noktanın asal koordinatları:

$$y_p = y \cos \theta_m + z \sin \theta_m, \quad z_p = z \cos \theta_m - y \sin \theta_m$$

T.E den en uzak A ve C noktalarının asal koordinatları:

$$y_{pA} = 115 \cos 22.5^\circ + 35 \sin 22.5^\circ$$

$$y_{pA} = 119.64 \text{ mm}, \quad z_{pA} = -11.67 \text{ mm},$$

$$y_{pC} = -92.58 \text{ mm}, \quad z_{pC} = -53.65 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = -\frac{+19.82 \times 10^6}{28.26 \times 10^6} \cdot y_p + \frac{-2.61 \times 10^6}{5.36 \times 10^6} \cdot z_p$$

$$\sigma_x = -0.701 y_p - 0.487 z_p$$

$$\sigma_{x_A} = -0.701 \times 119.64 - 0.487 \times (-11.67) = -78.18 \text{ MPa} = \sigma_{x_{min}}$$

$$\sigma_{x_C} = -0.701 \times (-92.58) - 0.487 \times (-53.65) \cong 91.08 \text{ MPa} = \sigma_{x_{max}}$$

(Aynı sonuçları bulduk)

$$|\sigma_{x_{min}}| < \sigma_{em}$$

$$\sigma_{x_{max}} < \sigma_{em}$$

emniyetlidir.

Tarafsız Eksen:  $\sigma_x = 0 = -0.701 y_p - 0.487 z_p$

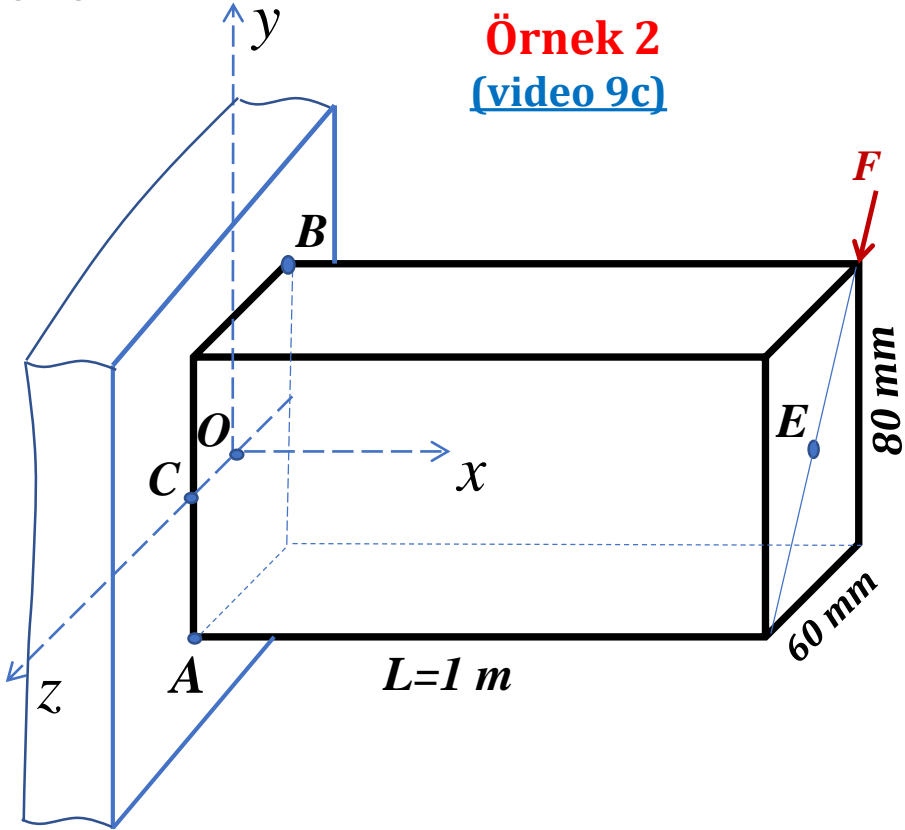
$$\rightarrow y_p = -0.69 \cdot z_p \quad (\text{T.E Denklemdir.})$$

2.14'denk.

$$\tan \beta = \frac{M_z I_y + M_y I_{zy}}{M_z I_{zy} + M_y I_z} = \frac{17.32(8.708) + (-10)(8.1)}{17.32(8.1) + (-10)(24.91)} = -0.64 \rightarrow \beta = -32.68^\circ$$

Saat ibreleri yönünde

## Örnek 2 (video 9c)

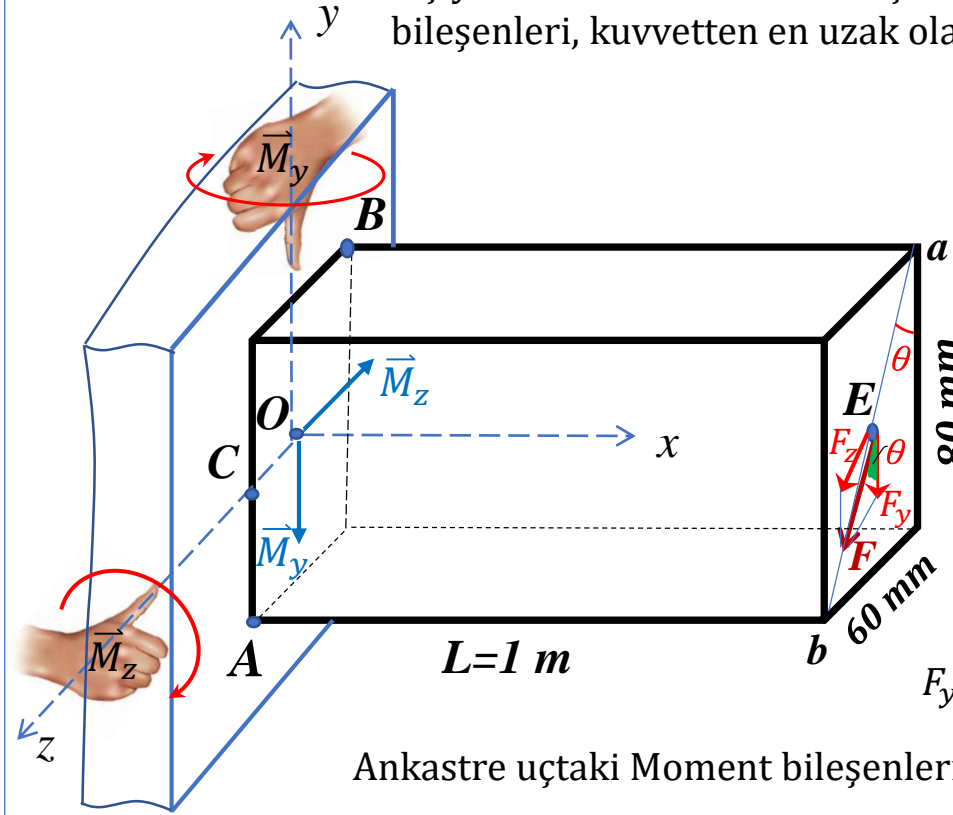


Sol uçundan bir duvara sabitlenmiş olan dikdörtgen kesitli kirişe, serbest uçundan  $F=10\text{kN}$  luk kuvvet şekilde gösterildiği gibi uygulanıyor. Kirişte ortaya çıkan maksimum ve minimum normal gerilmelerin şiddetlerini ve yerlerini hesaplayınız ve kritik kesitteki normal gerilme dağılımını çiziniz.

03.12.2023

## Çözüm:

Öncelikle  $F$  kuvvetini kendi doğrultusu üzerinde  $E$  noktasına taşıyabiliriz.  $F$  kuvvetinin kirişte oluşturacağı maksimum moment bileşenleri, kuvvetten en uzak olan ankastre kesitte oluşacaktır



$$\overline{ab} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100\text{mm}$$

$$\sin \theta = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$F$  kuvvetinin bileşenleri:

$$F_z = F \cdot \sin \theta = 10 \left(\frac{3}{5}\right) = 6\text{kN}$$

$$F_y = -F \cdot \cos \theta = -10 \left(\frac{4}{5}\right) = -8\text{kN}$$

Ankastre uçtaki Moment bileşenlerinin hesaplanması:

1.yol: Dik uzaklıklardan (Skaler):

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -F_z \cdot L = -6 \times 1 = -6\text{kNm} \\ M_z &= -F_y \cdot L = -8 \times 1 = -8\text{kNm} \end{aligned} \right\} \text{işaretleri sağ el kaidesiyle bulunur.}$$

2.yol:

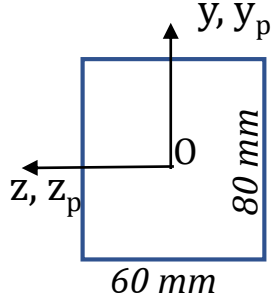
Vektörel olarak  $O$  noktasına göre moment alırız ve işaretleriyle birlikte bileşenleri buluruz.

$$\vec{M}_O = \vec{OE} \times \vec{F} = (1\vec{i}) \times (-8\vec{j} + 6\vec{k}) = \underbrace{-8\vec{k}}_{\vec{M}_z} - \underbrace{6\vec{j}}_{\vec{M}_y}$$

$\vec{OE} = 1\vec{i}$  Moment alınan nokta

Kuvvet hattı üzerinde bir nokta

Ankastre kesit için normal gerilme hesabı:



$$I_z = I_{z_p} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{60 \times 80^3}{12} = 2.56 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{y_p} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{80 \times 60^3}{12} = 1.44 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(kesit simetrik olduğundan):  $I_{zy} = I_{z_p y_p} = 0$

$$\sigma_x = \frac{-6 \times 10^6}{1.44 \times 10^6} \cdot z - \frac{-8 \times 10^6}{2.56 \times 10^6} \cdot y \rightarrow \sigma_x = -4.17z + 3.125y$$

T.E üzerinde gerilmeler sıfırdır

$$\rightarrow \sigma_x = -4.17z + 3.125y = 0 \rightarrow y = 1.33z \text{ (T.E denklemi)}$$

Bu denkleme göre T.E  
şekildeki gibi çizilir.

T.E den en uzak noktalar A ve B dir ve bu noktalarda max ve min gerilmeler oluşur.

$$A(-40, 30) \rightarrow \sigma_{x_A} = -4.17(30) + 3.125(-40) \rightarrow \sigma_{x_A} = -250.1 \text{ MPa} = \sigma_{min}$$

$$B(40, -30) \rightarrow \sigma_{x_B} = -4.17(-30) + 3.125(40) \rightarrow \sigma_{x_B} = 250.1 \text{ MPa} = \sigma_{max}$$

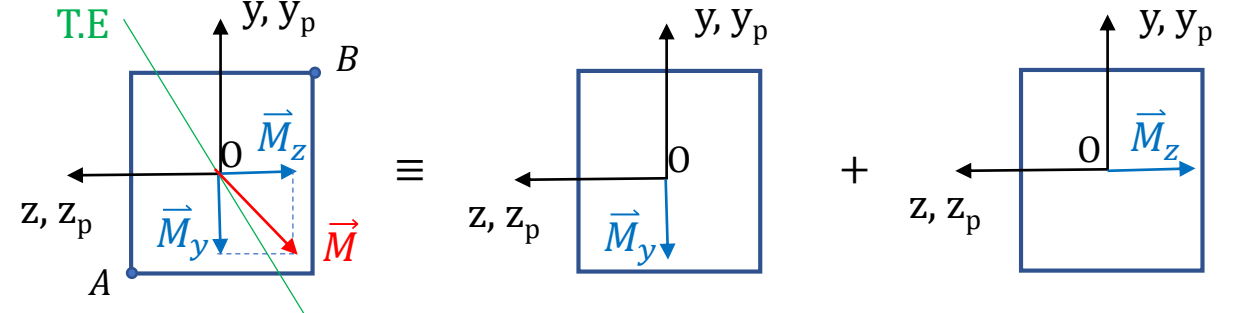
2.Yöntemi kullanmış olsaydık:

$I_{zy} = 0$  olduğundan 2.13 denkleminin aynı denkleme dönüşeceğini görürüz.

$$\sigma_x = \frac{-(M_z I_y + M_y I_{zy})y + (M_z I_{zy} + M_y I_z)z}{I_z I_y - I_{zy}^2} = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

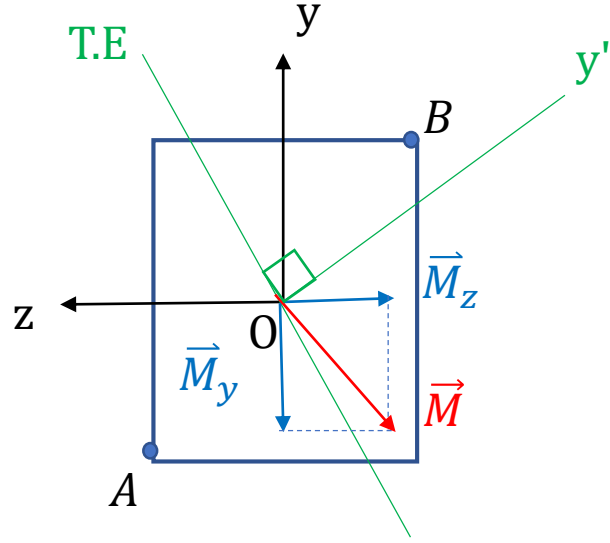
1.Yöntem olan Süperpoziyon yöntemini kullanabiliriz.

Kesit simetrik olduğundan, z-y eksenleri aynı zamanda ( $z_p, y_p$ ) asal atalet eksenleridir.

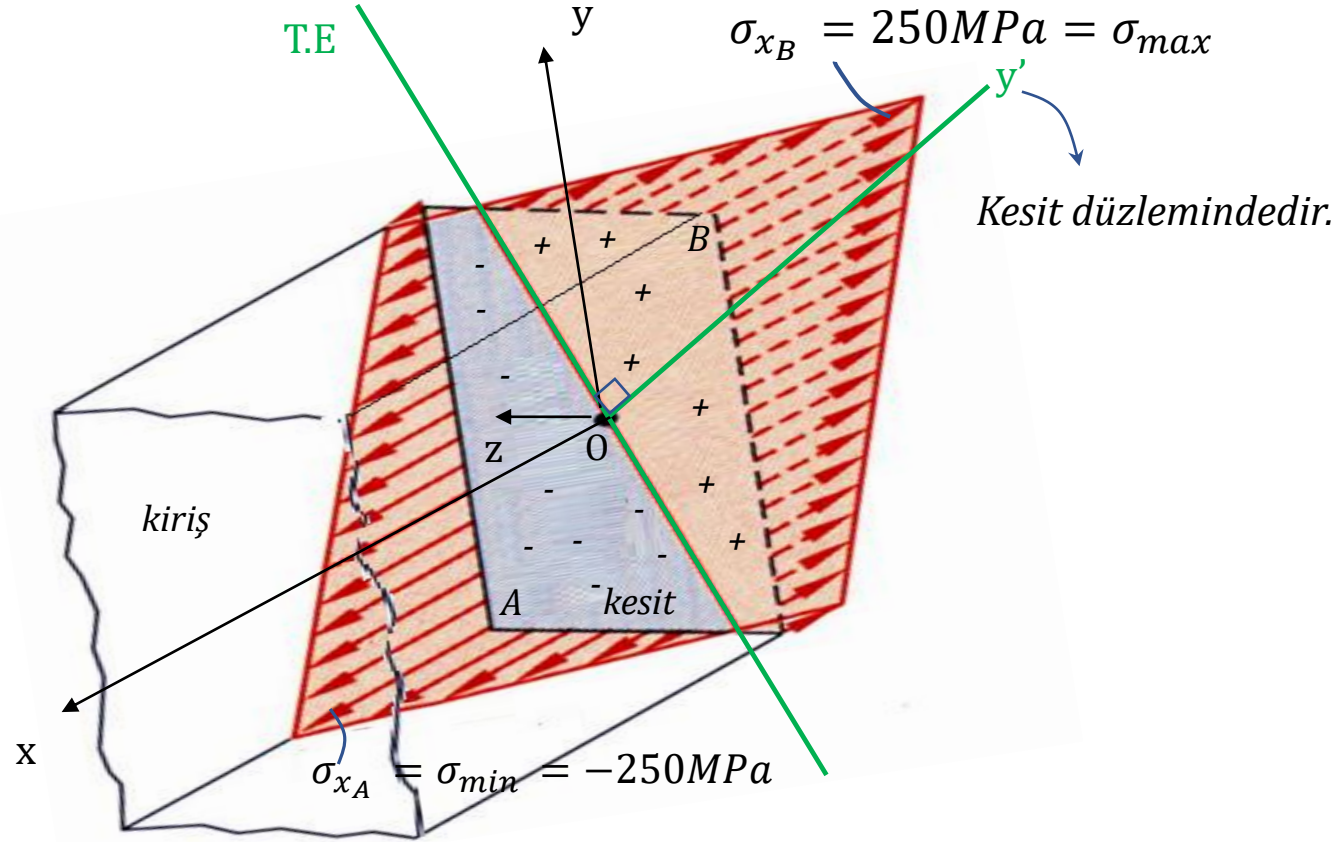


$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

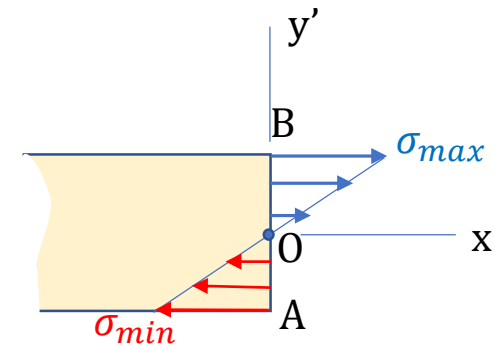
## Perspektif görünüşten normal gerilme dağılımı



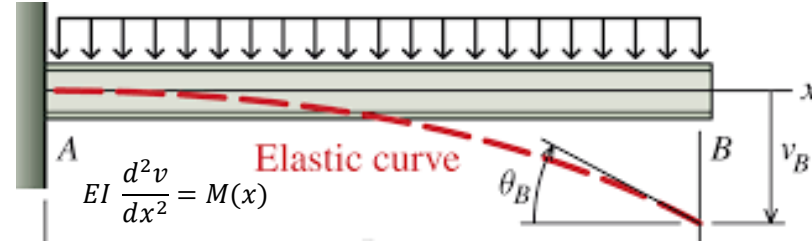
$O$  : kesitin ağırlık merkezi



$x$ - $y'$  düzleminde görünüş:



# ELASTİK EĞRİ-1



*Basit Eğilmeye Maruz Kirişlerde*

## 3.1 - Analitik Yöntem

*(İntegrasyon Metodu) ile Eğim ve Sehim Hesaplamaları*

x-y düzleminde ve özellikle düşey yönde yüklere maruz bir kirişin elastik sınırlar içinde şekil değiştirerek aldığı forma **elastik eğri (elastic curve)** denir.

**Amacımız ise,**

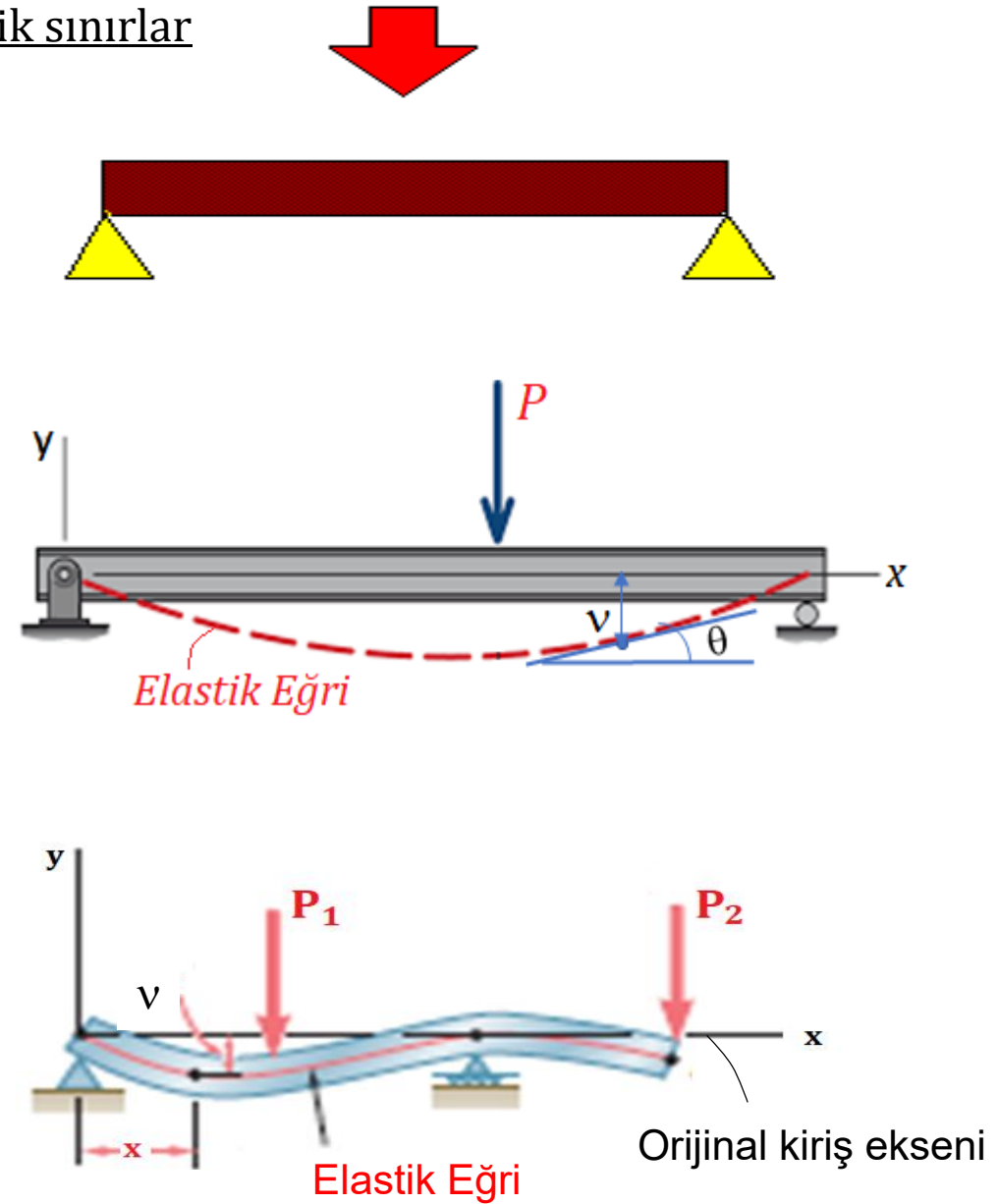
Basit Eğilmeye Maruz Bir Kirişte,

Kiriş geometrisi, sınır şartları, malzeme özellikleri ve yükleme durumu belli iken;

Kirişin herhangi bir noktasındaki çökme (sehim,  $v$ ) ve dönme (eğim,  $\theta$ ) değerlerini elde etmektir. (Eğim açısı  $\theta$ : çökme noktasının teğetinin x eksenine -orijinal kiriş eksenine- yaptığı açıdır.)

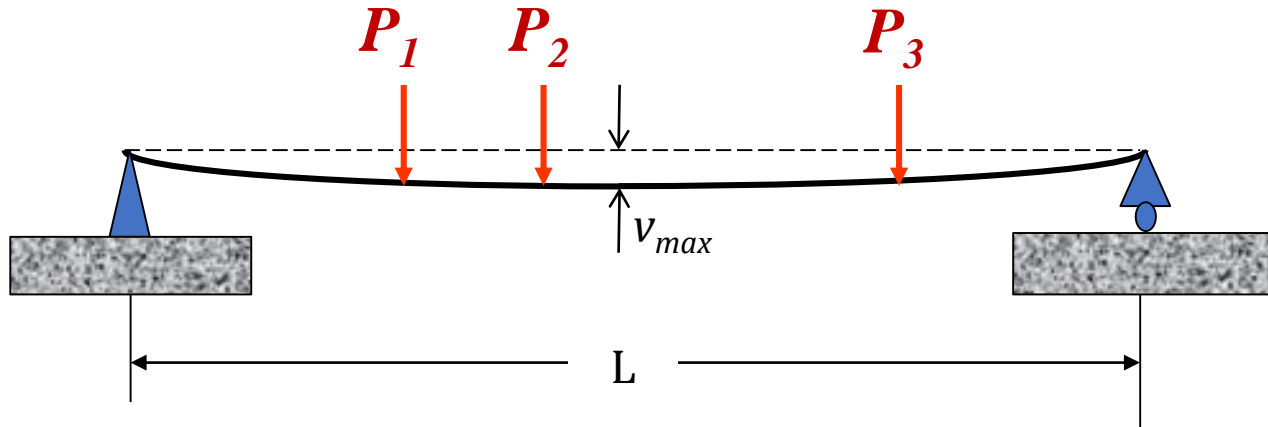
**Basit Eğilme şartını sağlamak için ise** sadece aşağıdaki 2 özelliğe birden sahip sistemleri inceleme konusu yapacağız:

1. Kiriş kesiti y veya z eksenlerinden en az birisine göre simetriktir.
2. Kiriş kesitlerinde sadece  $M_z$  iç momenti oluşur (bunun için ise kiriş x-y düzleminde yüklere maruzdur.)



## Kirişlerde Çökme (Sehim) Hesabının Önemi

Kirişlerin dizaynında, yalnız gerilmeler değil aynı zamanda sehimler (çökmeler) de büyük önem arz etmektedir.



Bundan dolayı, maksimum sehimin kiriş açıklığına oranının ( $v_{max}/L$ ) belirli bir değeri ( $1/300$  ü) geçmesi istenmez.



Rusya'da, bir nehirdeki asma köprü, üzerinden bir kamyonetin geçişi esnasında kısmen çöktü. Araç sulara gömülürken o anlar kameraya yansıdı.

Olay, Moskova'ya 4 bin 500 kilometre mesafedeki Uryum köyünde yaşandı.

Nehir üzerindeki tahta asma köprü, üzerinden geçen kamyonetin ağırlığını taşıyamayarak kısmen çöktü.

Kaza sonrası araç sürücüsünün kurtarıldığı bildirilirken kamyonetin [sudan](#) çıkarılamadığı aktarıldı.

## Çökme (Sehim) ve Dönme (Eğim) Hesaplama Yöntemleri:

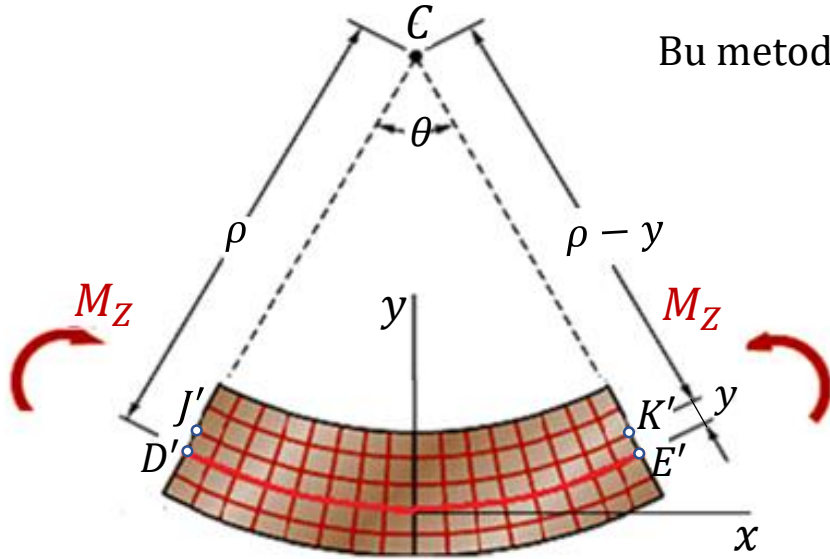
1. Analitik metot (integrasyon metodu)
2. Moment alanı metodu
3. Eşlenik Çubuk metodu
4. Süperpozisyon Metodu ve Hiperstatik Sistemler
5. Enerji Metodları

Burada ilk 4 metod örneklerle anlatılacaktır.

5. konu olan enerji metodları ileride gösterilecektir.

# 1. Analitik Yöntem (İntegrasyon Metodu) ile Eğim ve Sehim Hesapları: (Bu videonun konusudur)

Bu metod, kirişteki eğim ve sehim için  $x$ 'e bağlı genel denklemler elde etmemizi sağlar.



## Hatırlatma

Basit Eğilmeye maruz bir kirişte:

- Eğilme sonucunda çubuğun şekli C merkezli,  $r$  yarıçaplı bir yay formu alır.
- DE: Tarafsız düzlem üzerindeki liftir. Boyu değişmez. Bu durumda  $DE = D'E'$
- JK : tarafsız düzlemden  $y$  kadar uzaklıktaki liftir. Son boyu  $J'K'$  dür.
- Tüm liflerin ilk boylar eşittir.  $JK = DE$

$$\text{JK lifi için; son boy: } J'K' = (r - y)\theta, \quad D'E' = r\theta = DE = JK$$

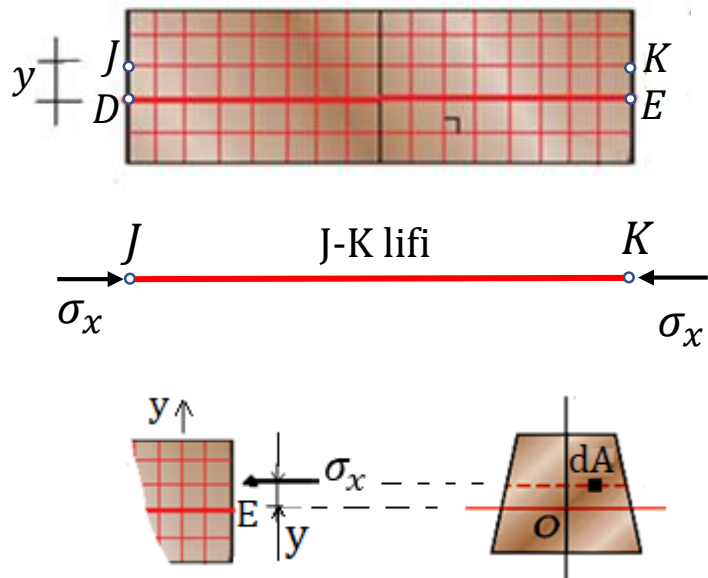
$$\text{Toplam uzama : } \delta = J'K' - JK = (r - y)\theta - r\theta = -y\theta$$

$$\text{Birim elastik uzama : } \epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{r\theta} = -\frac{y}{r}$$

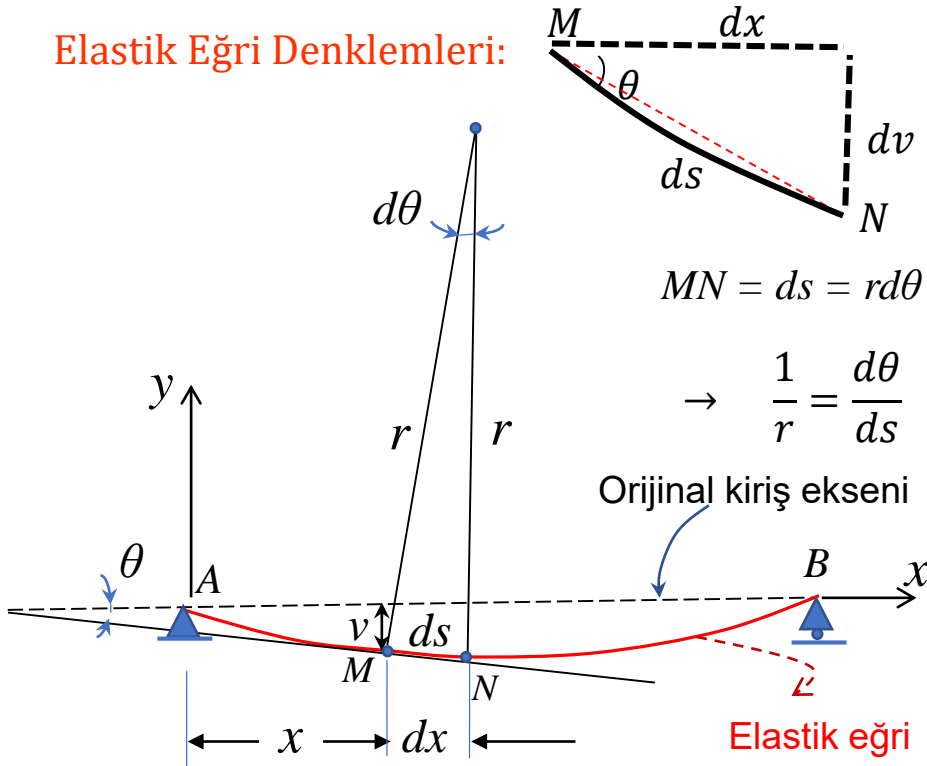
$$\text{Elastik bölgede normal gerilme: } \sigma_x = E \cdot \epsilon_x = -E \cdot \frac{y}{r}$$

$$M_z = - \int (\sigma_x dA) \cdot y = - \int \left(-\frac{E}{r} y \cdot y \cdot dA\right) = \frac{E}{r} \int (y^2 \cdot dA)$$

$$M_z = \frac{E}{r} I_z \quad \rightarrow \quad \frac{E}{r} = \frac{M_z}{I_z} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{M_z}{E I_z} \quad (3.1)$$



## Elastik Eğri Denklemleri:



$\theta$  : Eğim (açısı): Elastik eğri üzerindeki bir noktanın teğetinin orijinal kiriş eksenini ( $x$  eksenini) ile yapmış olduğu açıdır. ,  $v$  : Sehim (çökme): Kirişteki bir noktanın orijinal konumundan  $y$  yönünde uzaklaşma miktarıdır.  $E$ : Elastiklik Modülü ,  $I_z$ : kesitin  $z$  eksenine göre atalet momenti,  $M_z$ :  $z$  eksenini yönündeki iç moment ,  $EI$ : Eğilme Rijitliği,

## Küçük Şekil Değiştirmeler

$\theta$  açısı çok küçük olduğundan:  $ds \approx dx$  ve  $\tan \theta \cong \theta$  alınabilir.

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d\theta}{dx}$$

dik üçgenden:  $\tan \theta = \frac{dv}{dx} \cong \theta \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \cong \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI} \rightarrow \frac{M_z}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Küçük şekil değiştirmeler için elastik eğri denklemi:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = EI v'' = M(x) \quad (3.2a)$$

$M_z$  ve  $I_z$  değerlerini  $M$  ve  $I$  ile gösterirsek;

## Büyük Şekil Değiştirmelerde Durum:

$$\tan \theta = \frac{dv}{dx} = v' \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dv}{dx}\right) = \arctan(v')$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d[\arctan(v')]}{dx} \frac{dx}{ds}$$

Herhangi bir  $f(x)$  fonksiyonu için biliyoruz ki:

$$\frac{d}{dx} [\arctan f(x)] = \frac{f(x)'}{1 + (f(x))^2} \rightarrow \frac{d}{dx} [\arctan v'] = \frac{v''}{1 + (v')^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} \rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + (v')^2} \rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (v')^2}}$$

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{v''}{1 + (v')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (v')^2}} = \frac{M}{EI}$$

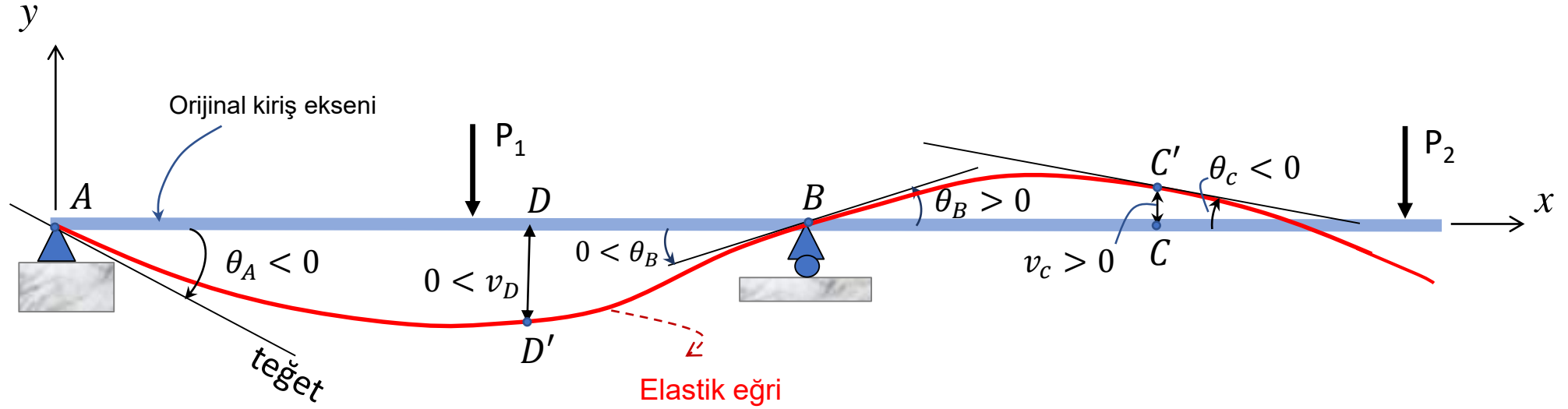
Büyük şekil değiştirmeler için elastik eğri denklemi:

$$EI \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = M(x) \quad (3.2b)$$

Not: Küçük şekil değiştirmelerde paydadaki  $(v')^2$  terimi ihmal edilebilir. Bu durumda (3.2a) denklemi elde edilmiş olur.

(3.2a) ve (3.2b) denklemleri elastik bölge ve basit eğilme durumları için geçerlidir. Aksi söylenmedikçe problemler küçük şekil değiştirmeler için çözümlür.

## $\theta$ ve $v$ nin işaretleri

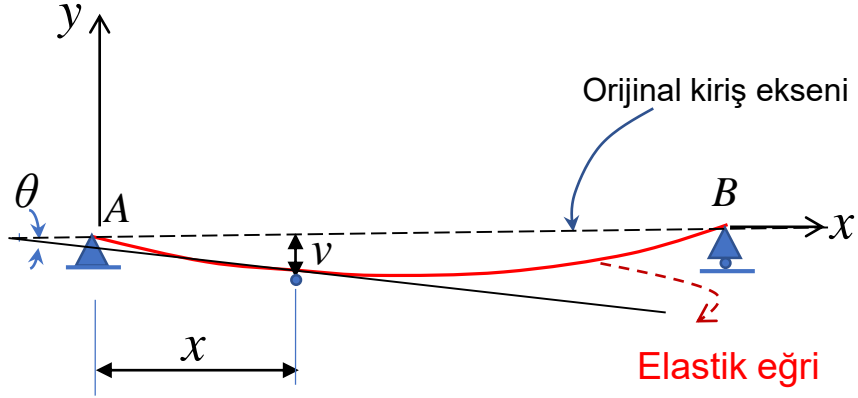


$\theta$  açısı orijinal kiriş ekseninden başlayarak elastik eğrinin bir noktadaki teğetine dönülerek elde edilir. Eğer saat ibreleri tersi yönünde dönülüyorsa  **$\theta$  açısı pozitif**, aksi halde negatiftir.

$v$  sehim (çökme) değeri: bir noktanın orijinal kiriş eksenindeki konumundan itibaren elastik eğri üzerindeki konumuna doğru  $y$  yönünde ilerleyerek bulunur.  $+y$  yönünde ilerleniyorsa  **$v$  pozitif**,  $-y$  yönünde ilerleniyorsa  $v$  negatiftir.

**Küçük şekil değiştirmeler için :**

(elastik eğri denklemi):  $EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$  (I)



eşitliğin her iki tarafının integrali alırsak:

$$EI \frac{dv}{dx} = EI\theta = \int M(x) dx + C_1 \rightarrow \text{Eğim } \theta(x) \text{ elde edilir}$$

2nci kez integral alırsak:

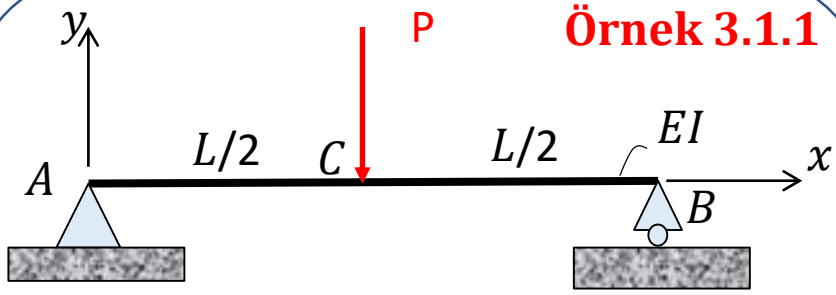
$$EI v = \int \int M(x) dx + C_1x + C_2 \rightarrow \text{Sehim } v(x) \text{ elde edilir}$$

$C_1, C_2$  integral sabitlerini bulmak için sisteme özel sınır şartlarını uygulamak gerekir. Bunlar problemlerin içinde gösterilecektir.

**Not**

(I) nolu denklemin 1.türevi kesme kuvveti  $V(x)$  değişimini verir.  $\frac{dM}{dx} = -V(x) \rightarrow EI \frac{d^3v}{dx^3} = -V(x)$  (3.3a)

(I) nolu denklemin 2.kez türevi yayılı yük  $q(x)$  değişimini verir.  $\frac{dV}{dx} = -q(x) \rightarrow EI \frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$  (3.3b)



Örnek 3.1.1

Orta noktasından tekil düşey  $P$  yüküne maruz kirişte, küçük şekil değiştirme durumu olduğunu kabul ederek,  
 a-) A-C kısmının Şehim ve Eğim Denklemlerini çıkarınız.  
 b-) A ve C noktalarının eğim ve çökmesini bulunuz.

1. integral:  $\rightarrow \int EI \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \int \frac{P}{2} x \cdot dx \quad \rightarrow EI \frac{d v_1}{dx} = EI \theta_1 = \frac{P x^2}{4} + c_1 \quad (1)$

2. integral:  $\rightarrow \int EI \frac{d v_1}{dx} = \int \left( \frac{P x^2}{4} + c_1 \right) \cdot dx \quad \rightarrow EI v_1 = \frac{P x^3}{12} + c_1 x + c_2 \quad (2)$

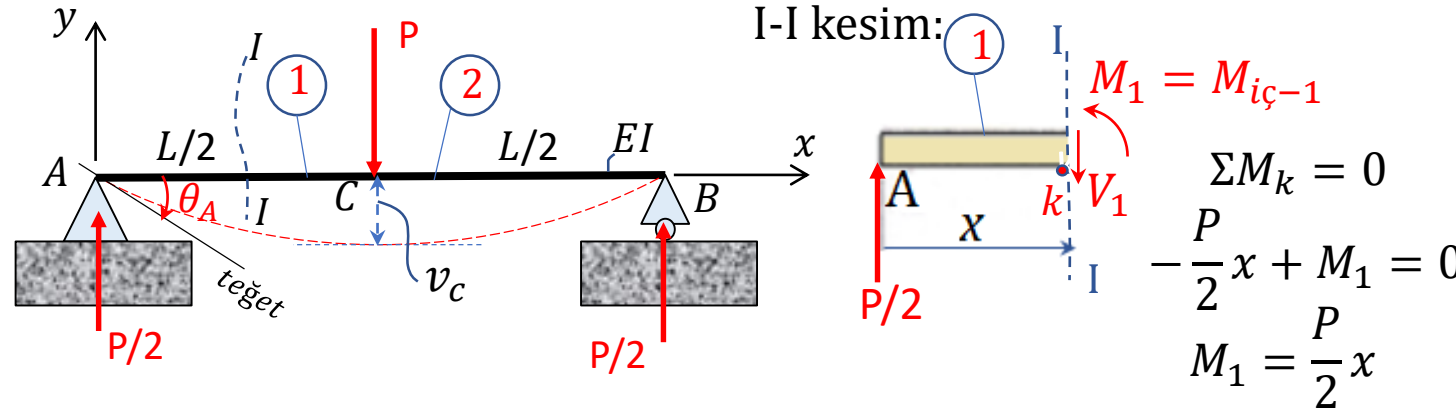
Sınır şartlarından integral sabitlerinin bulunması:

• A noktasında mesnetten dolayı çökme (şehim) olmaz:  $x = 0 \rightarrow v_1 = 0 \rightarrow (2) \text{ nolu denklemden:} \quad \rightarrow c_2 = 0$

• Simetriden dolayı C orta noktasının eğimi (teğetin x eksenine açı) sıfırdır:  $x = \frac{L}{2}$  için  $\rightarrow \theta_1 = 0 \rightarrow (1) \text{ nolu denklemden:} \quad 0 = \frac{P \left(\frac{L}{2}\right)^2}{4} + c_1 \rightarrow c_1 = -\frac{P L^2}{16}$

### Çözüm:

Simetriden dolayı A ve B mesnetlerinde düşey  $P/2$  reaksiyon kuvvetleri ortaya çıkacaktır. Eğilme açısından kirişi 2 bölgeye ayırabiliriz.



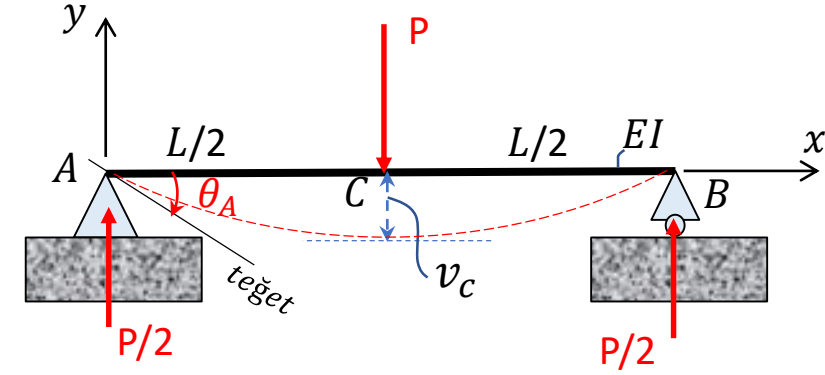
a-) 1nolu bölgede Küçük şekil değiştirmeler için 3.2a denklemi:  $EI \frac{d^2 v_1}{dx^2} = M_1 = \frac{P}{2} x$

$c_1$  ve  $c_2$  yi (1) ve (2) denklemlerinde yerine koyarsak 1.bölge için :

Eğim denklemi:

$$\theta_1 = \frac{P}{EI} \left( \frac{x^2}{4} - \frac{L^2}{16} \right),$$

Sehim (çökme) denklemi :  $v_1 = \frac{P}{EI} \left( \frac{x^3}{12} - \frac{L^2 \cdot x}{16} \right)$



**b-)**

$x_A = 0$

$$\theta_1 = \theta_A = \frac{P}{EI} \left( \frac{0^2}{4} - \frac{L^2}{16} \right) \rightarrow \theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$$v_1 = v_A = \frac{P}{EI} \left( \frac{0^3}{12} - \frac{L^2 \cdot 0}{16} \right) \rightarrow v_A = 0$$

$x_c = \frac{L}{2}$

$$\theta_1 = \theta_c = \frac{P}{EI} \left( \frac{L^2/4}{4} - \frac{L^2}{16} \right) \rightarrow \theta_c = 0$$

$$v_1 = v_c = \frac{P}{EI} \left( \frac{L^3}{96} - \frac{L^2 \cdot L/2}{16} \right) \rightarrow v_c = \frac{PL^3}{48EI}$$

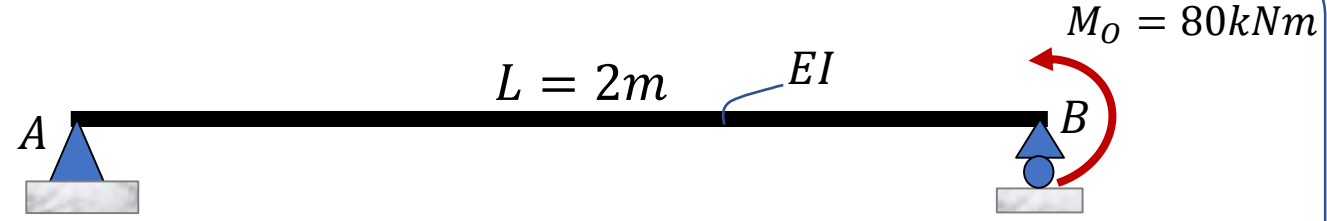
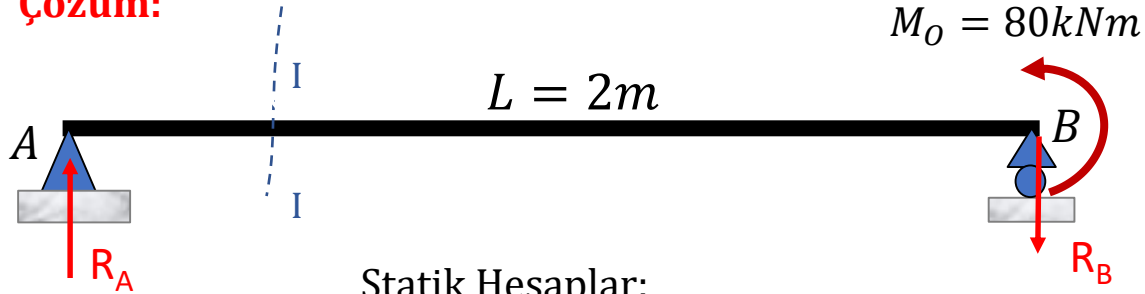
- $C$  noktası hem 1, hem 2nci bölgenin ortak noktasıdır. 1nci bölgenin noktası düşünerek hesaplama yapılmıştır. 2nci bölge için hesaplama gerek kalmamıştır.
- $A$  noktasındaki teğete  $+x$  den saat ibreleri yönünde dönülerek erişildiği için  $\theta_A$  negatif çıkmıştır.
- $v_A$  ve  $\theta_c$  değerlerini sınır şartlarında kullanmıştık. Burada ayrıca hesaplayarak bir sağlama yapmış olduk.

**Örnek 3.1.2**

B ucuna tekil moment uygulanan şekildeki kiriş için

- a) Eğim ve sehim denklemlerini çıkarınız.  
b) eğim ve sehim değerlerinin extrem değerlerini hesaplayınız.

$$E=70 \text{ GPa}, I=7.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

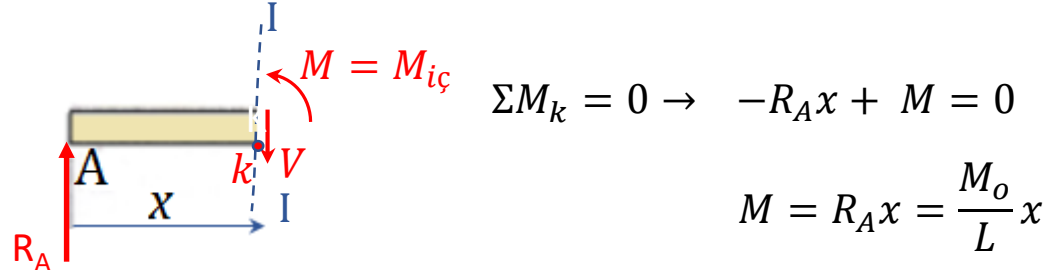
**Çözüm:**

Statik Hesaplar:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A = R_B$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -R_B L + M_o = 0 \rightarrow R_B = R_A = \frac{M_o}{L}$$

İç Eğilme momenti denklemleri:



$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow -R_A x + M = 0$$

$$M = R_A x = \frac{M_o}{L} x$$

a-) Küçük şekil değiştirmeler için 3.2.a denklemleri:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = \frac{M_o}{L} x$$

$$1. \text{ integral: } EI \frac{dv}{dx} = EI\theta = \frac{M_o x^2}{2L} + c_1 \quad (1)$$

$$2. \text{ integral: } EIv = \frac{M_o x^3}{6L} + c_1 x + c_2 \quad (2)$$

Sınır şartları:

A ve B de sehimler (çökmeler) sıfırdır.

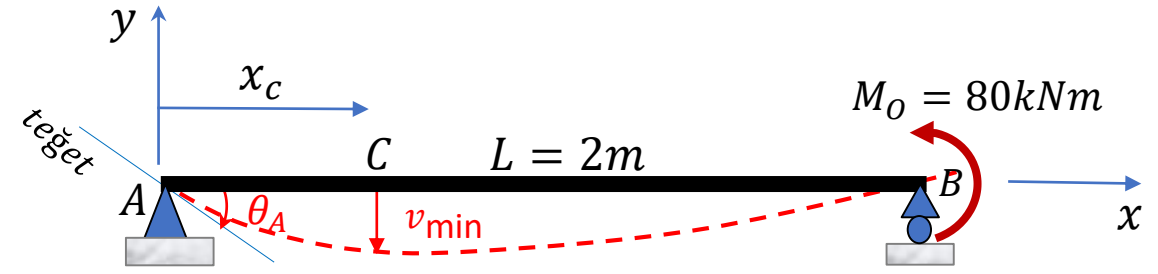
A noktası:  $x = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow$  (2)nci denklemden:  $\rightarrow c_2 = 0$

B noktası:  $x = L \rightarrow v = 0 \rightarrow$  (2)nci denklemden:  $\rightarrow 0 = \frac{M_o L^3}{6L} + c_1 L + 0$

$$\rightarrow c_1 = -\frac{M_o L}{6}$$

$c_1$  ve  $c_2$  sabitleri (1), (2) denklemlerinde yerine koyulur ve eğim, sehim değerleri çekilirse:

$$\theta = \frac{M_0}{6EIL}(3x^2 - L^2), \quad v = \frac{M_0x}{6EIL}(x^2 - L^2)$$



**b-)** Ekstrem (maximum veya minimum) değerler için fonksiyonların türevi sıfıra eşitlenir:

$$\text{Minimum eğim : } \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_0}{6EIL}6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \theta_A = \frac{M_0}{6EI}(3 \times 0^2 - L^2) = -\frac{M_0L}{6EI} = \theta_{min}$$

A noktasındaki teğete orijinal (şekil değiştirmemiş) kiriş eksenini olan x ekseninden saat ibreleri yönünde dönülerek erişildiği için  $\theta_A$  negatif çıkar ve  $\theta_{min}$  değeri olur.

$$\rightarrow \theta_A = \theta_{min} = -\frac{M_0L}{6EI} = -\frac{80 \times 10^6 \text{ Nm} \times 2 \times 10^3 \text{ mm}}{6 \times 70 \times 10^3 \text{ MPa} \times 7.5 \times 10^6 \text{ mm}^4} = -0.0508 \text{ rd} \rightarrow \theta_{min} = -0.0508 \frac{180}{\pi} = -2.9^\circ$$

$$\text{Minimum sehim: } \frac{dv}{dx} = 0 = \theta = \frac{M_0}{6EI}(3x^2 - L^2) = 0 \rightarrow x = x_c = \frac{L}{\sqrt{3}} \rightarrow v_{min} = v_c = \frac{M_0}{6EIL} \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) \left[\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 - L^2\right] = -\frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

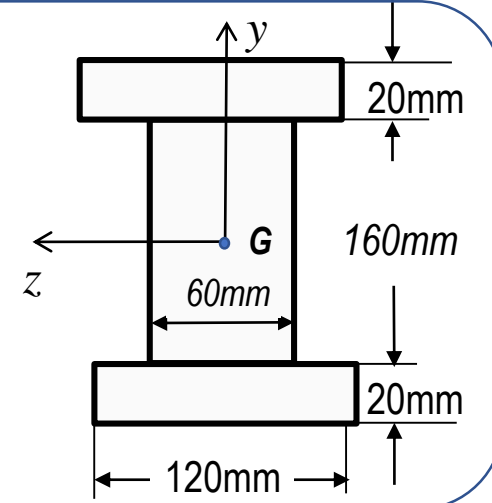
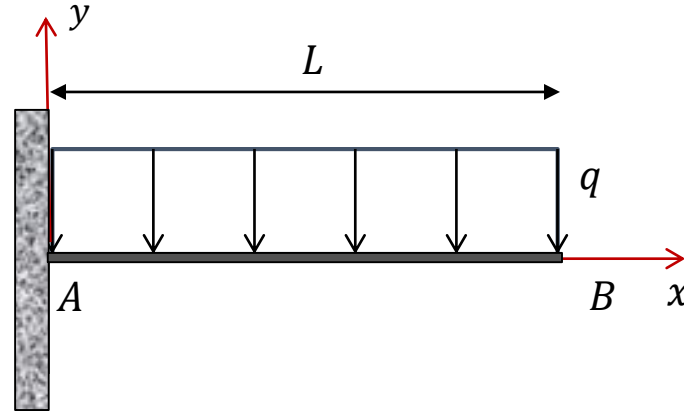
$$\rightarrow v_{min} = v_c = -\frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI} = -\frac{80 \times 10^6 \times (2 \times 10^3)^2}{9\sqrt{3} \times 70 \times 10^3 \times 7.5 \times 10^6} \Rightarrow v_{min} = -39.1 \text{ mm}$$

C'deki çökme -y yönünde olduğundan negatiftir ve  $v_{min}$  değerine eşittir.

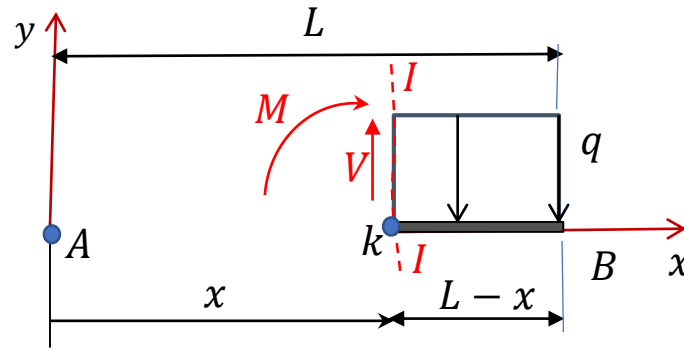
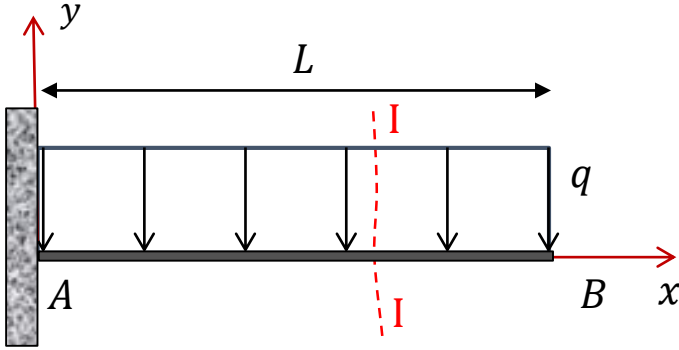
**Örnek 3.1.3** Şekildeki konsol kiriş için

- a) Eğim ve sehim denklemlerini çıkartınız.  
b) Maksimum eğim ve sehim değerlerini hesaplayınız.

$$b=60 \text{ mm}, L=2 \text{ m}, h=200 \text{ mm}, q=200 \text{ kN/m}, E=100 \text{ GPa}$$



**Çözüm: a-)** Önce iç eğilme momenti denklemini bulalım:



$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow -M - q(L-x) \cdot \frac{(L-x)}{2} = 0$$

$$M = -\frac{(L-x)^2}{2} q$$

Küçük şekil değiştirmeler için  
3.2.a denklemi:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M = -\frac{(L-x)^2}{2} q$$

$L-x = t$  olarak tanımlarsak  
 $\rightarrow -dx = dt$

1. integral:  $EI \frac{dv}{dx} = EI\theta = -\int \frac{t^2}{2} q (-dt) = \frac{t^3}{6} q + c_1 \rightarrow EI\theta = \frac{(L-x)^3}{6} q + c_1$  (1)

2. integral:  $EIv = \int \frac{t^3}{6} q (-dt) + \int c_1 dx = -\frac{t^4}{24} q + c_1 x + c_2 \rightarrow EIV = -\frac{(L-x)^4}{24} q + c_1 x + c_2$  (2)

**Sınır şartları:** Ankastre uçta (A noktasında) eğim ve sehim sıfır olur.

$$x = 0 \text{ da : } \theta = 0, \quad v = 0$$

(1) denklemden:  $EI\theta = 0 = \frac{(L-0)^3}{6}q + c_1 \rightarrow c_1 = -\frac{qL^3}{6}$

(2) denklemden:  $EIv = 0 = -\frac{(L-0)^4}{24}q + c_1 \cdot 0 + c_2 \rightarrow c_2 = \frac{qL^4}{24}$

$c_1$  ve  $c_2$  sabitlerini (1) ve (2) denklemlerinde yerine koyarsak:

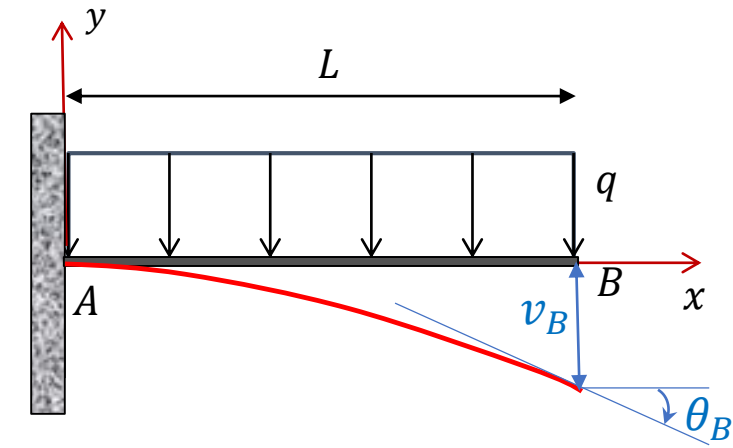
(1):  $\rightarrow EI\theta = \frac{(L-x)^3}{6}q - \frac{qL^3}{6} \rightarrow \theta = \frac{q}{6EI} [(L-x)^3 - L^3]$  (Eğim denklemi)

(2):  $\rightarrow EIV = -\frac{(L-x)^4}{24}q - \frac{qL^3}{6}x + \frac{qL^4}{24} \rightarrow v = \frac{q}{24EI} [(L-x)^4 - 4L^3x + L^4]$  (Sehim denklemi)

**b-)** Şiddetçe maksimum eğim ve maksimum sehim B serbest ucunda ortaya çıkacaktır. ( $x_B = L$ )

$$\theta_B = \frac{q}{6EI} [(L-L)^3 - L^3] = -\frac{qL^3}{6EI} = \theta_{\min} \rightarrow |\theta_B| = \theta_{\max} = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v_B = \frac{q}{24EI} [(L-L)^4 - 4L^3 \cdot L + L^4] = -\frac{qL^4}{8EI} = v_{\min} \rightarrow |v_B| = v_{\max} = \frac{qL^4}{8EI}$$



*B noktasındaki eğim ve sehimin işareti negatif olduğundan aslında minimum değerlerdir. Fakat şiddetçe maksimum değerlere karşılık gelir.*

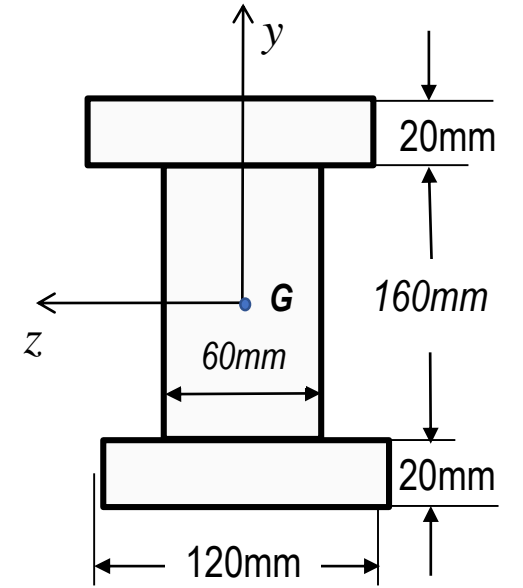
Soruda verilen değerler yerine koyulursa: ( $b=60 \text{ mm}$ ,  $L=2 \text{ m}$ ,  $h=200 \text{ mm}$ ,  $q=200 \text{ kN/m}$ ,  $E=100 \text{ GPa}$ )

$$I = I_z = 2 \left[ \frac{120 \times 20^3}{12} + 120 \times 20 \times 90^2 \right] + \frac{60 \times 160^3}{12} = 59520 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

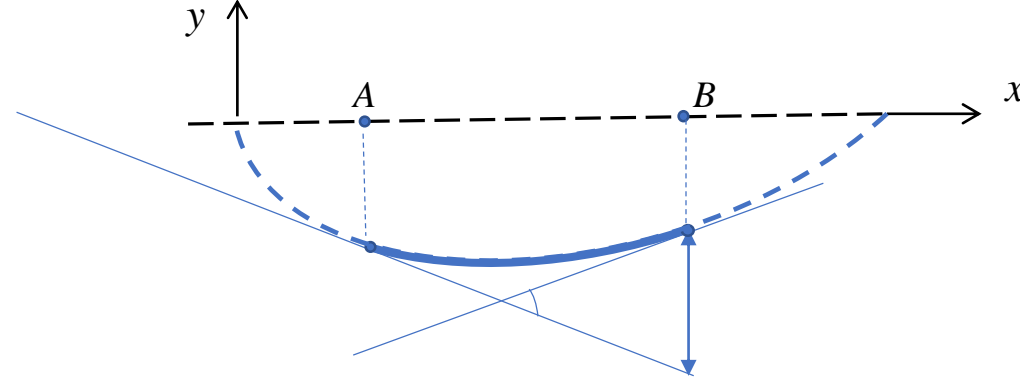
$$q = \frac{200 \times 10^3 \text{ N}}{10^3 \text{ mm}} = 200 \text{ N/mm}$$

$$\rightarrow |\theta_B| = \theta_{\max} = \frac{qL^3}{6EI} = \frac{200 \times (2 \times 10^3 \text{ mm})^3}{6 \times 100 \times 10^3 \text{ MPa} \times 59520 \times 10^3 \text{ mm}^4} = 0.045 \text{ rd} \rightarrow \theta_{\max} = \left( \frac{0.045 \times 180}{\pi} \right) \rightarrow \theta_{\max} \cong 2.58^\circ$$

$$\rightarrow v_{\max} = |v_B| = \frac{qL^4}{8EI} = \frac{200 \times (2 \times 10^3)^4}{8 \times 100 \times 10^3 \times 59520 \times 10^3} \rightarrow v_{\max} = 67.2 \text{ mm}$$



## ELASTİK EĞRİ-2



*Eğilmeye Maruz Kirişlerde*

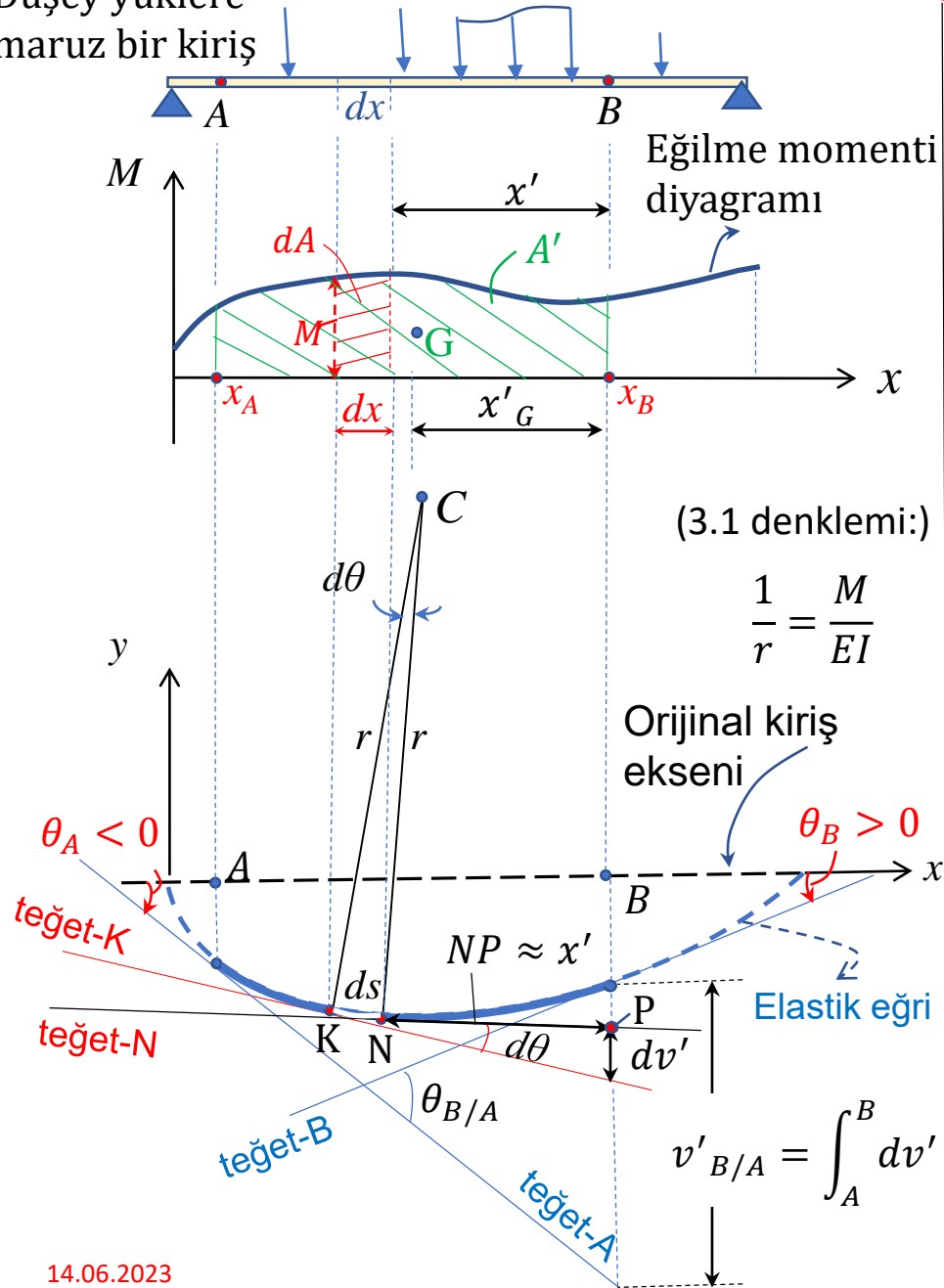
# 3.2 MOMENT ALANI METODU

ile

## Eğim ve Sehim Hesaplamaları

## Moment Alanı Metodu

Düsey yüklere maruz bir kiriş



**Bu metod**, belli bir noktanın çökme veya dönmesini doğrudan bulmamızı sağlar ve daha çok tekil yüklerde pratiktir.

**A'**: Kirişin A ve B gibi iki kesiti arasında moment diyagramının altında kalan alan

**G**: A' alanının ağırlık merkezi

**x'\_G**: A' alanının B den geçen düşey eksene göre ağırlık merkezinin yatay koordinatı:

Yandaki şekillere göre aşağıdaki işlemleri yapabiliriz:

$$dx \text{ uzunluğundaki kısım için: } ds \cong dx = r d\theta \rightarrow d\theta = \frac{1}{r} dx = \frac{M}{EI} dx$$

Diferensiyel mesafedeki **K** ve **N** noktaları için: B den geçen düşey çizginin, **K-N** teğetleri arasındaki kısmının uzunluğu  $dv'$ ; açı ise  $d\theta$  iken, A-B teğetleri arasındaki mesafe  $v'_{B/A}$  ve teğetleri arası açı  $\theta_{B/A}$  olup integrasyonla aşağıdaki gibi hesaplanabilirler:

$$\int_A^B d\theta = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} (M dx) \quad , \quad dA \cong M dx \rightarrow \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} dA \quad \text{--- A'}$$

Kirişin A ve B kesitlerinin teğetleri arasındaki açı (veya eğimler arasındaki fark):

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \frac{A'}{EI} \quad (3.4a)$$

$$dv' = x' d\theta \rightarrow v'_{B/A} = \int_A^B dv' = \int_A^B x' d\theta = \int_A^B x' \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_A^B x' M dx = \frac{1}{EI} \int_A^B x' dA$$

$$x'_G = \frac{\int_A^B x' dA}{\int_A^B dA} \rightarrow \int_A^B x' dA = x'_G \cdot A' \quad \text{B' den geçen düşey eksene göre A' alanının statik momenti (Q)}$$

B den geçen düşey çizginin, A ve B teğetleri arasında kalan kısmının uzunluğu:

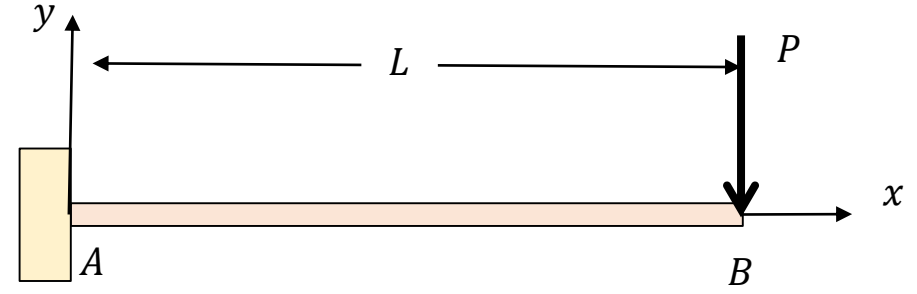
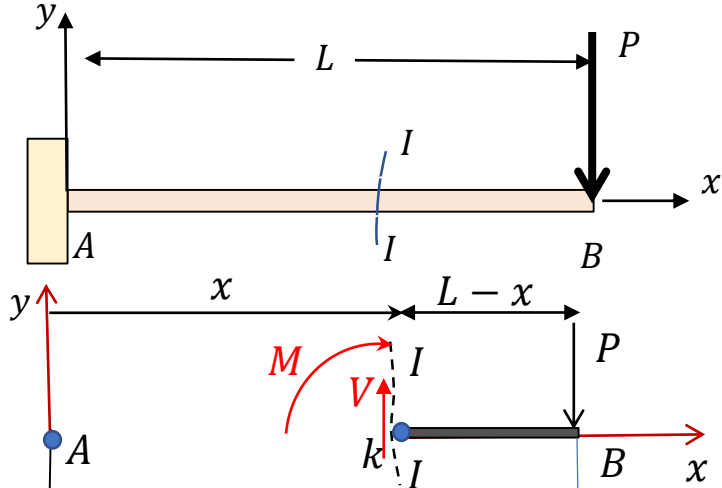
$$v'_{B/A} = \frac{x'_G \cdot A'}{EI} = \frac{Q}{EI} \quad (3.4b)$$

**Örnek 3.2.1** Şekildeki konsol kiriş için B serbest ucunun

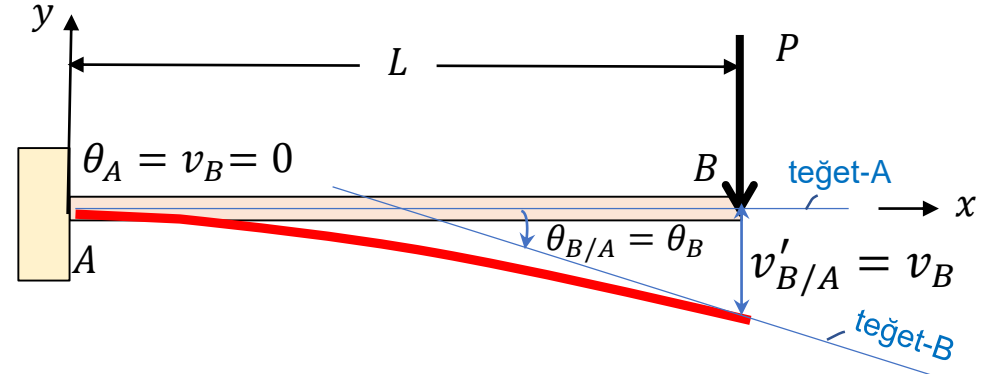
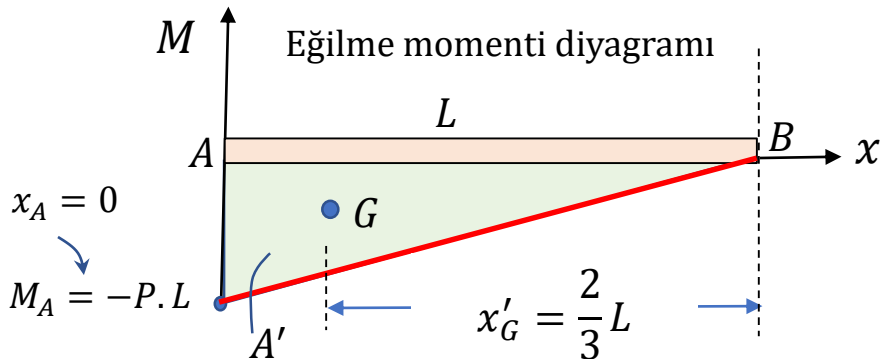
a-) dönme açısı değerini,

b-) çökme değerlerini

Moment Alanı Metoduna göre bulunuz.

**Çözüm**

$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow M = -P(L-x)$$



a-) A ve B noktalarından çizilen teğetler arasındaki  $\theta_{BA}$  açısı, bu iki nokta arasında kalan A' eğilme momenti alanının  $(EI)$  eğilme rijitliğine bölünmesiyle bulunur.

$$(3.4a) \text{ denklemden: } \theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \theta_B = \frac{A'}{EI} = \frac{-(P \cdot L) \cdot L}{2EI} \rightarrow \theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

b-) A ve B noktalarından çizilen teğetler arasında kalan B'den geçen  $v'_{B/A}$  mesafesi, bu iki nokta arasında kalan A' eğilme momenti alanının, B'ye göre Q statik momentinin  $(EI)$  eğilme rijitliğine bölünmesiyle bulunur.

$$(3.4b) \text{ denklemden: } v'_{B/A} = v_B = \frac{Q}{EI} = \frac{x'_G \cdot A'}{EI} = \frac{2L}{3EI} \left( -\frac{P \cdot L \cdot L}{2} \right) \rightarrow v_B = -\frac{PL^3}{3EI}$$

## ELASTİK EĞRİ -3



*Eğilmeye Maruz Kirişlerde*

# 3.3 EŞLENİK ÇUBUK METODU

*ile*

## Eğim ve Sehîm Hesaplamaları

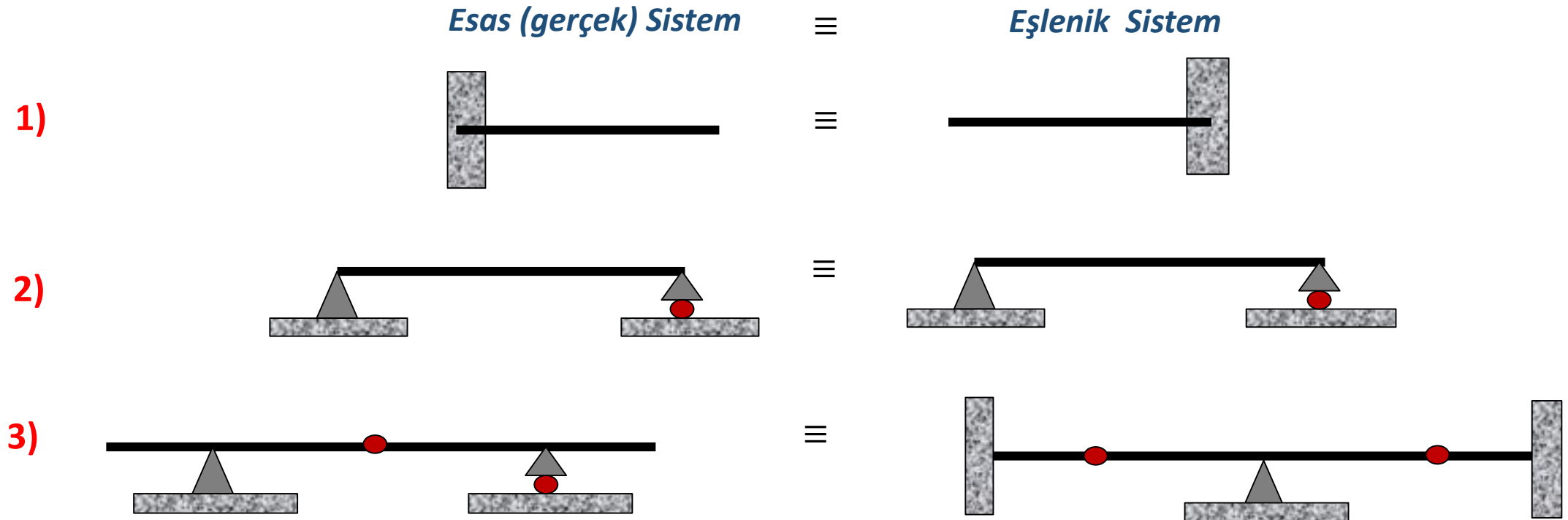
## Eşlenik Çubuk Metodu

**Bu metod**, moment alanı metodu gibi daha çok tekil yüklerde pratiktir ve belli bir noktanın çökme veya dönmesini doğrudan bulmamızı sağlar. Bu metoda göre, esas yani gerçek sistemin eğilme momenti diyagramı eşlenik sisteme yük olarak verilir.

Bu yük altındaki eşlenik sistemde:

- i) Herhangi bir noktadaki **V kesme iç kuvvetinin** eğilme rijitliğine (EI) oranı, bu noktadaki **eğim açısına**:  $(\theta = \frac{V}{EI})$  (3.5a)
- ii) Herhangi bir noktadaki **M eğilme iç momentinin** eğilme rijitliğine (EI) oranı, bu noktadaki **sehim değerine**:  $(v = \frac{M}{EI})$  (3.5b)  
eşittir.

### Bazı Esas Sistemler ve Eşlenikleri

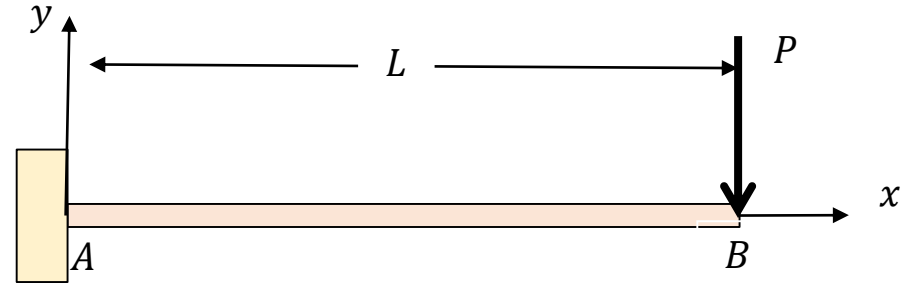


**Örnek 3.3.1** Şekildeki konsol kiriş için B serbest ucunun

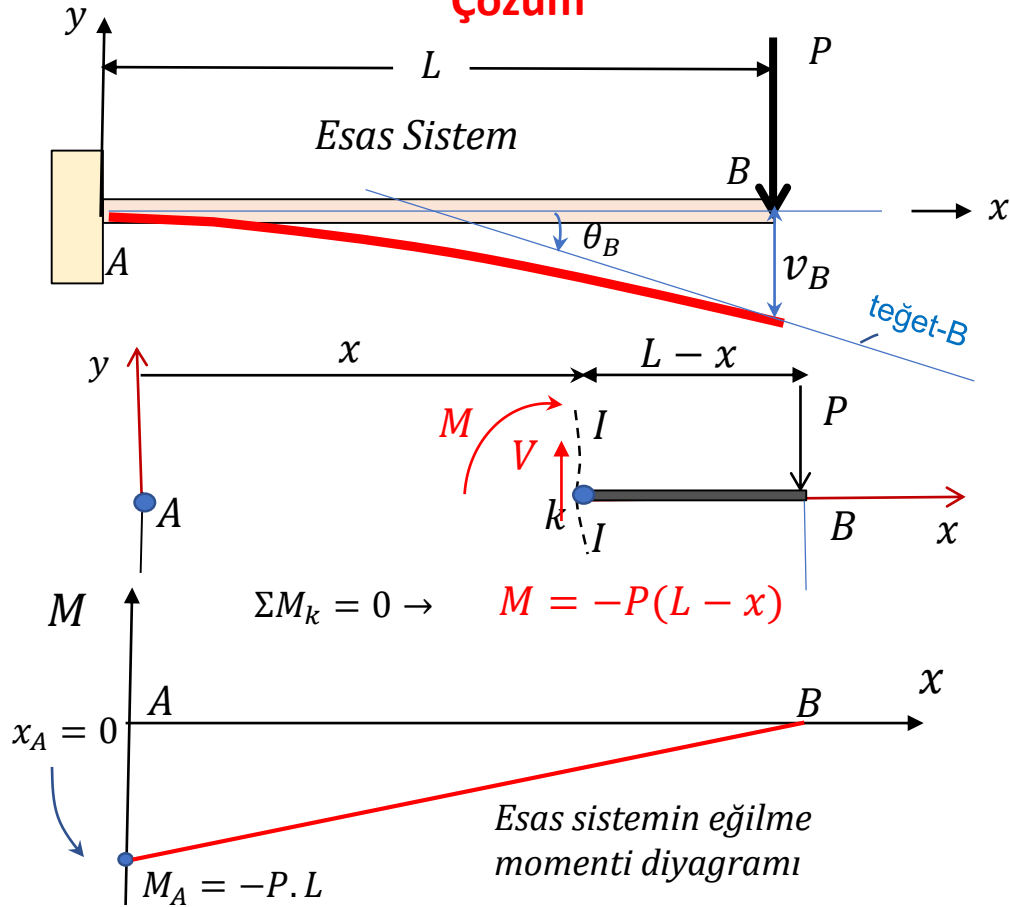
a-) dönme açısı değerini,

b-) çökme değerlerini

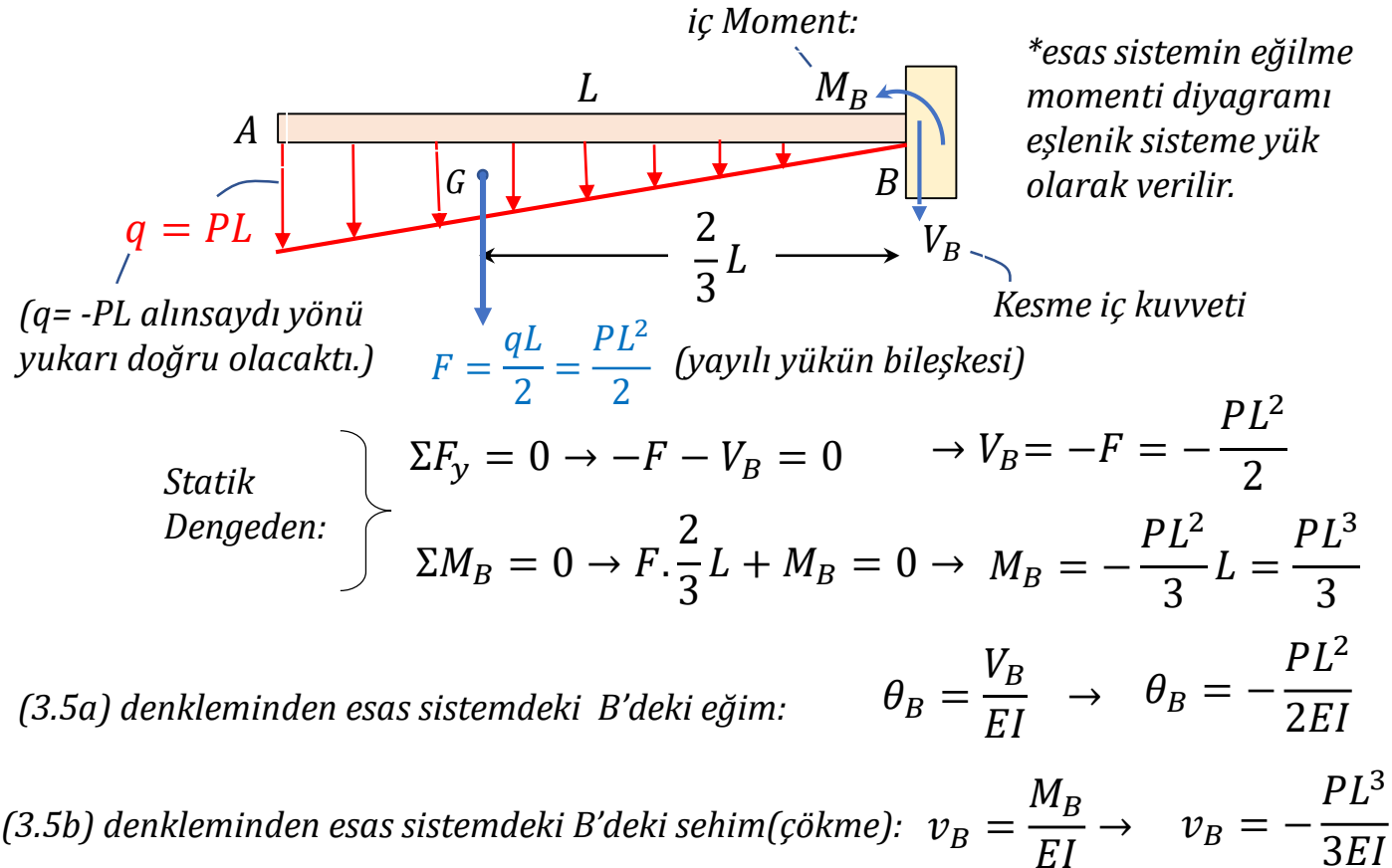
**Eşlenik Çubuk Metoduna** göre bulunuz.

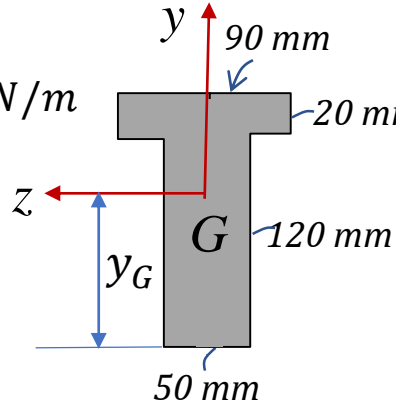
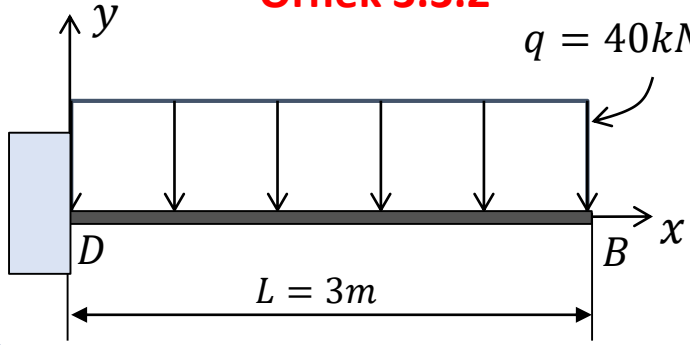


**Çözüm**

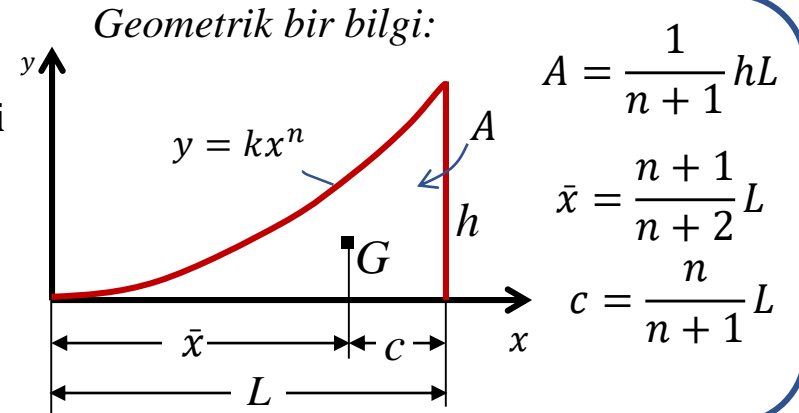


*Eşlenik Sistem ve yüklemesi:*

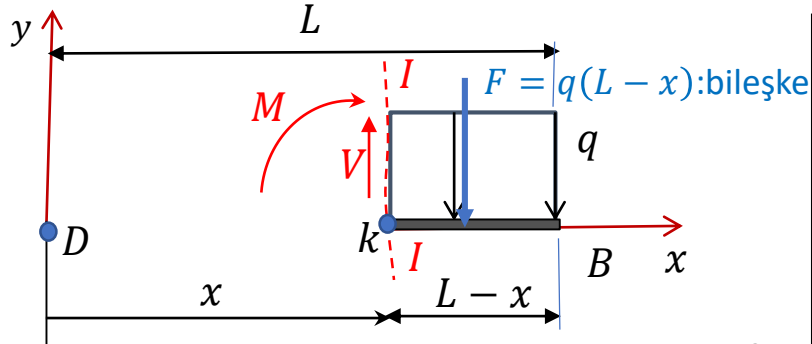


**Örnek 3.3.2**

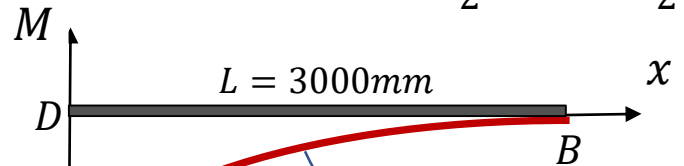
Düzgün yayılı yüke maruz konsol kirişin B noktasındaki eğim ve sehim değerlerini eşlenik çubuk metodu ile hesaplayınız.  $E=200 \text{ GPa}$



**Çözüm:** Hata yapmamak için tüm birimleri N ve mm 'ye dönüştürmeliyiz.  $q = \frac{40 \text{ kN}}{\text{m}} = \frac{40 \text{ N}}{\text{mm}}$



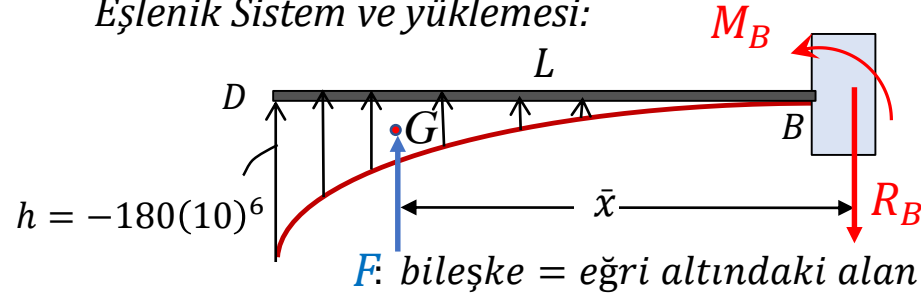
$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow M = -F \cdot \frac{L-x}{2} = \frac{-q(L-x)^2}{2}$$



Esas sistemin eğilme momenti diyagramı

$$M_D = -\frac{1}{2} q(L-0)^2 = -\frac{1}{2} 40(3000 \text{ mm})^2 = -180(10)^6 \text{ Nmm}$$

Eşlenik Sistem ve yüklemesi:



$$h = -180(10)^6$$

$F$ : bileşke = eğri altındaki alan

Üstteki geometrik bilgiden:  $n = 2$

$$\bar{x} = \frac{2+1}{2+2} L = \frac{3L}{4} = \frac{(3)(3)}{4} = 2.25 \text{ m} = 2250 \text{ mm}$$

$$A = \frac{1}{2+1} (-180)(10)^6 (3)(10)^3 = -180(10)^9 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F - R_B = 0 \rightarrow R_B = F = -180(10)^9 \text{ N}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -F\bar{x} + M_B = 180(10)^9(2250) + M_B = 0$$

$$\rightarrow M_B = -405(10)^{12} \text{ Nmm}$$

$$y_G = \frac{90 \times 20 \times 130 + 50 \times 120 \times 60}{90 \times 20 + 50 \times 120} = 76.15 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{90 \times 20^3}{12} + 90 \times 20 \times (130 - 76.15)^2 + \frac{50 \times 120^3}{12} + 50 \times 120 \times 76.15^2$$

$$I_z = 47.27 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

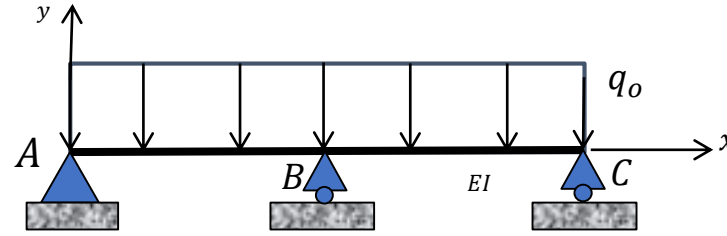
$$\theta_B = \frac{R_B}{EI} = \frac{-180(10)^9}{200(10)^3 47.27(10)^6}$$

$$\theta_B = -0.019 \text{ rd} = -1.09^\circ$$

$$v_B = \frac{M_B}{EI} = \frac{-405(10)^{12}}{200(10)^3 (47.27)(10)^6}$$

$$v_B = -42.84 \text{ mm}$$

## ELASTİK EĞRİ-4



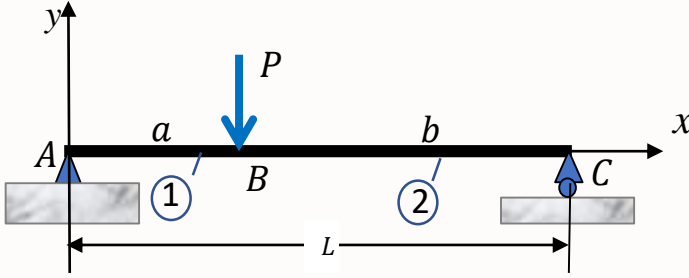
Eğilmeye Maruz Kirişlerde Eğim ve Sehım Hesaplamaları

# 3.4 Süperpozisyon Metodu ve Hiperstatik Sistemler

**Bu bölümde;** incelediğimiz problemi, aşağıdaki farklı referans sistemlerin birisine veya birkaçının birleşimine benzeterek çözümler üreteceğiz. Her bir referans sisteminin eğim ( $\theta$ ) ve çökme ( $v$ ) genel denklemleri yanlarında verilmiştir. Bu denklemlerin daha önceki yöntemlerle elde edildiğini kabul ediyoruz. Konuyu Örnekler üzerinden anlatacağız.

### REFERANS SİSTEMLER

**S1**



AB kısmı

$$v_1 = \frac{Pb}{6EI} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$$

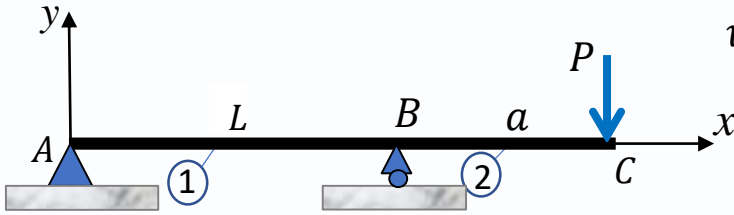
$$\theta_1 = \frac{Pb}{6EI} [3x^2 - (L^2 - b^2)]$$

BC kısmı

$$v_2 = \frac{P}{6EI} [3ax^2L - ax^3 - Lx(2L^2 + a^2) + La^3]$$

$$\theta_2 = \frac{P}{6EI} [6axL - 3ax^2 - L(2L^2 + a^2)]$$

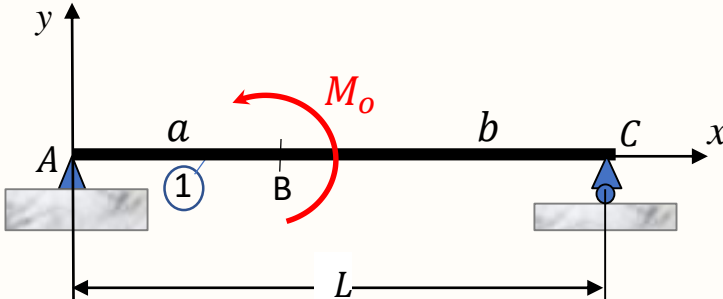
**S2**



$$v_1 = \frac{PaL^2}{6EI} \left[ \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right], \quad v_2 = \frac{P}{2EI} \left[ \frac{x^3}{3} - (L+a)x^2 + \left( L^2 + \frac{4La}{3} \right)x - L^2 \left( \frac{L+a}{3} \right) \right]$$

$$\theta_1 = \frac{PaL}{6EI} \left[ 1 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad \theta_2 = \frac{P}{2EI} \left[ x^2 - 2(L+a)x + L^2 + \frac{4La}{3} \right]$$

**S3**



$$v_1 = -\frac{M_o x}{6LEI} [6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2]$$

$$\theta_1 = -\frac{M_o}{6LEI} [6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2], \quad \theta_c = -\frac{M_o}{6LEI} [3a^2 - L^2]$$

**S4**

$$v_B = -\frac{qL}{384EI} (8L^3 - 4bL^2 + b^3)$$

**S5**

$$v = \frac{qx}{360L(EI)} [7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4]$$

$$\theta = \frac{q}{6EI} [7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4]$$

$$v_{max} = \frac{0,00652qL^4}{EI}$$

**S6**

$$v_B = -\frac{Pa^3}{3EI}$$

$$\theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

**S7**

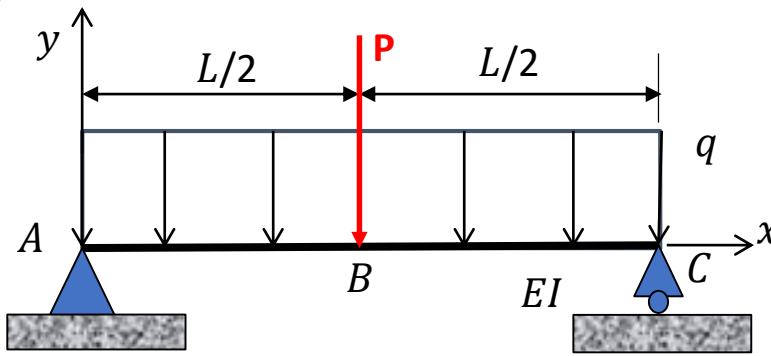
$$v_B = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\theta_B = -\frac{qa^3}{6EI} = \theta_C$$

**S8**

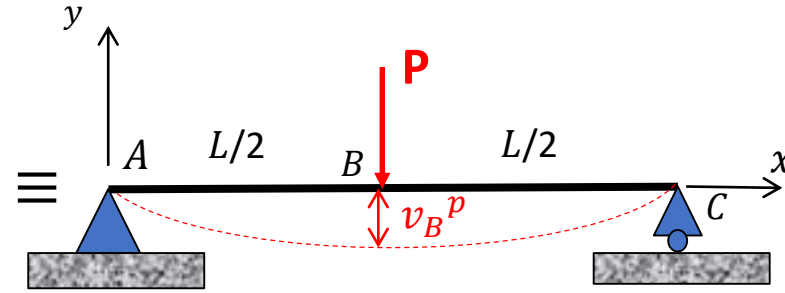
$$\theta = -\frac{Px}{EI} \left(L - \frac{x}{2}\right),$$

$$v = -\frac{Px^2}{2EI} \left(L - \frac{x}{3}\right),$$

**Örnek 3.4.1**

Şekildeki Sistemde B noktasının çökmesini bulunuz ( $v_B$ )=?

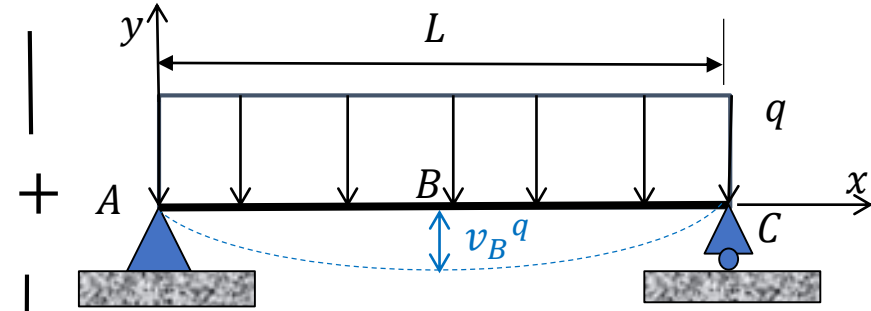
**Çözüm:** Süperpozisyon ilkesine göre P ve q sırayla uygulanır ve sehimler toplanabilir.



Üstteki tekil yüklemeyi alttaki S1 referans sistemine benzetebiliriz. Buna göre :  
 $a=b=L/2, x=x_B=L/2$

B, 1nci bölgenin noktası olarak düşünülür ve  $v_1$  genel denkleminde çökmesi bulunur.

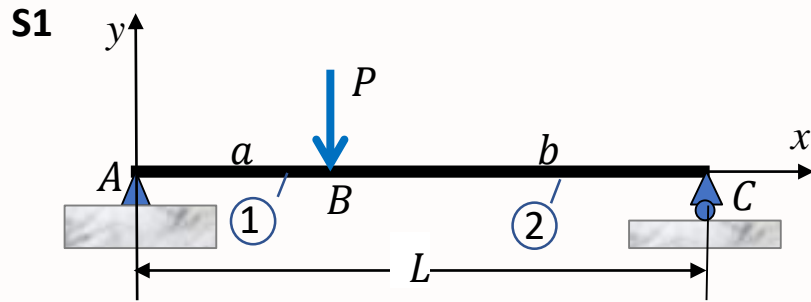
$$v_B^p = \frac{PL/2}{6EIL} \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( L^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{L}{2} \right] = -\frac{PL^3}{48EI}$$



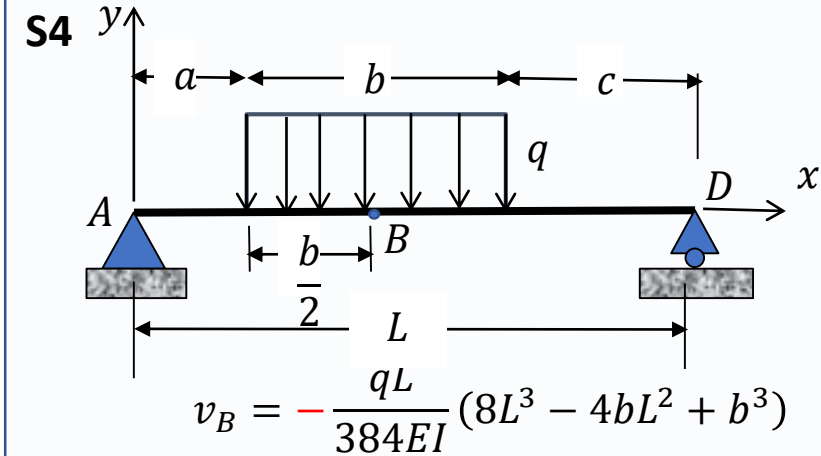
Üstteki yayılı yüklemeyi S4 referans sistemine benzetebiliriz. Buna göre;

$$a = c = 0, \quad b = L$$

$$v_B^q = -\frac{qL}{384EI} (8L^3 - 4 \cdot L \cdot L^2 + L^3) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

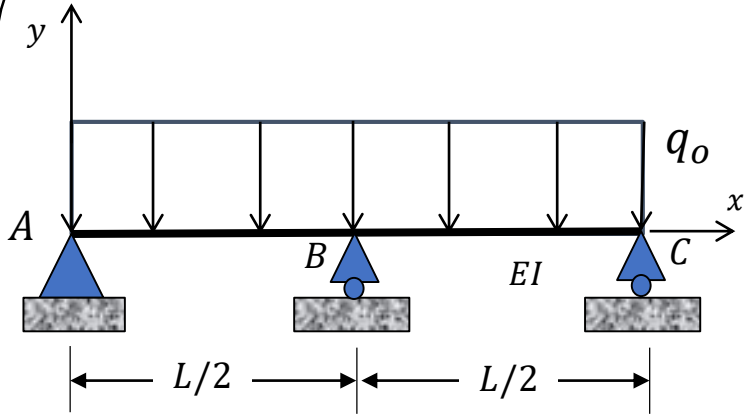


$$v_1 = \frac{Pb}{6EIL} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$$



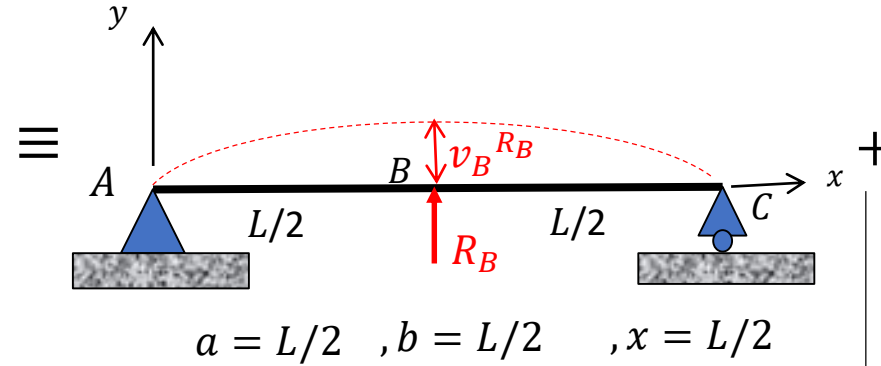
$$v_B = -\frac{qL}{384EI} (8L^3 - 4bL^2 + b^3)$$

Üstte elde edilen sonuçları yerine koyarsak:  $v_B = v_B^p + v_B^q \rightarrow v_B = -\frac{PL^3}{48EI} - \frac{5qL^4}{384EI}$

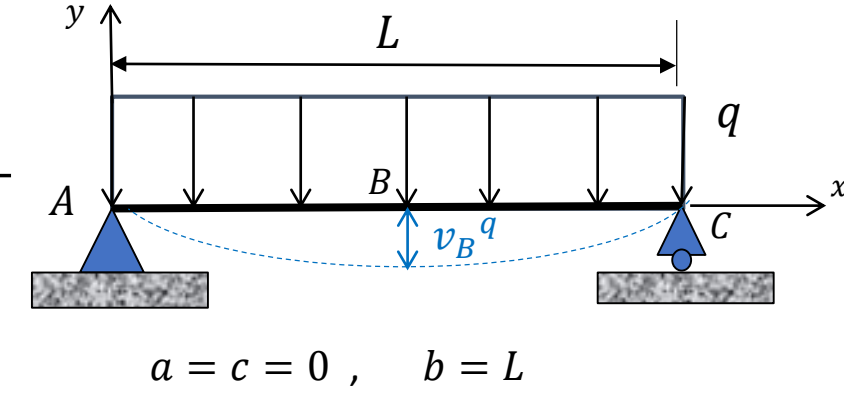
**Örnek 3.4.2**

Şekildeki Sistemde B mesnetindeki tepki kuvvetini bulunuz. ( $R_B$ )=?

**Çözüm:** B mesneti yerine reaksiyon kuvveti  $R_B$  koyulur. Bu hiperstatik bir sistemdir.  $R_B$  ve  $q$  sırayla uygulanır. Bir önceki örnekteki gibi S1 ve S4 referans sistemlerinin birleşimi ile elde edilebilir.  $R_B$  kuvveti S1 referansındaki P'nin zıt yönünde olduğu için denklemin başına eksi işareti koyulur.



$$v_B^{R_B} = \frac{-R_B L/2}{6EI} \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( L^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{L}{2} \right] = \frac{R_B L^3}{48EI}$$



$$v_B^q = \frac{qL}{384EI} (8L^3 - 4 \cdot L \cdot L^2 + L^3) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

B mesnetinden dolayı B deki çökme sıfırdır.

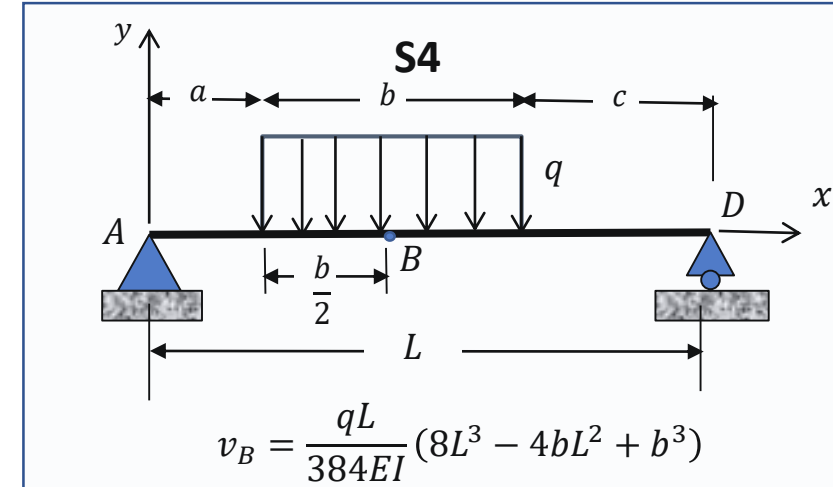
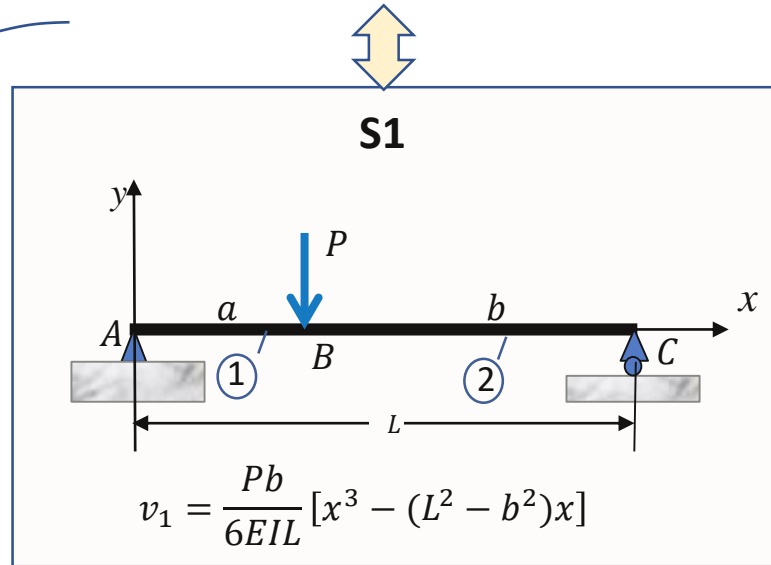
$$v_B = v_B^p + v_B^q = 0$$

Üstte elde edilen sonuçları yerine koyarsak:

$$v_B = \frac{R_B L^3}{48EI} - \frac{5qL^4}{384EI} = 0$$

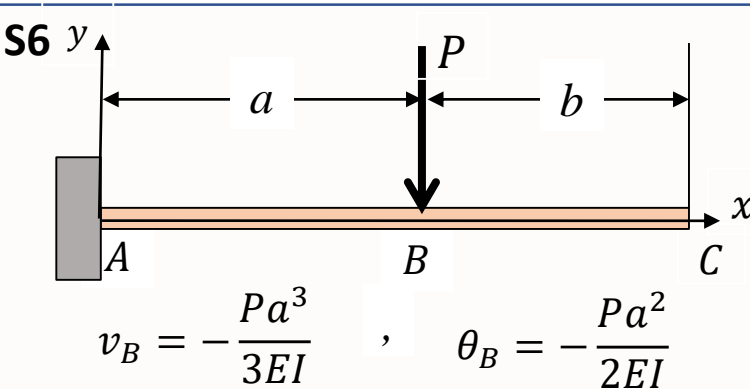
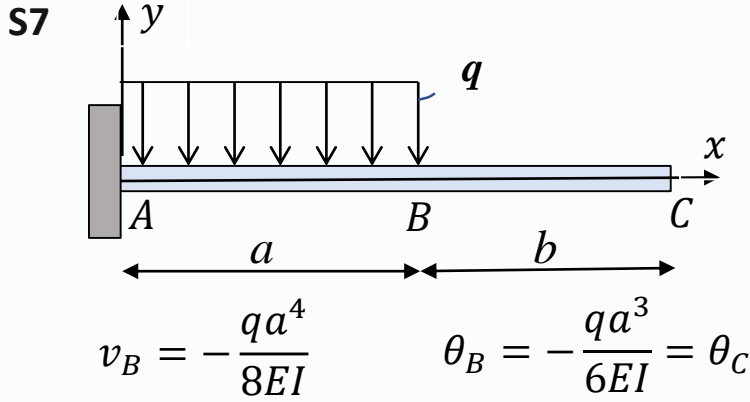
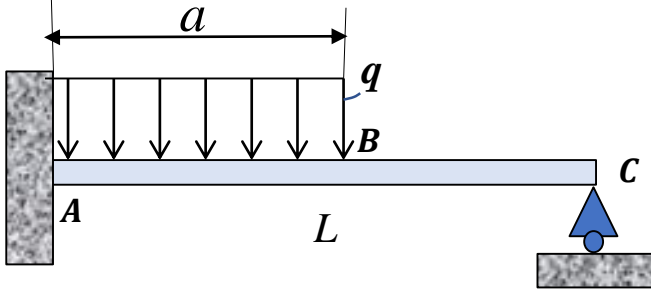
$$\rightarrow R_B = \frac{5qL}{8}$$

A ve C mesnet kuvvetleri statik denklemlerden ayrıca hesaplanabilir.



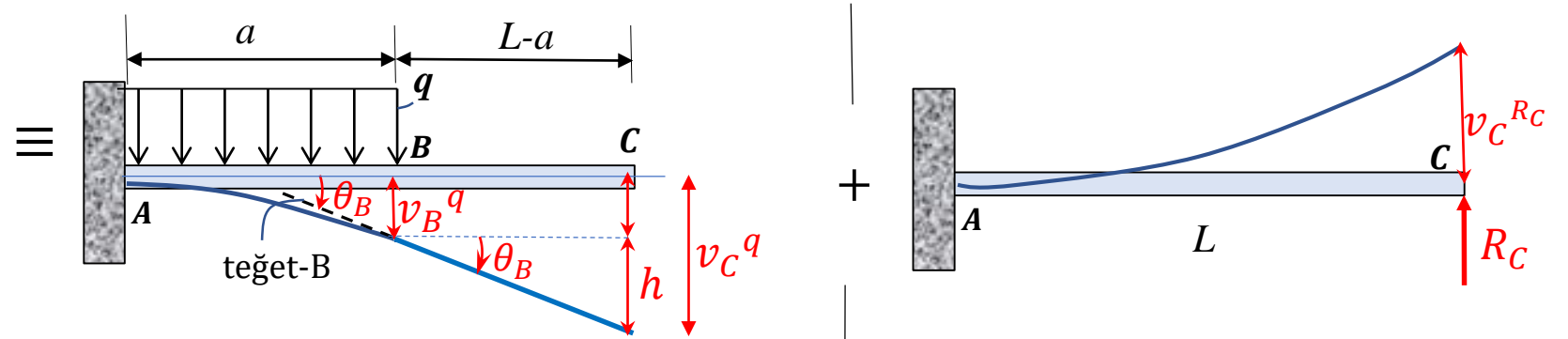
## Örnek 3.4.3

C noktasında ortaya çıkan reaksiyon kuvvetini bulunuz( $R_C$ )=?



## Çözüm:

C mesneti yerine reaksiyon kuvveti  $R_C$  koyulur. Yayılı yük ve  $R_C$  reaksiyon kuvveti sırayla uygulanır.



Üstteki yüklemeyi S7 referans sistemini benzetebiliriz. Buna göre referans sistemdeki değişkenleri karşılıkları:

$$b = L - a, \quad a = a, \quad q = q, \quad v_B^q = -\frac{qa^4}{8EI}$$

B-C arasında yükleme olmadığından BC kısmı B den geçen teğetle çakışır ve doğrusal kalır. Küçük deformasyon olduğundan  $\tan \theta_B \cong \theta_B$  alınabilir.

$$h = \theta_B (L - a)$$

$$v_C^q = v_B^q + h = -\frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^3(L - a)}{6EI}$$

Üstteki yüklemeyi S6 referans sistemine benzetebiliriz. Buna göre üstteki sistemdeki C noktası referans sistemdeki B noktasına karşılık gelir. Diğer değişkenlerin karşılıkları:

$$b = 0, \quad a = L, \quad R_C \equiv -P, \quad B \equiv C$$

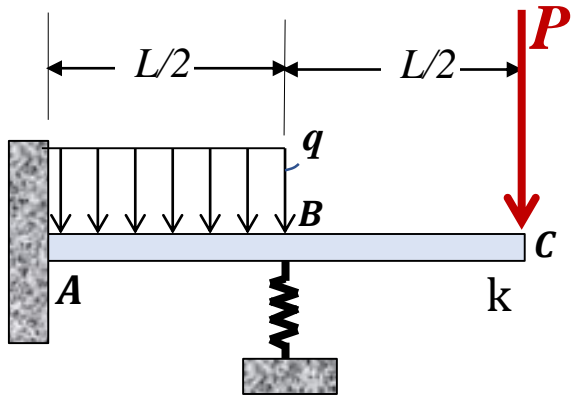
$$v_C^{R_C} = \frac{R_C L^3}{3EI} \quad (\text{Veya S8 ref. Sisteminden de bulunabilirdi.})$$

Mesnetten dolayı C'deki toplam çökme sıfırdır:  $v_C^q + v_C^{R_C} = 0$

Üstte bulunan değer yerine koyulursa:

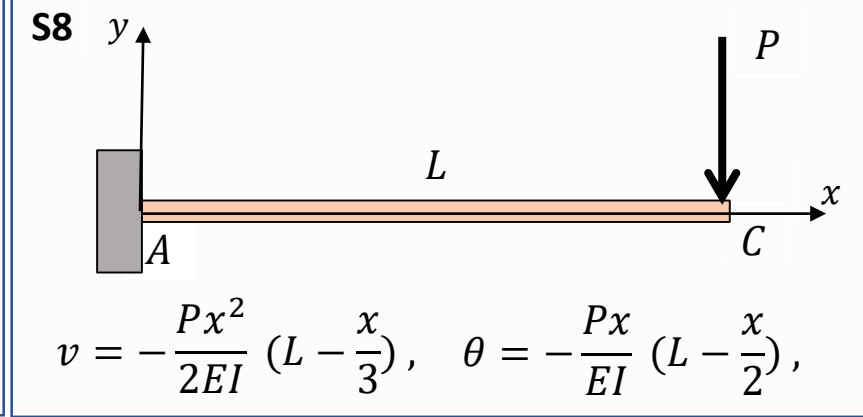
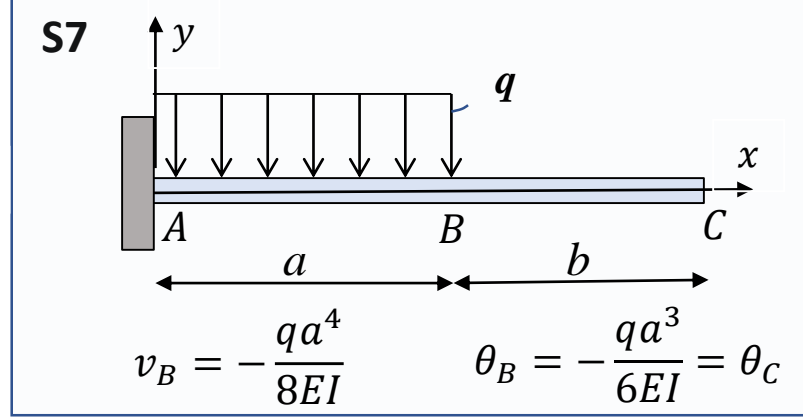
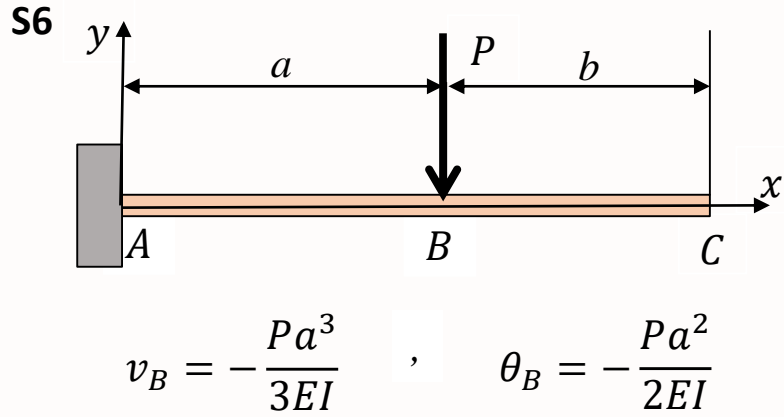
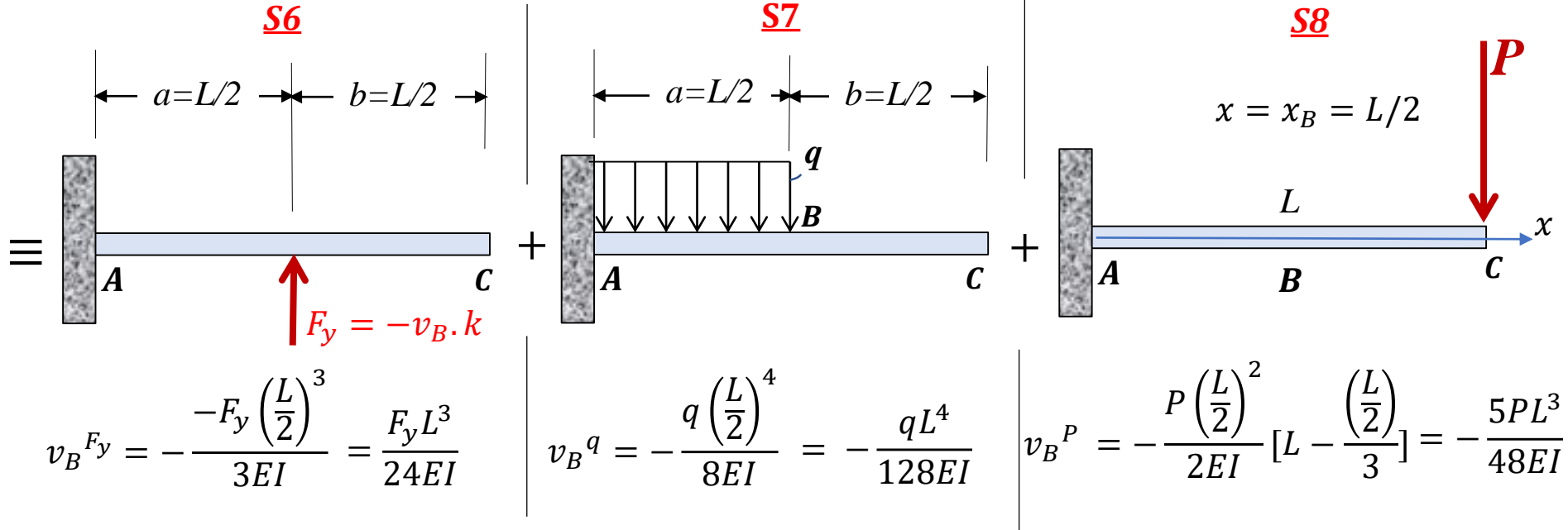
$$-\frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^3(L - a)}{6EI} + \frac{R_C L^3}{3EI} = 0 \quad \rightarrow R_C = \frac{qa^3}{L^3} \left( \frac{(L - a)}{2} + \frac{3}{8}a \right)$$

**Örnek 3.4.4**



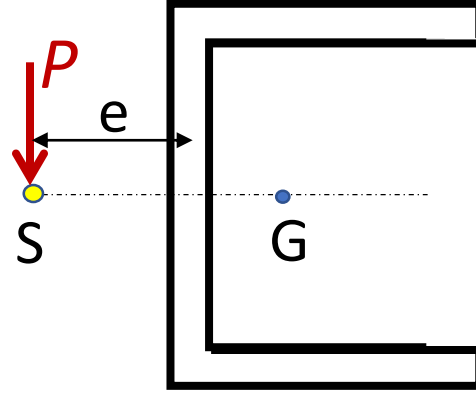
Şekildeki Sistemde yayda oluşan kuvveti hesaplayınız.

**Çözüm:**



$$v_B = v_B^{F_y} + v_B^q + v_B^P$$

$$-v_B \cdot k = F_y \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} -\left(\frac{F_y L^3}{24EI} - \frac{qL^4}{128EI} - \frac{5PL^3}{48EI}\right) k = F_y \rightarrow F_y = \frac{24L^3 k}{24EI + L^3 k} \left(\frac{qL}{128} + \frac{5P}{48}\right)$$

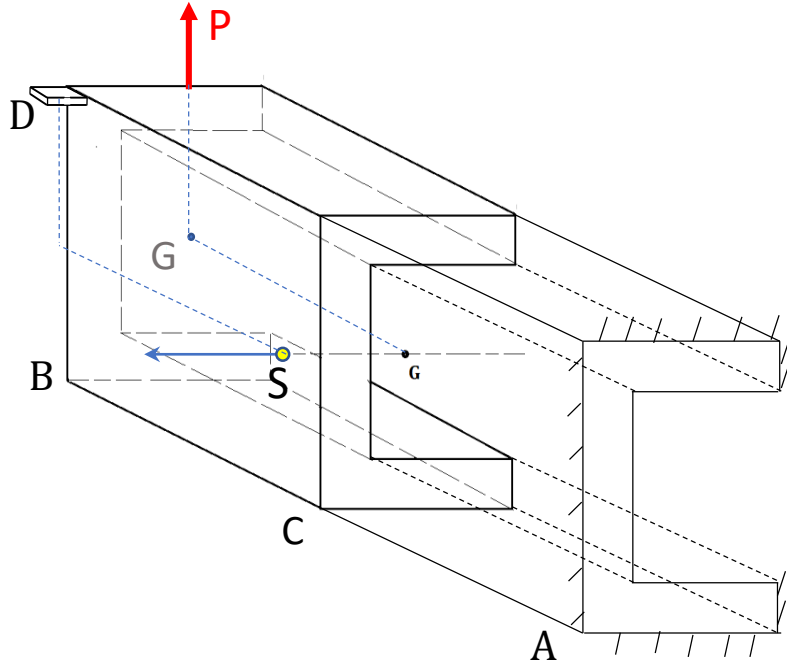


İnce Cidarlı, Simetrik Kesitli Kirişlerin  
Kesmeli Basit Eğilmesinde

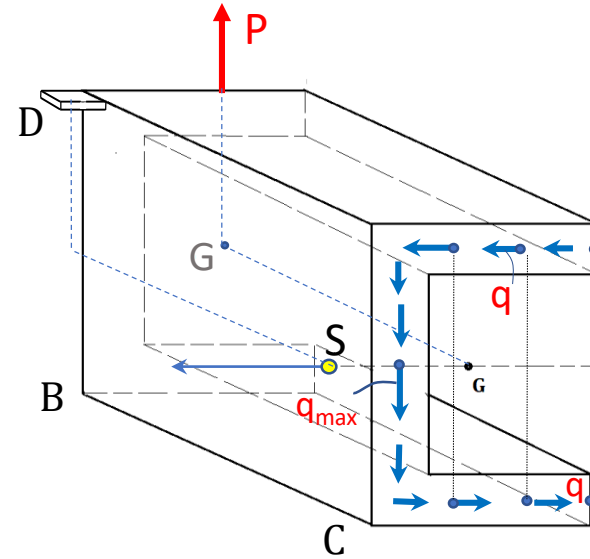
# 4 Kayma Merkezi

**4.1 Hatırlatma ve uyarı:** Bu konuyu anlayabilmek için [Mukavemet 1 ders notlarında](#) 5c bölümünde anlatılmış olan «kesmeli eğilmede kayma gerilmesi ve kayma akısı ( $q$ ) dağılımları» konularının iyice kavranmış olması gerekir. **Bu bölümdeki amacımız** ise kesmeli *basit* eğilmeye maruz, ince cidarlı simetrik kesitli kirişlerde kayma merkezinin yerini tespit edebilmektir.

**4.2 Kayma Merkezi Kavramı:** A ucundan bir duvara betonlanmış (ankastre) bir kirişe, B serbest kesitinin ağırlık merkezinden geçecek şekilde yukarı doğru  $P$  tekil kuvveti uygulayalım. Herhangi bir C kesitindeki kesme iç kuvveti ve  $q$  akısı dağılımının alttaki gibi olacağını Mukavemet-1 5c konusunda öğrenmiştik.



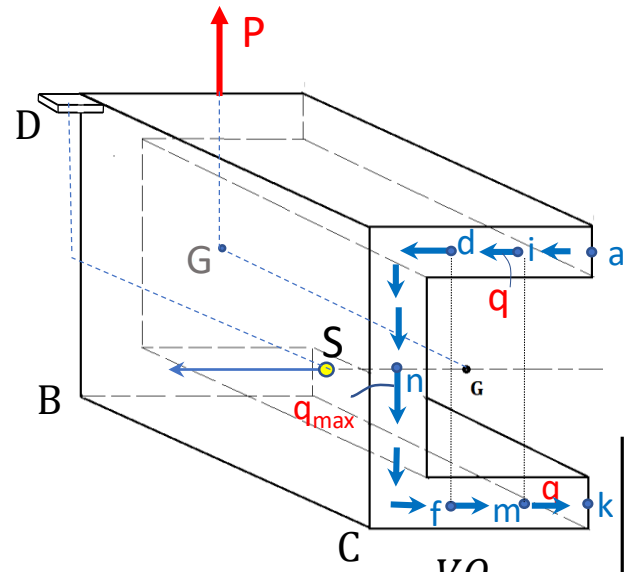
≡



**q:** kayma akısı. (Birim uzunluktaki iç kesme kuvveti N/mm)

$$q = \frac{VQ}{I_z}$$

**devamı...>>**



$$q: \text{ kayma akısı: } q = \frac{VQ}{I_z}$$

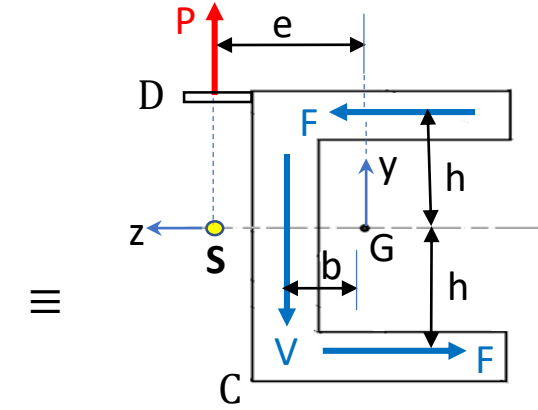
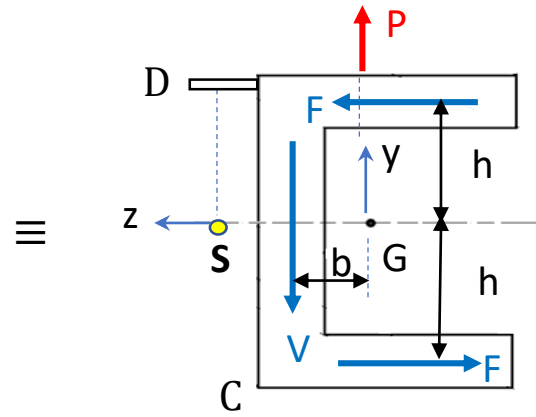
Q: ilgili kısmın statik momentini  
(Q değeri Muk.1-5c konusunda  
açıklanmıştır. ilerideki sayısal  
örneklerde daha net anlaşılacaktır.)

$$q_a = q_k = 0 ; q_d > q_i$$

$$q_d = q_f , q_i = q_m \text{ (simetriden)}$$

$$q_n = q_{max} \text{ (ağırlık merkezinde)}$$

Kayma akısı yönü: a dan dolan  
suyun k ya doğru akması gibidir.



**F iç kuvvetleri** : yatay q değerlerinin toplamıdır.  
Simetriden dolayı alt ve üst kısımda eşit fakat zıt  
yönlü olur.

**V iç kuvveti**: düşey q ların toplamıdır.

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V = P; \quad \Sigma F_z = F - F = 0 \text{ yazılabilir.}$$

Fakat dikkat edilirse V ve F iç kuvvetlerinin G'ye  
göre momentleri burulma momentidir ve  
toplamları sıfır değildir.  $\Sigma M_{Gx} = V \cdot b + 2Fh \dots \neq 0$   
Çünkü V ve F lerin döndürme yönleri aynıdır. Bu  
sebeple kirişte, eğilmenin yanı sıra burulma  
oluşur; yani kiriş x eksenin etrafında bir miktar  
dönerek şekil değiştirir.

P dış kuvveti B kesitindeki D noktasına  
kaydırılırsa, P nin G'ye göre bir burulma momenti  
oluşur ve döndürme yönü, V ve F kuvvetlerinin  
momentlerine göre zıt yöndedir.

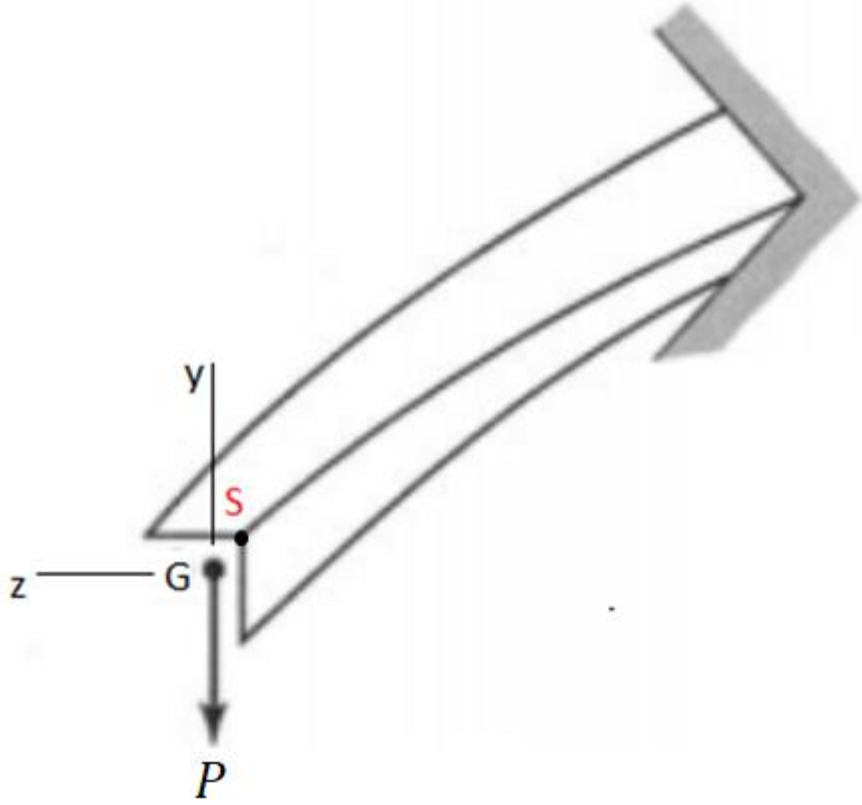
D' nin C kesitindeki izdüşümü S noktasıdır. S  
noktası öyle bir yerdedir ki, G'ye göre tüm  
kuvvetlerin toplam momenti sıfırdır.

$$\Sigma M_G = V \cdot b + 2Fh - P \cdot e = 0$$

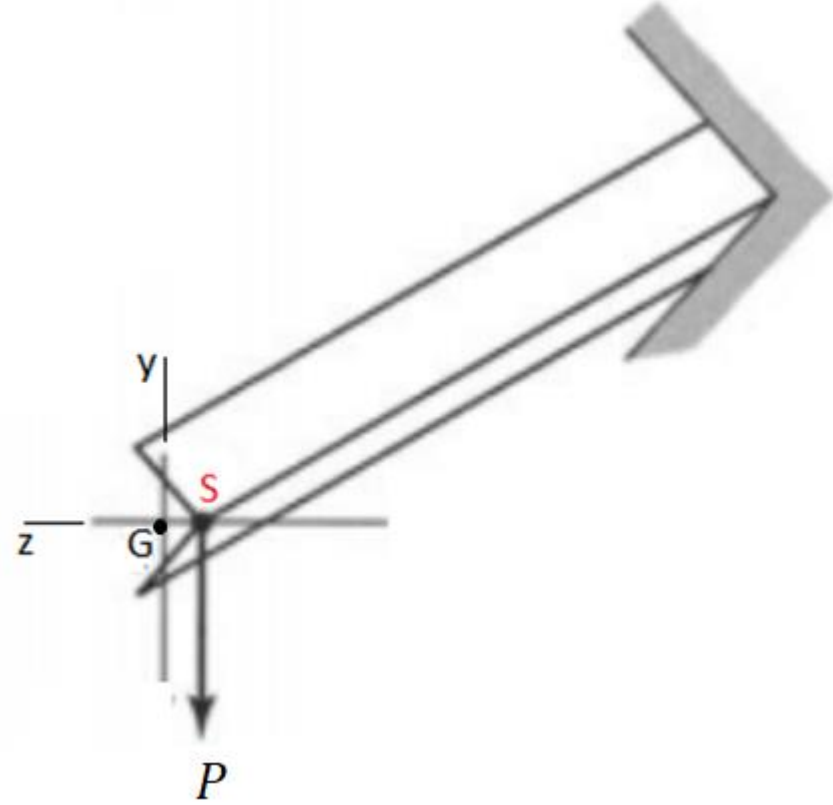
(bu denklemden e hesaplanabilir)

Bu durumda kirişte sadece eğilme oluşur, burulma  
ve dolayısıyla çarpılma, bükülme oluşmaz. **İşte bu  
S noktası kesitin kayma merkezidir.**

### 4.3 Kayma Merkezinin önemi için bir örnek:

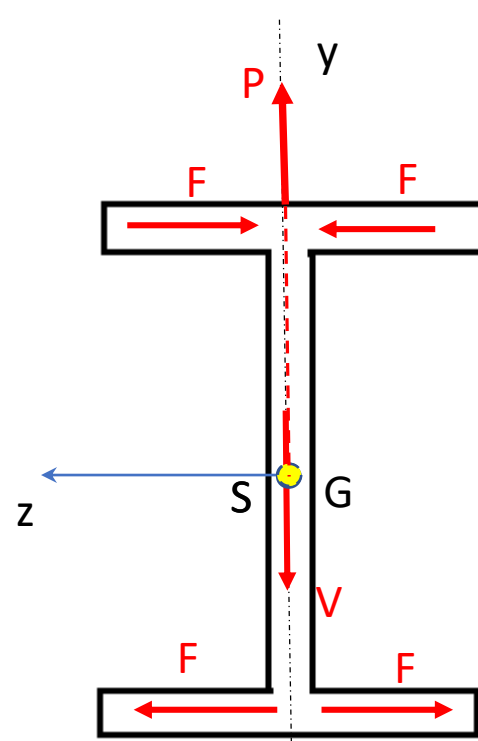
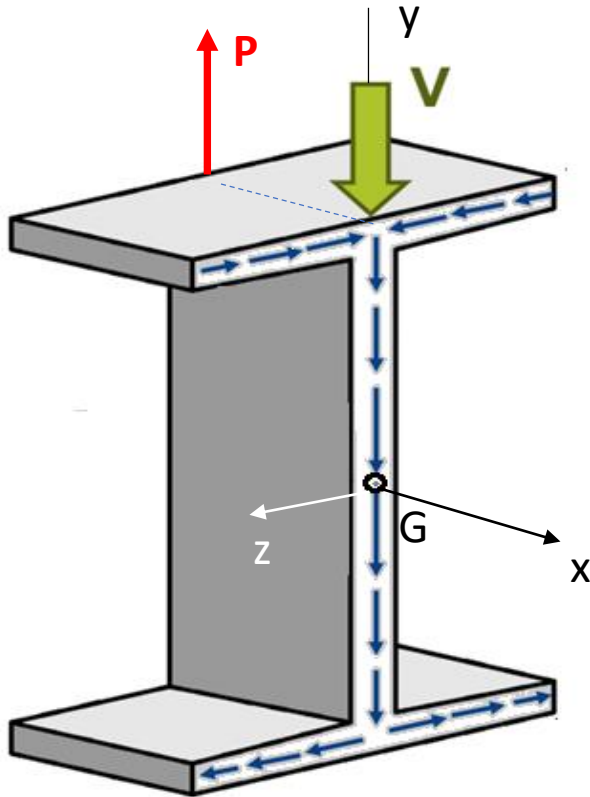


P yükü G'den uygulandığı için  
Hem eğilme hem burulma oluşmuş.

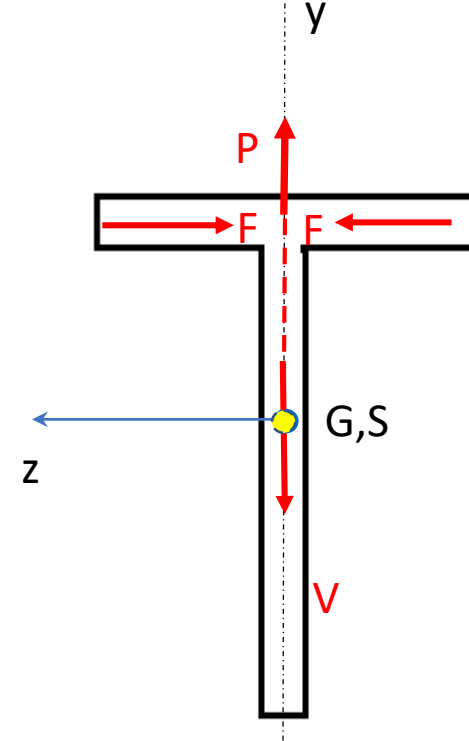


P yükü S kayma merkezinden uygulandığı için  
Sadece eğilme oluşmuş; burulma söz konusu değil.

**4.4 V doğrultusuna göre simetrik kesitlerde kayma merkezi:** Bu tip kesitlerde, kayma merkezi (S) ile ağırlık merkezi (G) noktalarının her ikisi de, V doğrultusundaki simetri eksenini (y veya z eksenini) üzerinde olmakla birlikte; aynı veya farklı konumlarda olabilir. V doğrultusu y veya z eksenlerinden birisiyle çakışmıştır. Altta örneklerde görüleceği üzere P dış kuvvetinin doğrultusu S'den geçtiği için statik denge denklemleri sağlanır ve G'ye göre moment (burulma momenti) de sıfır olacağından kirişte x etrafında dönme şekil değiştirmesi (çarpılma, bükülme) olmaz.

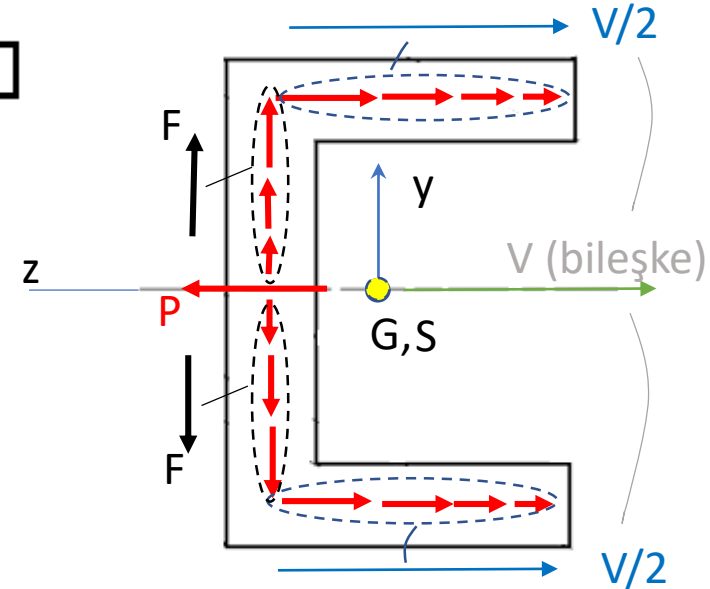


$$\begin{aligned}\Sigma F_z &= 2F - 2F = 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \rightarrow P = V \\ \Sigma M_{G_x} &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Sigma F_z &= F - F = 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \rightarrow P = V \\ \Sigma M_{G_x} &= 0\end{aligned}$$

*Bu örnekte P ve V nin yatay olduğuna ve yine V doğrultusuna göre kesitin simetrik olduğuna dikkat ediniz.*



$$\begin{aligned}\Sigma F_z &= 0 \rightarrow P = V \\ \Sigma F_y &= F - F = 0 \\ \Sigma M_{G_x} &= 0\end{aligned}$$

**Kayma akılarının kesitlerdeki akış yönlerinin neden bu şekillerde olduğunu anlamak için Mukavemet 1 – 5c konusunun incelenmesi gerekir.**

## Örnek 4.1

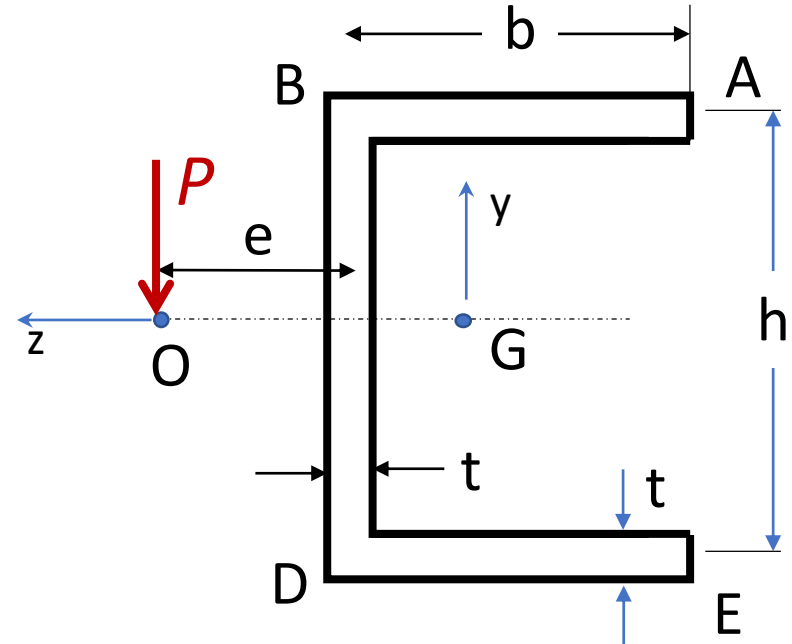
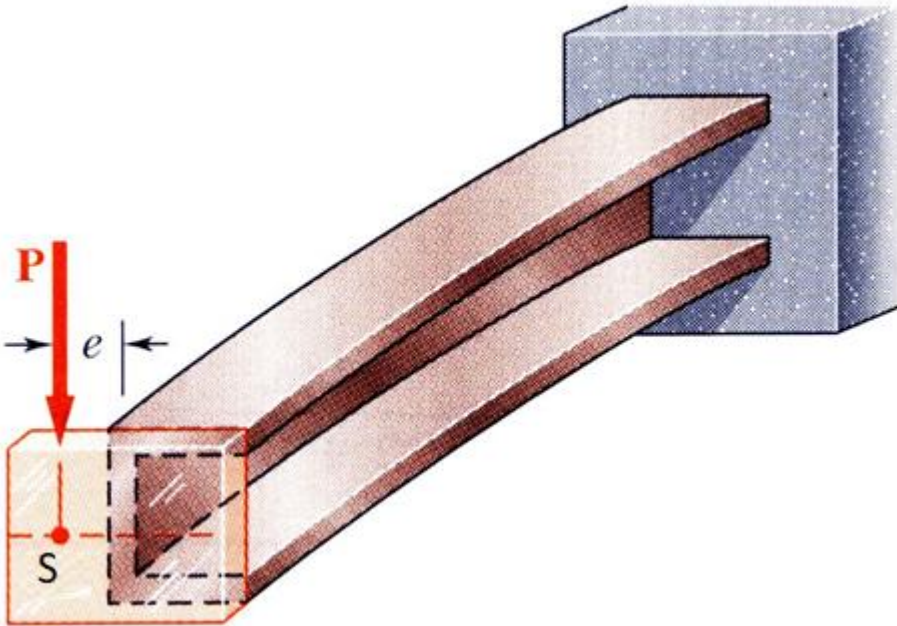
Şekildeki ince cidarlı konsol kirişin kesit boyutları  $b=100$  mm,  $h=150$  mm ve  $t=3$  mm'dir. Kirişin serbest ucuna bağlanmış levhaya  $P=20$  kN'luk düşey bir kuvvet uygulanacaktır.

Buna göre;

a-) Herhangi bir kesitteki kayma akısı dağılımını belirleyiniz.

b-)  $P$  kuvveti hangi  $e$  mesafesinden uygulanmalıdır ki, kirişte kendi eksenini ( $x$ ) etrafında herhangi bir dönme (burulma)olmasın?

c-) Kayma gerilmelerinin dağılımını çizerek maksimum kayma gerilmesinin yerini ve şiddetini bulunuz.

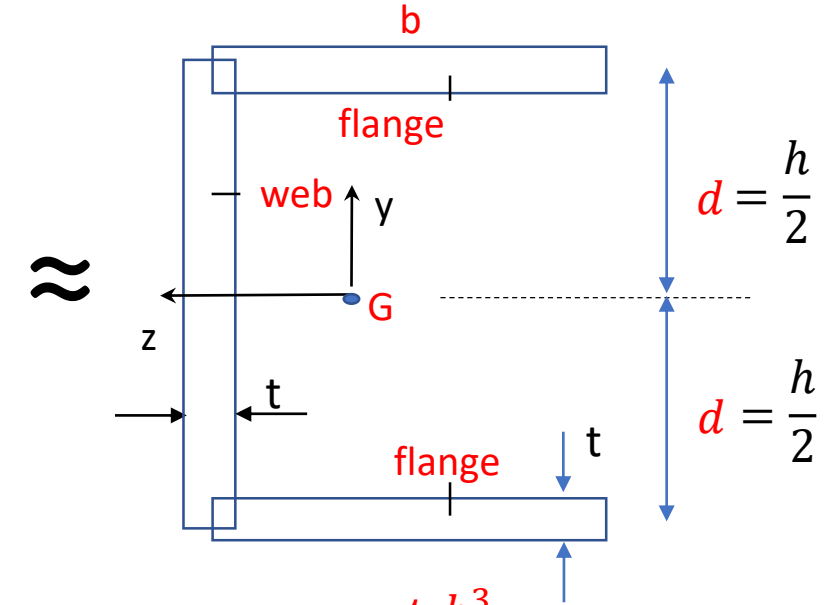
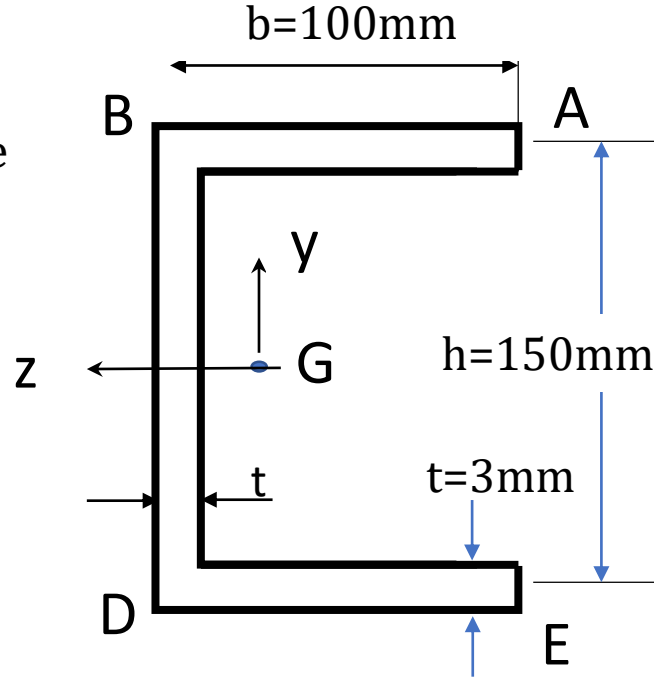


**Çözüm:**

Hesaplarımızda kullanmak üzere, öncelikle ağırlık merkezinden geçen z yatay eksenine göre atalet momentini hesaplamalıyız:

$$I_z = I_{z-web} + 2I_{z-flange}$$

$$I_z = \left[ \frac{1}{12} t h^3 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} b t^3 + b t \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

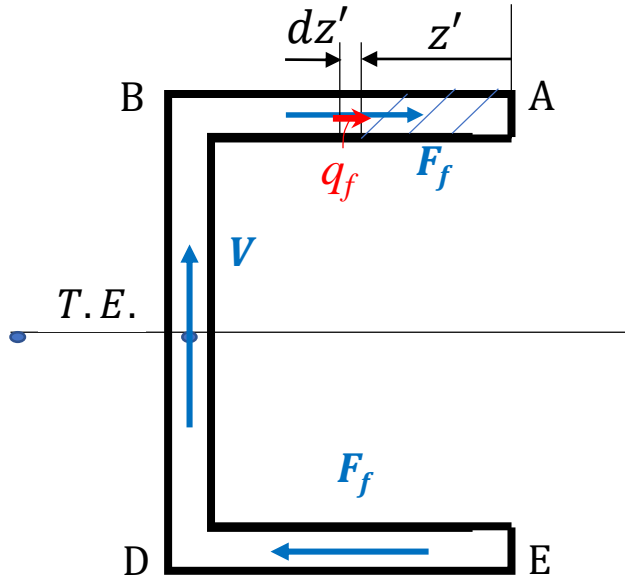
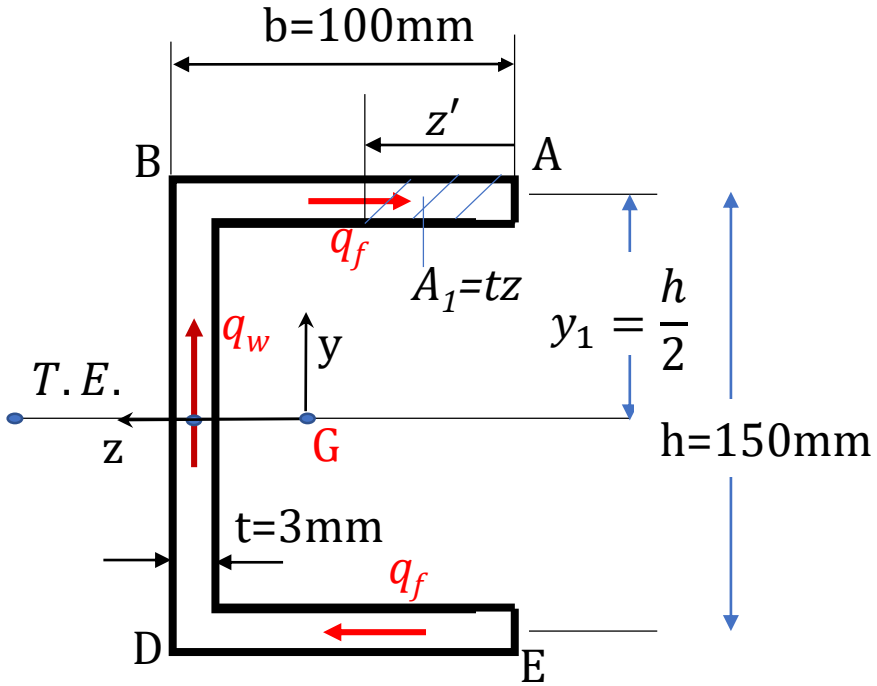


$$I_{z-web} = \frac{t \cdot h^3}{12}$$

$$I_{z-flange} = \frac{b \cdot t^3}{12} + A d^2$$

(t kalınlığından kaynaklı küçük farklar ihmal edilmiştir.)

$$I_z = \left[ \frac{1}{12} 3 \times 150^3 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} 100 \times 3^3 + (100 \times 3) \left( \frac{1}{2} 150 \right)^2 \right] \longrightarrow I_z \cong 4.22 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



**a-)** Herhangi bir kesitte:

Kesme kuvveti Statik dengeden  $V = P = 20\text{kN}$

AB ve DE flanşları için:

$$q_f = \frac{VQ_f}{I_z} \quad (\text{A dan itibaren yatay } z' \text{ uzaklığındaki bir nokta için kayma akısı})$$

A1 taralı alanının  
statik momenti :

$$Q_f = y_1 A_1 = \frac{h}{2} t z' = \frac{150}{2} 3 z' \rightarrow Q_f = 225 z'$$

$$q_f = \frac{20 \times 10^3}{4.22 \times 10^6} \times 225 z' \rightarrow q_f = 1.066 z' \quad (\text{N/mm})$$

AB ve DE flanşlarındaki toplam iç kesme kuvvetleri:

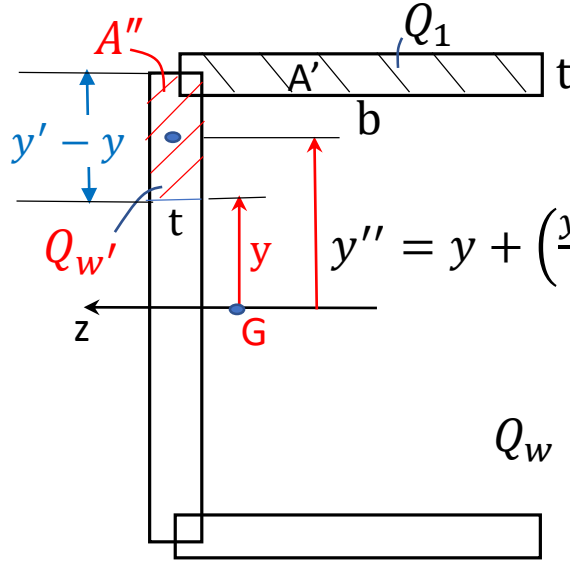
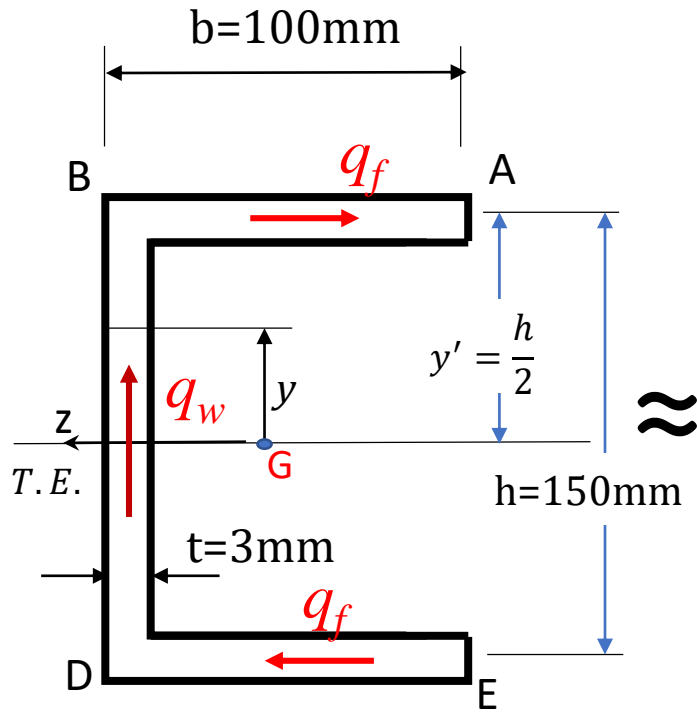
$$F_f = \int_0^b q_f dz' = \int_0^{100} 1.066 z' dz' \rightarrow F_f = \frac{1.066}{2} z'^2 \Big|_0^{100} = \frac{1.066}{2} 100^2 \rightarrow F_f = 5330 \text{ N}$$

$q_f$  : **Kayma akısı:** Birim uzunluğa düşen iç kesme kuvveti

$(q_f dz')$ :  $dz'$  dif. uzunluğuna düşen iç kesme kuvveti

BD gövdesi için

y mesafesindeki kayma akısı :  $q_w = \frac{VQ_w}{I_z}$



$Q_w = Q_{w'} + Q_1$  (toplam taralı alanın statik momenti):

$Q_w = y'A' + y''A''$  ,  $A' = bt$  ,  $A'' = t\left(\frac{h}{2} - y\right)$

$y'' = y + \left(\frac{y'-y}{2}\right) = y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) \rightarrow y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)$

$Q_w = \frac{h}{2}bt + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)t\left(\frac{h}{2} - y\right) = \left(\frac{1}{2}hbt\right) + \frac{t}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$

$Q_w = 22500 + 1.5(75^2 - y^2)$

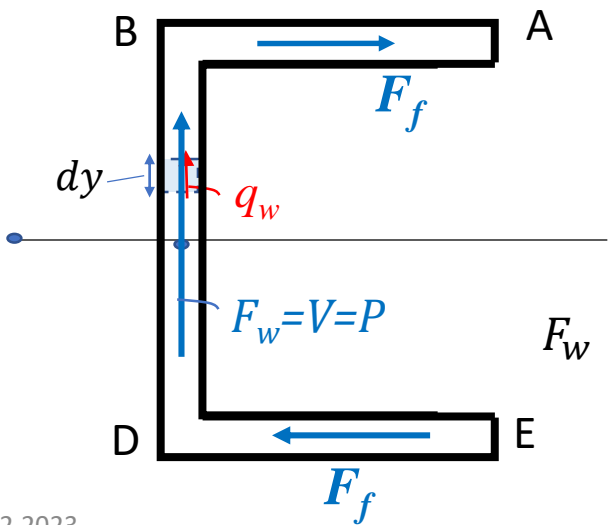
$q_w = \frac{VQ_w}{I_z} = \frac{20 \times 10^3}{4.22 \times 10^6} [22500 + 1.5(75^2 - y^2)] \rightarrow q_w = 106.6 + 0.0071(75^2 - y^2)$

BD gövdesindeki iç kesme kuvveti ( $F_w$ ):

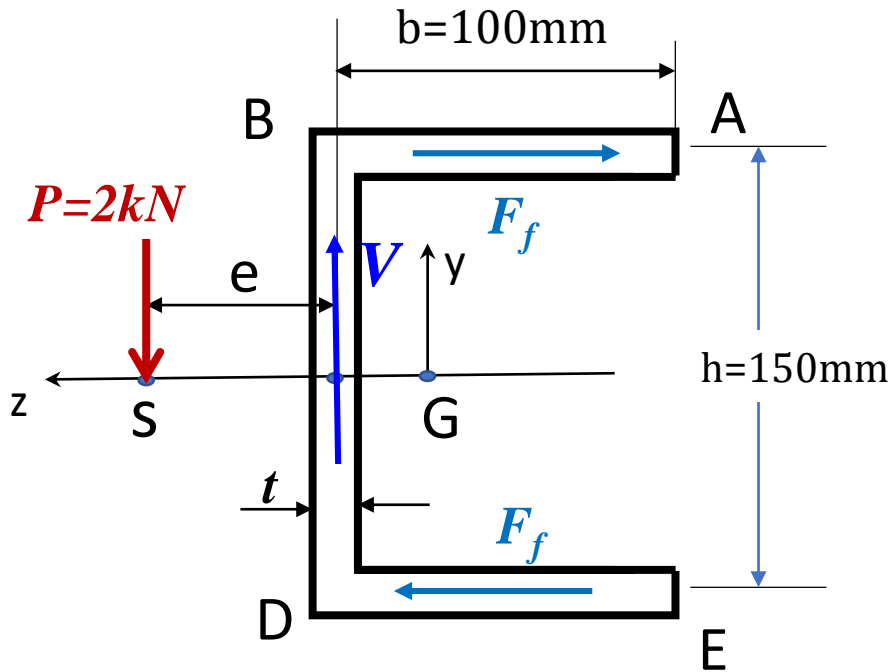
(Hesaplarımız doğru ise Statik denge sebebiyle  $F_w$  , P'ye eşit çikmalıdır.)

$F_w = \int_{-h/2}^{h/2} q_w dy = \int_{-75}^{75} [106.6 + 0.0071(75^2 - y^2)] dy \rightarrow F_w = \left(146.53 y - \frac{0.0071}{3} y^3\right) \Big|_{-75}^{75}$

$\rightarrow F_w \cong 20000N = V = 20kN = P$



- b-)** Kirişte kendi eksenini (x) etrafında herhangi bir dönme olmaması net burulma momentinin sıfır olmasıyla, bu ise P dış kuvvetinin **kayma merkezinden** uygulanmasıyla mümkündür. O halde bu şıkta bize S kayma merkezinin mesafesi ( e ) sorulmaktadır.



$$\sum F_z = 0 \rightarrow F_f - F_f = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V = P$$

$$\sum M_S = 0 \rightarrow V \cdot e - 2\left(F_f \frac{h}{2}\right) = 0 \rightarrow V \cdot e = F_f h$$

$$\rightarrow e = F_f \frac{h}{V} = 5330 \frac{150}{20000}$$

$$\rightarrow e = 39.975 \text{ mm}$$

**c-)** Kayma gerilmesi  $\tau$  (N/mm<sup>2</sup>), birim alana düşen iç kuvvet olduğundan,  $\tau$  gerilmesi birim uzunluğa düşen iç kuvvet yani  $q$  (N/mm) kayma akısının kalınlığa bölünmesine eşit olur. Flanşlarda yatay kayma gerilmeleri  $\tau_{zx}$ , gövdedeki kayma gerilmeleri ise  $\tau_{yx}$  dir.

**Üst ve alt flanşlardaki kayma gerilmesi dağılımı**  $\tau_f = \tau_{zx}$

$$\tau_f = \frac{q_f}{t} = \frac{1.066z'}{3} = 0.355z' \quad (a \text{ şikkında hesaplanmıştı})$$

$$z' = 0 \rightarrow \tau_A = \tau_E = 0$$

$$z' = 100 \text{ mm} \rightarrow \tau_B = \tau_D = 0.355 \times 100 = 35.5 \text{ MPa}$$

**Gövdedeki kayma gerilmesi dağılımı**  $\tau_w = \tau_{yx}$

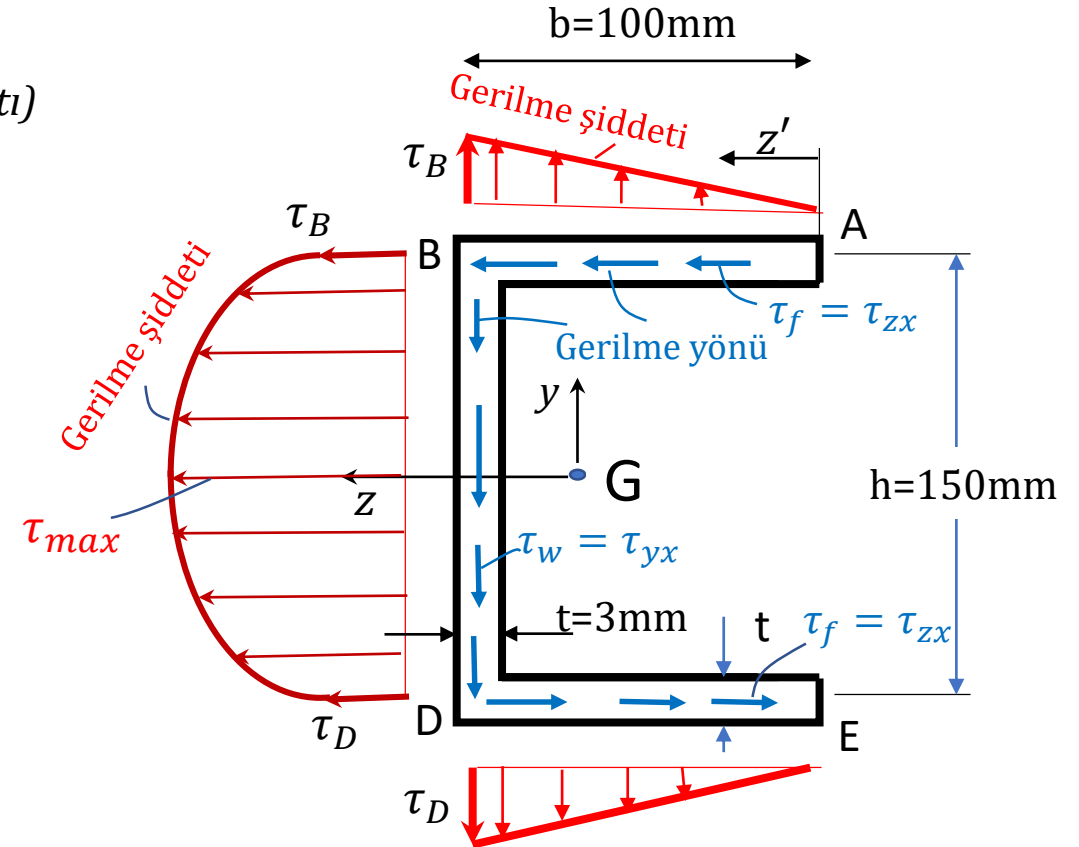
$$\tau_w = \frac{q_w}{t} = \frac{106.6 + 0.0071(75^2 - y^2)}{3}$$

$$\rightarrow \tau_w = 35.5 + 0.00237(75^2 - y^2)$$

$$y = 75 \text{ mm} \rightarrow \tau_B = 35.5 \text{ MPa}$$

$$y = -75 \text{ mm} \rightarrow \tau_D = 35.5 \text{ MPa}$$

$$y = 0 \rightarrow \tau_G = \tau_{max} = 48.83 \text{ MPa}$$



Dış kısımdaki (kırmızı) oklar gerilmelerin şiddetini ve dağılımını göstermek içindir. Gerilmelerin gerçek yönü kesit üzerindeki (mavi) okların yönüdür.



## ENERJİ METODLARI

### 5.1

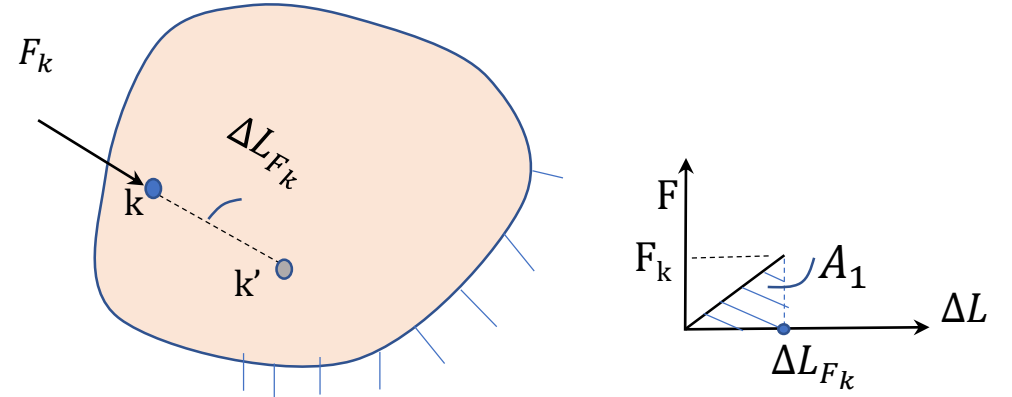
### Şekil Değiştirme

### İş ( $U_d$ ) ve Enerjisi ( $U_i$ )

### 5.1.1) Şekil Değiştirme İşi ( $U_d$ )

Dış yüklerin etkisinde ve statik dengede olan bir cisim ötelenmez ancak şekil değiştirir. Bu durumda etki eden dış yükler (kuvvetler, momentler) şekil değiştirme işi yapar.

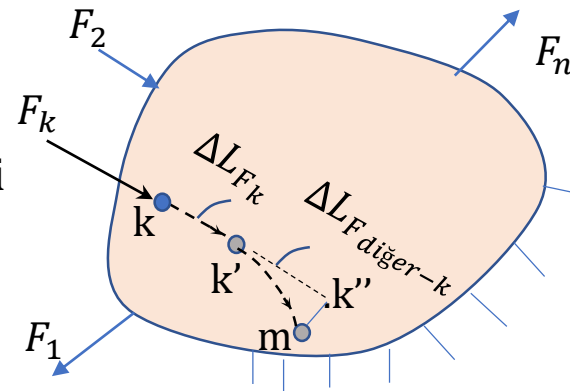
**5.1.1.a) Bir sabit kuvvetin şekil değiştirme işi:** Kuvvet ile kuvvetin uygulama noktasının, kuvvet doğrultusundaki şekil değiştirme miktarı ( $F$ - $\Delta L$ ) grafiği altındaki alandır.



$$F_k \text{ sabit kuvvetinin yaptığı şekil değiştirme işi: } U_{d-F_k} = A_1 = \frac{1}{2} F_k \cdot \Delta L_{F_k}$$

### 5.1.1.b) Birden fazla kuvvet olursa şekil değiştirme işi nasıl hesaplanır?

$k$  uygulama noktasının,  $F_k$  kuvvetinin doğrultusundaki şekil değiştirme miktarı ( $\Delta L_{F_k}$ ) diğer kuvvetlerin etkisi ile  $\Delta L_{F_{diğer-k}}$  kadar ilaveten değişecektir. Bu durumda  $F_k$  kuvvetin şekil değiştirme işini ve cisime uygulanan toplam şekil değiştirme işini nasıl hesaplarız? Bu soruların cevaplarını 2 örnek üzerinden anlamaya çalışacağız..>>



$m$ :  $k$  noktasının tüm kuvvetlerin etkisiyle geldiği son konum.  
 $k''$ :  $m$  noktasının  $F_k$  doğrultusundaki izdüşümü

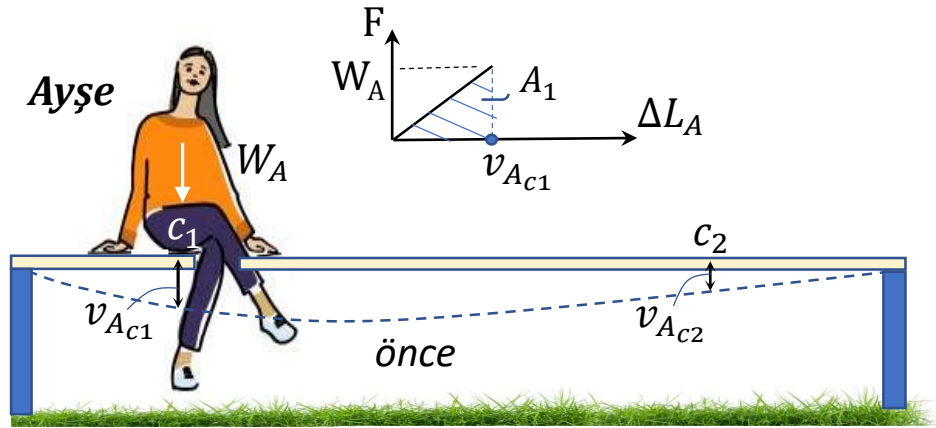
$$U_{d-F_k} = ?$$

$$U_{d-toplam} = ?$$

**Örnek-1: Aynı doğrultuda 2 kuvvet mevcut iken şekil değiştirme işi:**

Elastik bir kiriş üzerine önce Ayşe gelip  $c_1$  noktasına oturuyor. →

Ayşe oturmaya başladığı andan itibaren  $c_1$  noktasındaki kuvvet ve çökme lineer olarak artar ve oturmanın son konumunda kuvvet ve çökme maksimum değerlerine ulaşır. Bu sebeple  $F-\Delta L$  diyagramı aşağıdaki gibi oluşur. (Bu genel bir kuraldır. Bir esnek yere veya koltuğa otururken bu durumu siz de fark etmeye çalışın.)



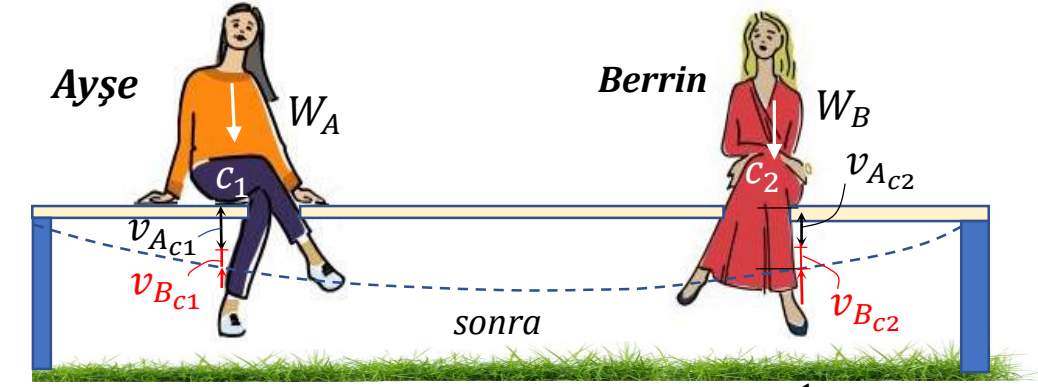
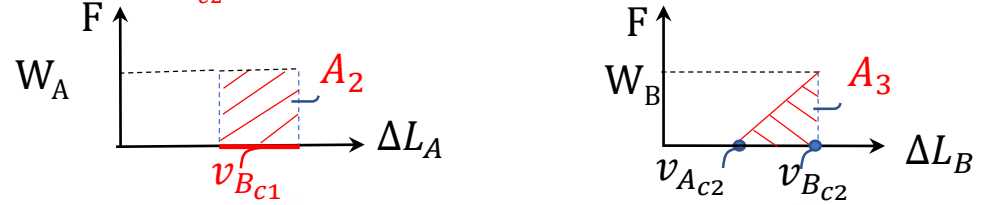
$$W_A \text{ ağırlığının yaptığı iş: } U_{d-W_A} = A_1 = \frac{1}{2} W_A \cdot v_{Ac1}$$

Ayşenin  $U_{d-W_B}$  işine katkısı: 0 dır.

(Çünkü henüz Berrin oturmamış.  
 $c_2$  de bu anda  $W_B$  kuvveti yok)

$$\text{Toplam Şekil Değiştirme İşi: } U_d = U_{d-W_A} + U_{d-W_B} + U_{d-katkı} = \frac{1}{2} W_A \cdot v_{Ac1} + \frac{1}{2} W_B \cdot v_{Bc2} + W_A \cdot v_{Bc1}$$

Daha sonra Ayşe otururken Berrin gelip  $c_2$  noktasına oturuyor. Berrinin ağırlığı ile Ayşe  $v_{Bc1}$  kadar daha öteleniyor.  $v_{Bc1}$  üzerinde  $W_A$  nin etkisi yoktur ve  $v_{Bc1}$  çökmesi sırasında  $W_A$  değişmez.  $W_B$  ağırlığı ile  $c_2$  noktası  $v_{Bc2}$  kadar daha çökecektir.

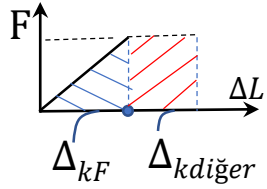
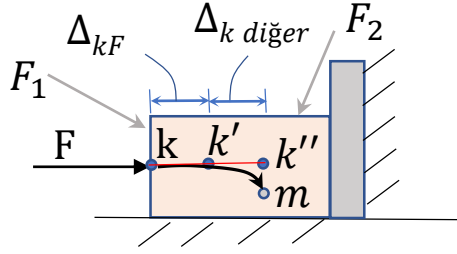


$$W_B \text{ ağırlığının yaptığı iş: } U_{d-W_B} = A_3 = \frac{1}{2} W_B \cdot v_{Bc2}$$

$$\text{Berrinin } U_{d-W_A} \text{ işine katkısı: } U_{d-katkı} = A_2 = W_A \cdot v_{Bc1}$$

(Çünkü Berrin oturduğunda, Ayşe zaten oturuyordu.  $c_1$  de  $W_A$  kuvveti mevcuttu.)

Önce Berrin sonra Ayşe otursaydı veya her ikisi aynı anda otursalardı toplam  $U_d$  değişmezdi. (Süperpozisyon yöntemi). Bu kural ileride kullanılacaktır.

**Örnek -2 : Farklı yönlerde 2 den fazla kuvvet mevcut iken şekil değiştirme işi:**

Cismin üzerine önce F, sonra F<sub>1</sub> en son F<sub>2</sub> uygulanırsa:

- Sabit bir köşeye yerleştirilmiş bir cisim düşünelim. Bu cisme önce F yatay kuvveti uygulayalım.
- F kuvveti sıfırdan itibaren doğrusal olarak artarak, cisim üzerinde  $\Delta_{kF}$  kadar şekil değiştirmeye sebep olur ve k uygulama noktasını  $k'$  konumuna getirir.
- Daha sonra süperpozisyon yöntemine göre F kuvveti cismin üzerinde iken sırasıyla F<sub>1</sub> ve F<sub>2</sub> gibi diğ er kuvvetleri cisme uyguluyoruz ve bu durumda k noktası  $k'$  den m gibi bir noktaya gelecektir. (Ancak Örnek-1 de izah edildiğ i gibi, bu ikinci şekil değiştirmede F'in etkisi artık yoktur.)
- $k''$  : F doğrultusundaki m noktasının izdüşümüdür. m den kuvvet doğrultusuna dik inilerek bulunur.
- $\Delta_{kF} = kk'$  : F kuvveti sebebiyle k nın F doğrultusunda şekil değiştirme miktarı
- $\Delta_{k diğ er} = k'k''$  :Diğ er kuvvetler sebebiyle k nın F doğrultusunda ilaveten şekil değiştirme miktarı

$$F \text{ kuvvetinin şekil değiştirme işi: } U_{d-F} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{kF} + F \cdot \Delta_{k diğ er} \quad (F_1 \text{ ve } F_2 \text{ nin katkısı}) \quad (5.1a)$$

$$F_1 \text{ kuvvetinin şekil değiştirme işi: } U_{d-F_1} = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{kF_1} + F_1 \cdot \Delta_{k diğ er} - F_2 \quad (F_2 \text{ nin katkısı}) \quad (5.1b)$$

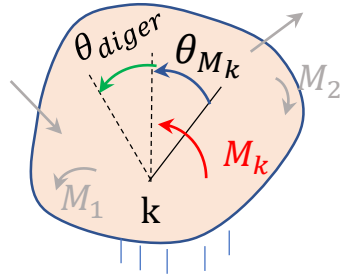
$$F_2 \text{ kuvvetinin şekil değiştirme işi: } U_{d-F_2} = \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_{kF_2} + 0 \quad (F \text{ ve } F_2 \text{ nin katkısı}) \quad (5.1c)$$

$$\text{Toplam Şekil Değişirme İş i: } U_d = U_{d-F} + U_{d-F_1} + U_{d-F_2} + \dots + U_{d-F_n} \quad (n \text{ tane kuvvet olsaydı:}) \quad (5.1d)$$

**5.1.2 Dış Momentlerin İş i:**

$\theta_{M_k}$ :  $M_k$  momenti sebebiyle oluşan açı

$\theta_{diğ er}$ : Diğ er yükler sebebiyle oluşan açı



5.1a denklemine benzer şekilde önce  $M_k$  (basit) eğilme momenti daha sonra diğ er yükleri uygularsak  $M_k$  nin şekil değiştirme iş i:

$$U_{d-M_k} = \frac{1}{2} M_k \theta_k + M_k \theta_{diğ er} \quad (5.2a)$$

$$\text{Dairesel Kesitler İç in Dış Burulma Momentinin İş i: } U_{d-T_k} = \frac{1}{2} T_k \phi_k + T_k \phi_{diğ er} \quad (5.2b)$$

### 5.1.3 Şekil Değiştirme Enerjisi ( $U_i$ ) Hesabı:

**Püf Noktası 5a:** Toplam Şekil Değiştirme İşi ( $U_d$ ), Cisimde Şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ) olarak depolanır.  $\rightarrow U_d = U_i$  (5.3)

Şekil Değiştirme Enerjisi ( $U_i$ ) aşağıdaki 2 yöntemle hesaplanabilir:

- 1- Birim hacimdeki Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu ( $a_i$ ) kullanılarak veya
- 2- İç kuvvet ve iç momentlerden hesaplanabilir.

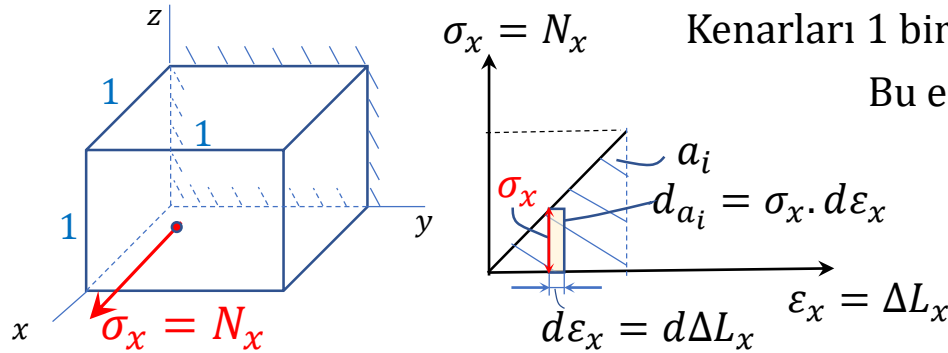
Şimdi bu 2 yöntemi tek tek inceleyeceğiz:



Bir elastik topu sıkarsak, sıkma kuvvetlerinin toplam şekil değiştirme işi ( $U_d$ ), topta şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ) olarak depolanır ve sıkma pozisyonunda kaldıkça bu enerji topun üzerinde kalmaya devam eder.

#### 5.1.3.a- Şekil Değiştirme Enerjisi yoğunluğu ( $a_i$ ) ile Toplam Şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ) nin hesabı

Birim hacimde depolanan (absorbe edilen) şekil değiştirme enerjisine **Şekil Değiştirme Enerjisi Yoğunluğu** denir ve  $a_i$  ile gösterilir.



Kenarları 1 birim (1 birim hacimde) ve arka yüzeyinden ankastre olan küp eleman düşünüyoruz.

Bu elemanda sadece  $\sigma_x$  normal gerilmesi olduğunu kabul edelim.

$a_i$  :  $\sigma_x - \epsilon_x$  eğrisi altında kalan taralı üçgen alandır:

$$a_i = \int d a_i = \int \sigma_x \cdot d \epsilon_x = \int E \epsilon_x d \epsilon_x \quad \rightarrow a_i = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 \quad (5.4a)$$

$$\text{veya} \quad a_i = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \quad (5.4b)$$

Tek eksenli yüklemde Hooke bağıntısından:  $\sigma_x = E \epsilon_x$

veya  $N_x$  sabit kuvvetinin şekil değiştirme işinden de  $a_i$  aşağıdaki gibi bulunabilir

x yönündeki iç normal kuvvet:

$$N_x = \sigma_x \cdot A = \sigma_x \cdot (1)(1) \rightarrow N_x = \sigma_x$$

x yönündeki birim uzama (gerinme):

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L_x}{1}$$

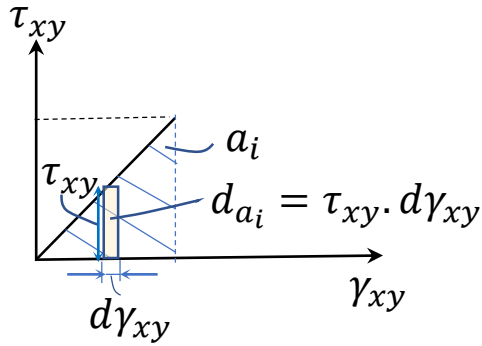
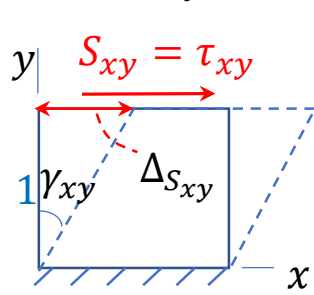
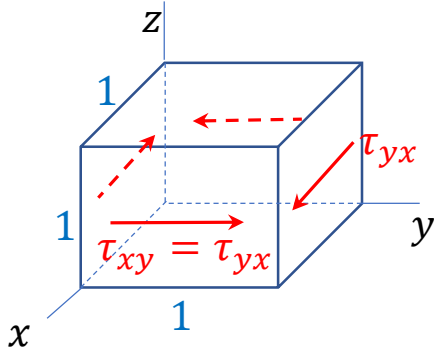
$$\rightarrow \epsilon_x = \Delta L_x$$

(5.1a denkleminde)

$$U_{d-N_x} = \frac{1}{2} N_x \cdot \Delta N_x = \frac{1}{2} N_x \cdot \Delta L_x = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \epsilon_x = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 = U_i = a_i$$

$N_x$  den başka dış kuvvet olmadığı için 5.1a denklemindeki  $\Delta_k$  diğer =0 olur.

Benzer hesaplamalarla

Birim kübik elemanda sadece  $\sigma_y$  olsaydı :  $\rightarrow a_i = \frac{1}{2} E \varepsilon_y^2$  (5.5a)veya  $a_i = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y$  (5.5b)Birim kübik elemanda sadece  $\sigma_z$  olsaydı :  $\rightarrow a_i = \frac{1}{2} E \varepsilon_z^2$  (5.6a)veya  $a_i = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z$  (5.6b)Birim kübik elemanda **sadece**  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesi olduğunu düşünürsek;Şekil değiştirme Enerjisi yoğunluğu ( $a_i$ ) eğri altındaki alandır.

$$a_i = \int d a_i = \int \tau_{xy} \cdot d \gamma_{xy} = \int G \gamma_{xy} \cdot d \gamma_{xy}$$

Hooke bağıntısı:  $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$ 

$$\rightarrow a_i = \frac{1}{2} G (\gamma_{xy})^2$$
 (5.7a)

$$\text{veya } a_i = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$
 (5.7b)

Veya sabit  $S_{xy}$  kesme kuvvetinin şekil değiştirme işinden aynı sonuç elde edilebilir.

$$\text{Kesme kuvveti: } S_{xy} = \tau_{xy} \cdot (1 \times 1) = \tau_{xy}$$

$$\text{Şekil değiştirme uzaması: } \Delta S_{xy} = \gamma_{xy} \cdot 1 = \gamma_{xy}$$

(5.1a denkleminden)

$$U_{d-S_{xy}} = \frac{1}{2} S_{xy} \cdot \Delta S_{xy} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = U_i = \int a_i \cdot dV = a_i \int dV = a_i \cdot V = a_i$$

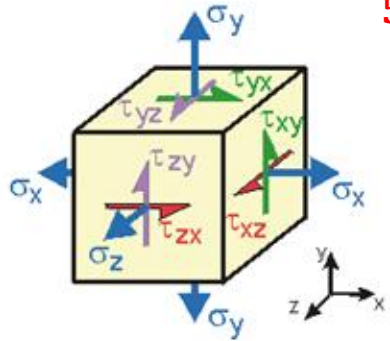
 $S_{xy}$  den başka dış kuvvet olmadığı için 5.1a denklemindeki  $\Delta_k$  değer = 0 olur.

Benzer hesaplamalarla

Birim kübik elemanda sadece  $\tau_{yz}$  olsaydı :  $\rightarrow a_i = \frac{1}{2} G (\gamma_{yz})^2$  (5.8a)veya  $a_i = \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz}$  (5.8b)Birim kübik elemanda sadece  $\tau_{xz}$  olsaydı :  $\rightarrow a_i = \frac{1}{2} G (\gamma_{xz})^2$  (5.9a)veya  $a_i = \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz}$  (5.9b)

**Hatırlatma:** Genel Hooke Bağlıları (elastik bölgede gerilme şekil değiştirme bağıntıları)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (5.10)$$



#### 5.1.4 Genel Yükleme Durumunda şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu ( $a_i$ ) için alternatif denklemler:

Birim hacimde tüm gerilme bileşenleri ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ) varken toplam  $a_i$  değeri: her birisinin ayrı ayrı olması durumlarındaki  $a_i$  değerlerinin toplamına eşittir (süperpozisyon ilkesi)

(5.4b,...5.9b)  
denklemlerinden;

Kartezyen gerilme ve şekil değiştirme bileşenler cinsinden şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu:

$$\Rightarrow a_i = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (5.11)$$

Genel Hooke bağıntılarını 5.11 denkleminde yerine koyarsak:

Kartezyen gerilme bileşenleri cinsinden şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu

$$\Rightarrow a_i = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2] \quad (5.12a)$$

Genel Hooke bağıntılarından gerilmeleri çekip 5.12 denkleminde yerine koyarsak:

Kartezyen şekil değiştirme bileşenleri cinsinden şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu

$$\Rightarrow a_i = G \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 \right] + \frac{1}{2G} [\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2] \quad (5.12b)$$

5.12 denklemini 1-2-3 asal eksenlerinde yazarsak:

(asal eksenlerde kayma gerilmeleri sıfırdır)

Asal Gerilmeler Cinsinden şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu

$$\Rightarrow a_i = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] \quad (5.13a)$$

5.13 denklemini 1-2-3 asal eksenlerinde yazarsak:

(asal eksenlerde kayma şekil değiştirmeleri sıfırdır)

Asal Şekil Değiştirmeler Cinsinden şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu

$$\Rightarrow a_i = G \left[ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right] \quad (5.13b)$$

**Soru:** (5.4a-5.9a) denklemlerine süperpozisyon yöntemi uygulanamaz ve üst üste toplanamaz. Bunun nedenini sizce nedir?

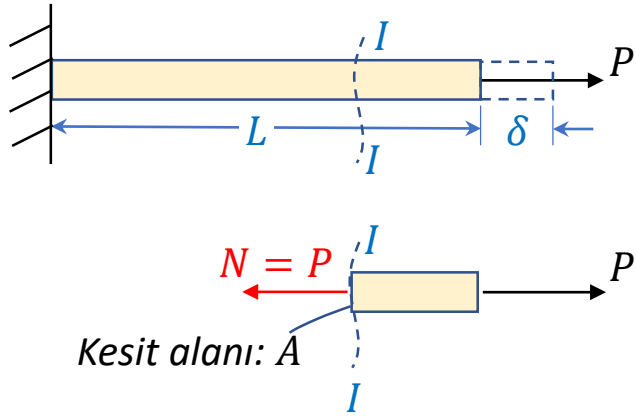
Toplam şekil değiştirme enerjisi:  $U_i = \int a_i \cdot dV \quad (5.14)$

## 5.1.5 Kesit Tesirleri (İç kuvvet ve iç momentler) sebebiyle oluşan toplam şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ) hesabı :

Şimdi şekil değiştirme enerjisini cismin içinde oluşan iç kuvvet ve iç moment cinslerinden (kesit tesirlerinden) elde edeceğiz

### 5.1.5.a-) İç Normal Kuvvet (N) sebebiyle oluşan Şekil değiştirme Enerjisi: ( $U_N$ )

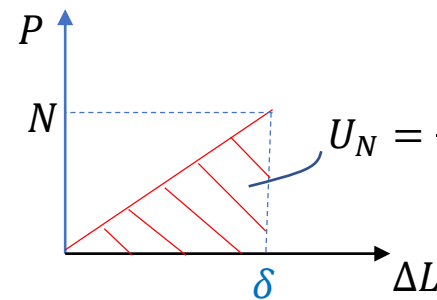
P çeki kuvvetine maruz çubukta kesitte N normal iç kuvveti oluşur.



5.1 denklemi :  $U_{d-F} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{kF} + F \cdot \Delta_k \text{ diğ}er$  ;  $\Delta_{kF} = \delta = \frac{PL}{AE} = \frac{NL}{AE}$  ;  $\Delta_k \text{ diğ}er = 0$

Bu yükleme tipi için :  $U_N = \frac{1}{2} N \cdot \delta + N \cdot 0$

(Muk-1 D.3.3a denklemi) (başka kuvvet olmadığından)



$$U_N = \frac{1}{2} N \delta \rightarrow U_N = \frac{1}{2} N \cdot \frac{NL}{AE} \rightarrow L \text{ uzunluğundaki tek çubuk için: } \rightarrow U_N = \frac{N^2 L}{2AE} \quad (5.15a)$$

Kademeli çubuklarda L uzunluğundaki parça için:  $\rightarrow U_N = \int_0^L \frac{N^2}{2EI_z} dx \quad (5.15b)$

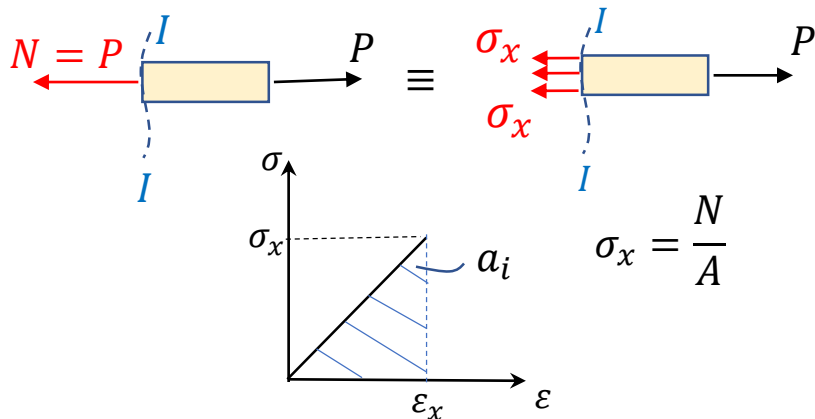
veya şekil değiştirme enerjisi yoğunlundan

5.4b denkleminden :  $a_i = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \left( \frac{\sigma_x}{E} \right) = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{(N/A)^2}{2E} = \frac{N^2}{2A^2 E}$

$$U_N = \int a_i \cdot dV = \frac{N^2}{2A^2 E} \int dV = \frac{N^2 AL}{2A^2 E} \rightarrow U_N = \frac{N^2 L}{2AE}$$

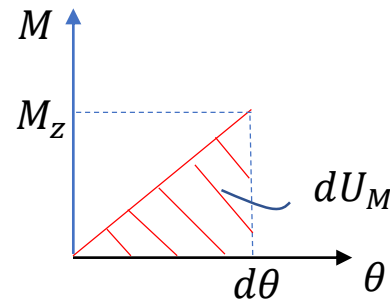
Aynı sonucu bulduk.

Toplam hacim:  $V = AL$



### 5.1.5.b-) Basit Eğilme İç Momenti ( $M_z$ ) sebebiyle oluşan Şekil Değişirme Enerjisi ( $U_M$ )

Basit Eğilmeye maruz bir kirişten çıkarılan  $ds$  uzunluğundaki diferansiyel parçanın yüzeylerinde ortaya çıkan  $M_z$  iç momentleri  $d\theta$  kadar bir konveksliğe sebep olur.



Bu  $ds$  parçasındaki diferansiyel şekil değişirme işi ve dolayısıyla dif. şekil değişirme enerjisi ( $dU_M$ ), eğri altında kalan alandır:

$$dU_M = \frac{1}{2} M_z d\theta$$

Geometriden, küçük şekil değiştirmeler için:

(3.1) denklemi:  $\frac{1}{r} = \frac{M_z}{EI_z}$ ,  $rd\theta = ds \cong dx \rightarrow d\theta = \frac{1}{r} dx \rightarrow d\theta = \frac{M_z}{EI_z} dx$

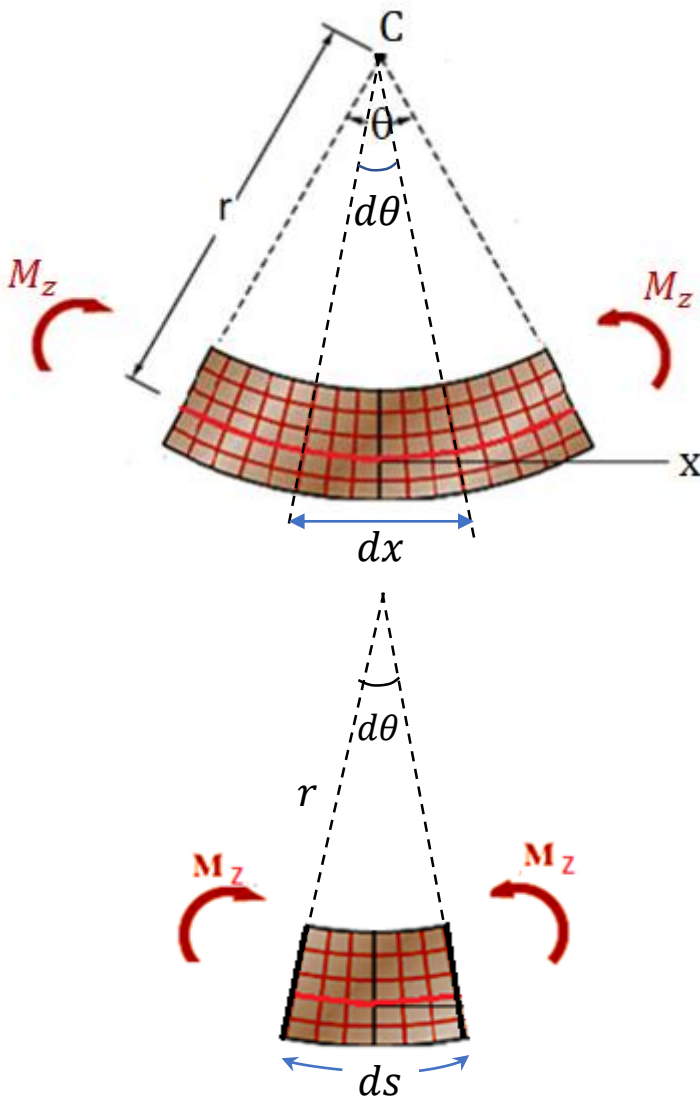
$\rightarrow dU_M = \frac{1}{2} M_z \frac{M_z}{EI_z} dx = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx$ ,  $U_M = \int dU_M \rightarrow$   *$M_z$  eğilme iç momentii sebebiyle kirişteki şekil değişirme enerjisi:*  $U_M = \int \frac{M_z^2}{2EI_z} dx$  (5.16)

Veya enerji yoğunluğundan şu şekilde buluruz:

Normal gerilme:  $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$ , 5.4b denkleminde:  $a_i = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \left(\frac{\sigma_x}{E}\right) = \frac{\sigma_x^2}{2E}$

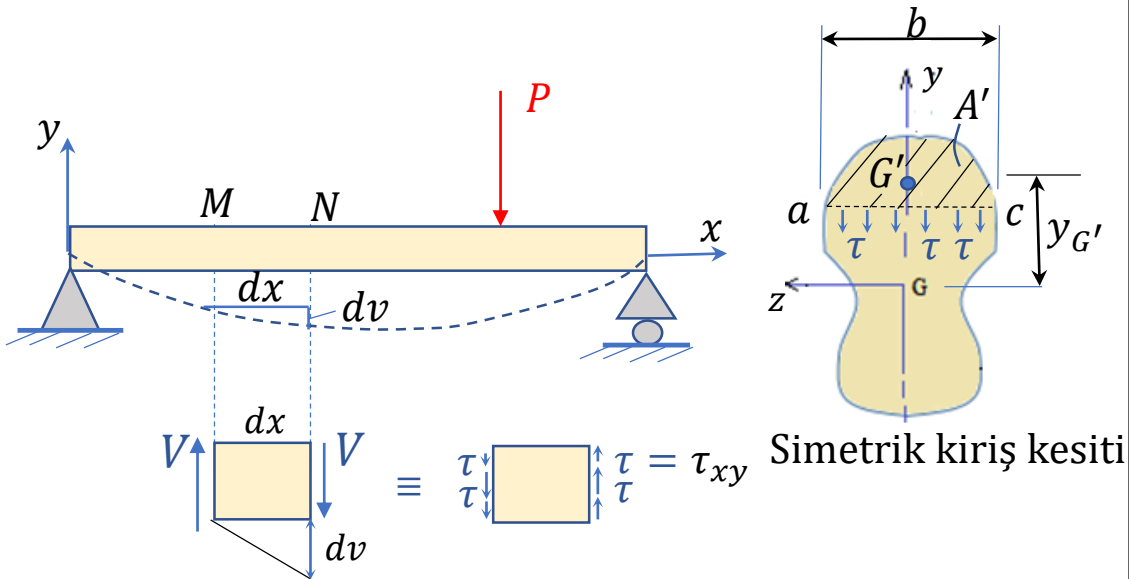
$$U_M = \int a_i dV = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \frac{1}{2E} \int_0^L \left[ \frac{M_z^2}{I_z^2} \int y^2 dA \right] dx \rightarrow U_M = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx$$

$(dV = dA \cdot dx)$   $I_z$  Aynı sonucu elde ettik



### 5.1.5.c-) Kesmeli Basit Eğilmedeki İç Kesme Kuvveti (V) sebebiyle oluşan Şekil Değişirme Enerjisi: $U_v$

Kesmeli basit eğilmeye maruz bir kirişin  $dx$  uzunluğundaki iç kesme kuvvetinden kaynaklı şekil değiştirme işi ve dolayısıyla şekil değiştirme enerjisini bulmak istiyoruz. (Aslında kesitte eğilme momentleri ve normal gerilmeler de vardır ancak sadece kesme kuvvetinin etkisini incelediğimiz için bunları şekilde göstermedik.)



Simetrik kiriş kesiti

$a - c$  çizgisi üzerindeki tüm noktalardaki kayma gerilmesi:  $\tau = \frac{V \cdot Q}{I_z b}$

$Q = A' \cdot y_{G'}$  ( $A'$  alanının statik momenti)

$I_z$ : tüm kesitin z eksenine göre atalet momenti

$b$ :  $A'$  alanının genişliği,  $G'$ :  $A'$  alanın ağırlık merkezi

$\tau$  gerilmesinden kaynaklı şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu (5.7b) denkleminde :

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \\ \tau_{xy} &= \tau = G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} a_i = \frac{\tau^2}{2G}$$

$V$ : kesme kuvvetinde kaynaklı

şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu:

$$a_i = a_v = \frac{1}{2G} \left( \frac{V \cdot Q}{I_z b} \right)^2$$

$V$ : kesme kuvvetinde kaynaklı

toplam şekil değiştirme enerjisi :

$$U_V = \int a_v dV = \frac{1}{2G} \int \left( \frac{V \cdot Q}{I_z b} \right)^2 (A dx) \frac{A}{A}$$

$$U_V = \frac{1}{2GA} \left( \frac{A \cdot Q}{I_z b} \right)^2 \int_0^L V^2 dx$$

$$\rightarrow U_V = \int_0^L f_s \frac{V^2}{2GA} dx \quad (5.17)$$

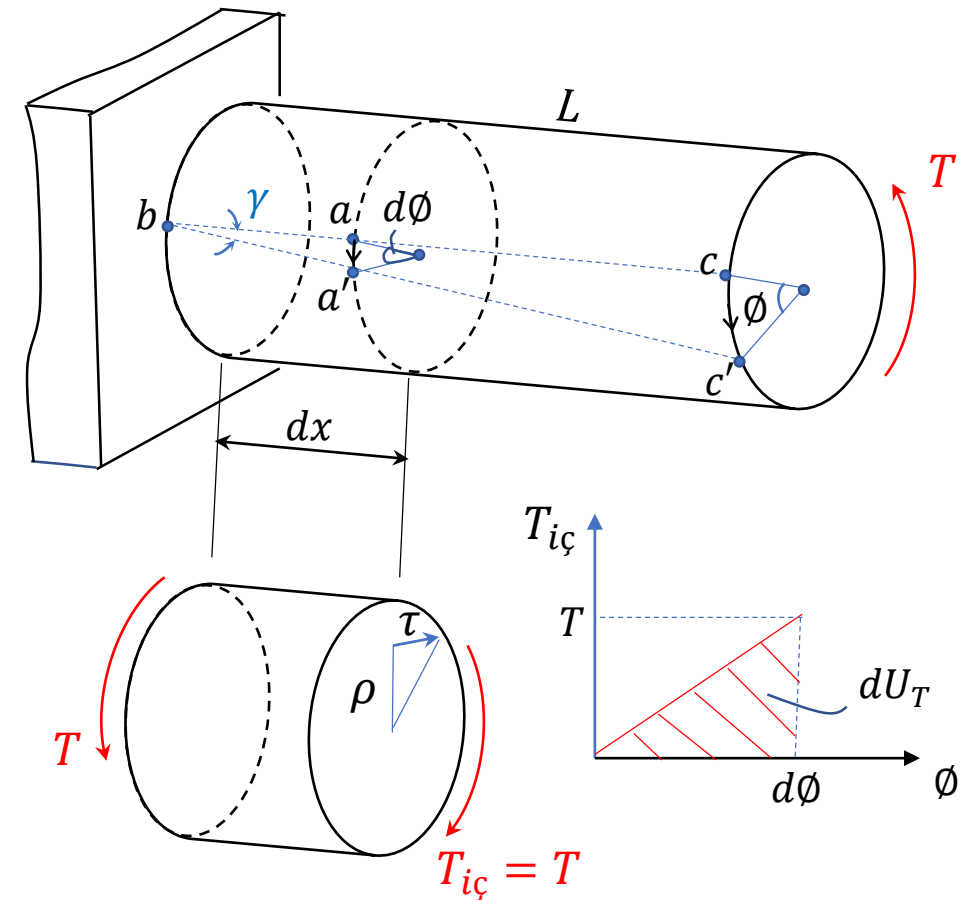
$f_s$ : Kesit faktörü

Tablo – 5.1

Beam cross section	$f_s$
Thin rectangle <sup>a</sup>	1.20
Solid circular <sup>b</sup>	1.33
Thin-wall circular <sup>b</sup>	2.00
I-section, channel, box-section <sup>c</sup>	1.00

### 5.1.5.d-) -Dairesel Kesitler için İç Burulma Momenti (T) sebebiyle oluşan Şekil Değişirme Enerjisi: $U_T$

Ankastre bir mile uygulanan T burulma momenti sonucunda herhangi bir kesitte  $T_{iç} = T$  burulma iç momenti oluşacaktır.



Burulmada oluşan kayma gerilmesi dağılımı:

$$\tau = \frac{T}{J} \rho \quad (\text{Muk-1, Denklem: 4.6})$$

$$J = \frac{1}{2} \pi r^4 \quad (\text{Polar atalet momenti})$$

T burulma momenti etkisiyle oluşan burulma açısı:

$$\Phi = \frac{TL}{JG} \quad (\text{Muk-1, Denklem: 4.5})$$

dx uzunluğundaki kısım için burulma açısı:

$$d\Phi = \frac{T dx}{JG}$$

dx uzunluğundaki kısımda  $T_{iç}$  momentinden kaynaklanan dif. Şekil Değişirme işi ve enerjisi:

$$dU_T = \frac{1}{2} T d\Phi \quad (\text{Eğri altındaki alan}) \quad (5.18a)$$

$$\rightarrow dU_T = \frac{T^2}{2GJ} dx \rightarrow \text{Toplam Şekil Değişirme Enerjisi: } U_T = \int dU_T \rightarrow U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (5.18b)$$

Dairesel kesitler için geçerlidir.

veya Enerji yoğunlundan şu şekilde bulunur:

5.7b denkleminde şekil Değişirme enerjisi yoğunluğu:  $a_i = \frac{\tau^2}{2G} = a_T$

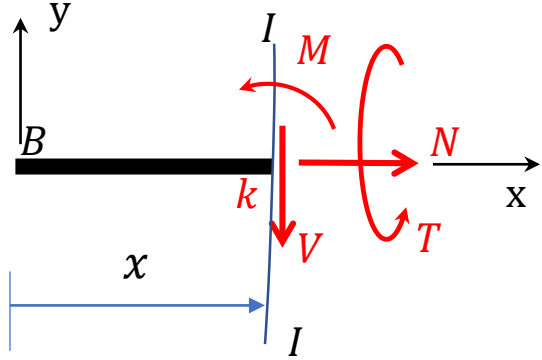
Toplam Şekil Değişirme Enerjisi:  $U_T = \int a_T dV = \frac{1}{2G} \int_0^L \left[ \int_A \tau^2 dA \right] dx$

$$\rightarrow U_T = \frac{1}{2G} \int_0^L \left[ \frac{T^2}{J^2} \int \rho^2 dA \right] dx \rightarrow U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

Aynı sonucu elde ettik

Tüm kesit tesirli aynı anda varken, Toplam Şekil Değişirme Enerjisi ( $U_i$ ):

a-) Doğrusal Eksenli Çubuklarda



$$U_i = U_N + U_V + U_M + U_T \quad (5.19)$$

$$U_i = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{AE} dx}_{N \text{ Çeki/bası}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L f_s \frac{V^2}{GA} dx}_{\text{kesmeli basit}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx}_{\text{Basit eğilmede}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx}_{\text{Dairesel kesitli}} \quad (5.20a)$$

N Çeki/bası  
kuvvetleri için

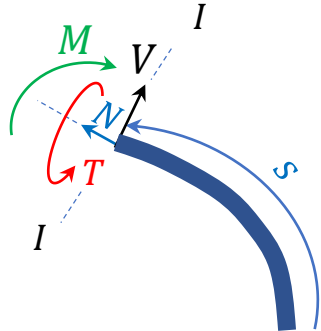
kesmeli basit  
eğilmede V  
kesme  
kuvveti için

Basit eğilmede  
M eğilme  
momenti için

Dairesel kesitli  
elemanlarda T  
burulma momenti için

b-) Eğrisel Eksenli Çubuklarda:

Herhangi bir kesitin konumu s yörüngesel koordinata göre ifade edildiğinden 5.20a denklemi şu şekle dönüşecektir:



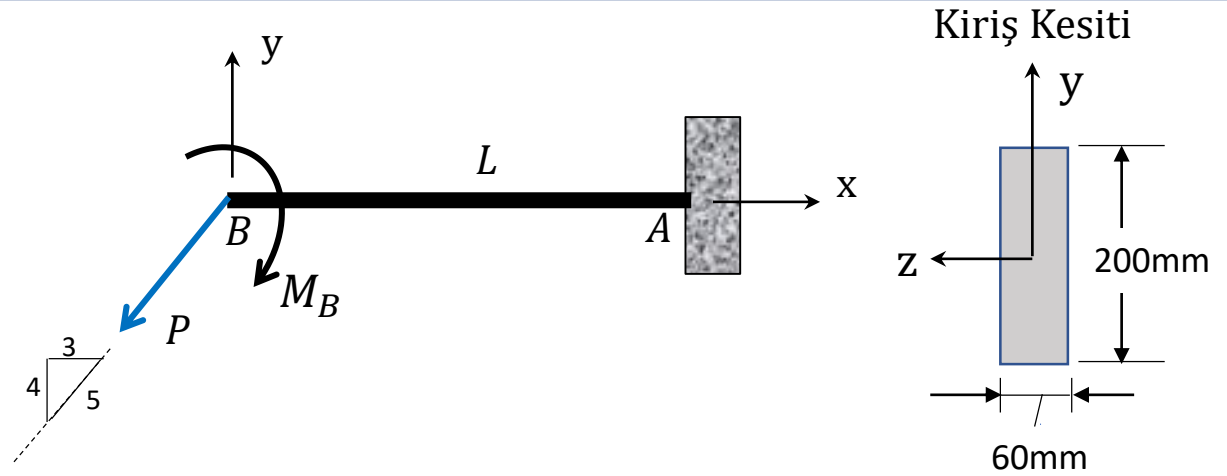
$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{AE} ds + \frac{1}{2} \int_0^L f_s \frac{V^2}{GA} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} ds \quad (5.20b)$$

(5.20) denklemleri izotropik malzemeler için ve elastik yükleme bölgesinde geçerlidir.

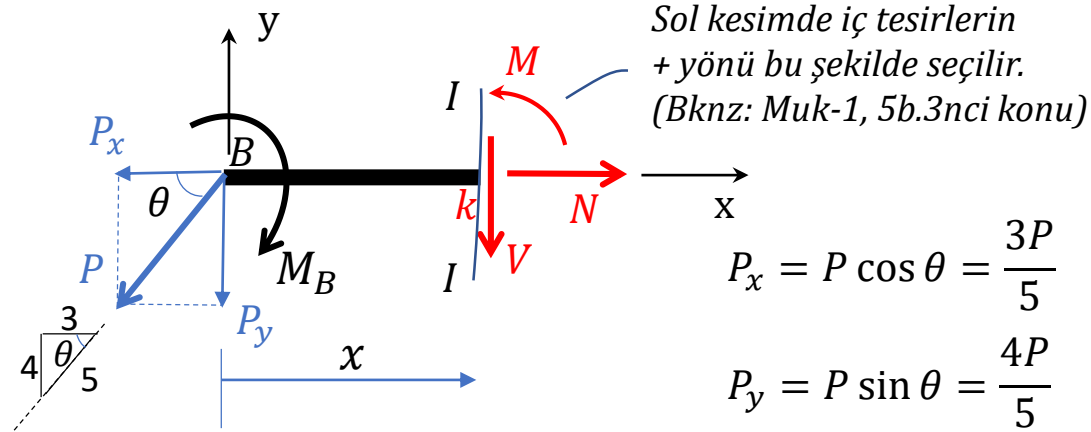
**Örnek 5.1.1**

Serbest ucuna x-y düzleminden eğik P kuvveti ve  $M_B$  eğilme momenti uygulanmış konsol kirişteki toplam şekil değiştirme enerjisini hesaplayınız.

( $P=2\text{kN}$ ,  $M_B=2\text{kNmm}$ ,  $L=2\text{m}$ ,  $E=150\text{GPa}$ ,  $\nu=0.25$ )



**Çözüm:** Öncelikle herhangi bir kesitteki kesit tesirlerini (iç kuvvet ve iç momentleri) tespit etmeliyiz.



$$P_x = P \cos \theta = \frac{3P}{5}$$

$$P_y = P \sin \theta = \frac{4P}{5}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N = P_x = \frac{3P}{5}, \quad \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = -P_y = -\frac{4P}{5}$$

$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow -M_B + P_y \cdot x + M = 0 \rightarrow M = M_B - \frac{4}{5}Px$$

N çeki kuvvetinden kaynaklı şekil değiştirme enerjisi:

(5.15b) denkleminde:

$$U_N = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{AE} dx = \frac{1}{2AE} \int_0^L \left(\frac{3}{5}P\right)^2 dx = \frac{9}{50} P^2 \int_0^L dx \rightarrow U_N = \frac{9P^2L}{50AE}$$

V kesme kuvvetinden kaynaklı şekil değiştirme enerjisi:

(5.17) denkleminde:

$$U_V = \frac{1}{2} \int_0^L f_s \frac{V^2}{GA} dx = \frac{1}{2GA} (1.2) \int_0^L \left(-\frac{4}{5}P\right)^2 dx = \frac{19.2P^2}{50GA} x \Big|_0^L$$

Kesit faktörü  $f_s=1.2$

Tablo 5.1 den ince dikdörtgen kesit (thin tectangule) içindir.

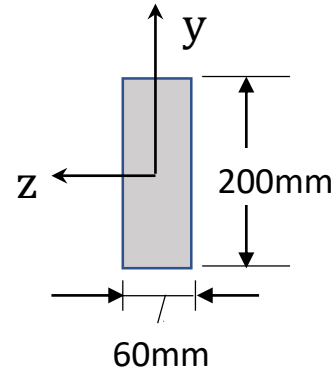
$$\rightarrow U_V = \frac{19.2P^2L}{50GA}$$

Eğilme Momentinden kaynaklı şekil değişirme enerjisi  
(5.16) denkleminde:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left( M_B - \frac{4}{5} Px \right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left[ M_B^2 + \frac{16}{25} P^2 x^2 - \frac{8}{5} PM_B x \right] dx$$

$$U_M = \frac{1}{2EI} \left( \int_0^L M_B^2 dx + \int_0^L \frac{16}{25} P^2 x^2 dx - \frac{8}{5} \int_0^L PM_B x dx \right) = \frac{1}{2EI} \left( M_B^2 L + \frac{16}{25} P^2 \frac{L^3}{3} - \frac{8}{5} PM_B \frac{L^2}{2} \right) \rightarrow U_M = \frac{L}{2EI} \left( M_B^2 + \frac{16}{75} P^2 L^2 - \frac{4}{5} PM_B L \right)$$

Sayısal değerler:



$$I_Z = \frac{60 \times 200^3}{12} = 40 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = 200 \times 60 \text{ mm}^2$$

$$P = 2 \times 10^3 \text{ N}$$

$$M_B = 2 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$$L = 2 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$E = 150 \times 10^3 \text{ MPa}, \nu = 0.25$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 60 \times 10^3 \text{ MPa}$$

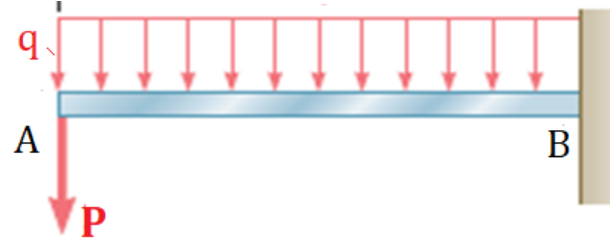
Toplam şekil değişirme enerjisi:

5.19 denkleminde:  $U_i = U_N + U_V + U_M$

$$U_i = \frac{9P^2L}{50AE} + \frac{19.2P^2L}{50GA} + \frac{L}{2EI} \left( M_B^2 + \frac{16}{75} P^2 L^2 - \frac{4}{5} PM_B L \right)$$

Tüm değerler üstteki eşitlikte yerine koyulduğunda:

$$U_i = 572.33 \text{ Nmm} \quad \text{bulunur.}$$



## ENERJİ METODLARI

# 5.2.a Castigliano Teoremleri-1

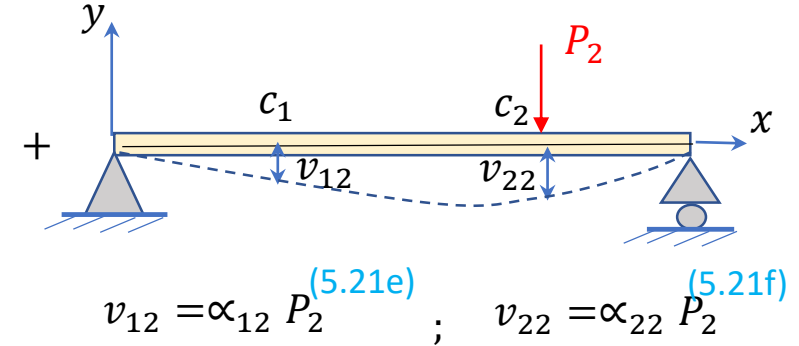
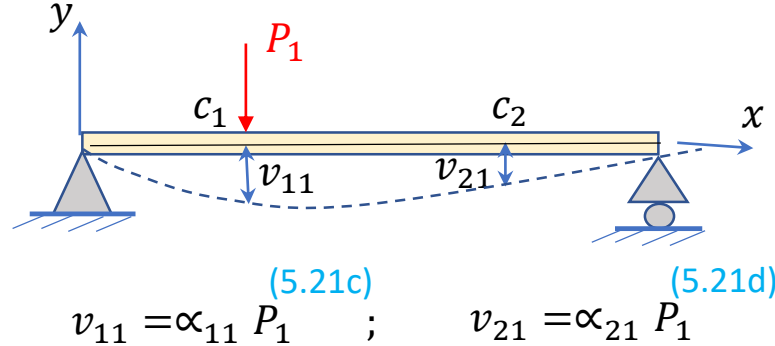
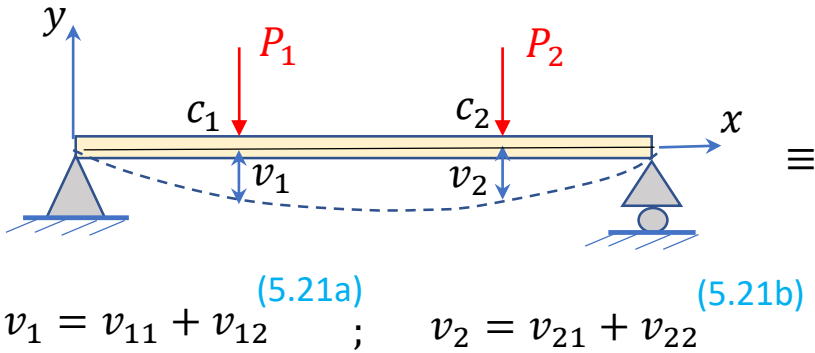
*(Konu Anlatımı)*

**Castigliano teoremleri** farklı yüklemelere maruz katı sistemlerde, sipesifik (özel) noktalardaki elastik şekil değiştirmelerin veya bilinmeyen kuvvetlerin hesaplanmasında kullanılan enerji metodlarının önemli bir uygulamasıdır. Şimdi aşağıdaki konuları adım adım takip ederek bu teoremlere ulaşacağız.

### 5.2.1 $P_1$ ve $P_2$ gibi iki Dış kuvvetin Toplam Şekil Değiştirme İşi:

Bir kirişe birden fazla düşey yük aynı anda uygulanınca bir noktadaki toplam elastik çökme, yükler sırayla uygulandığında aynı noktadaki elastik çökmelerin toplamına eşit olur. (Süperpozisyon metodu)

2tane kuvvet varken

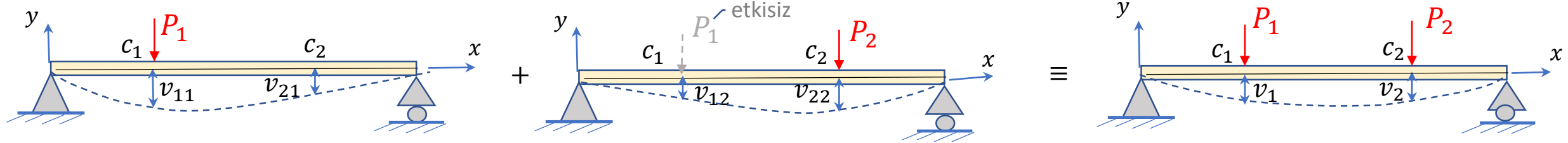


$\alpha_{ik}$  terimleri **tesir katsayısı** olarak isimlendirilir. Bir  $P_k$  kuvvetinden kaynaklı  $i$  noktasındaki çökme miktarı:  $v_{ik} = \alpha_{ik} \cdot P_k$  (5.21g)

5.21c, d, e, f denklemlerini 5.21a, b denklemlerinde yerine koyarsak:  $v_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2$  (5.21h) ;  $v_2 = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2$  (5.21i)

$n$  tane kuvvet olsaydı : ( $c_i$  noktasının toplam çökmesi):  $v_i = \sum_{k=1}^n v_{ik} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \cdot P_k$  (5.21j)

## 5.2.2 Maxwell Karşılık Teoremi: Aynı indislere sahip tesir katsayıları birbirine eşittir. İndis sırası farketmez Bu aşağıda ispatlanmıştır:

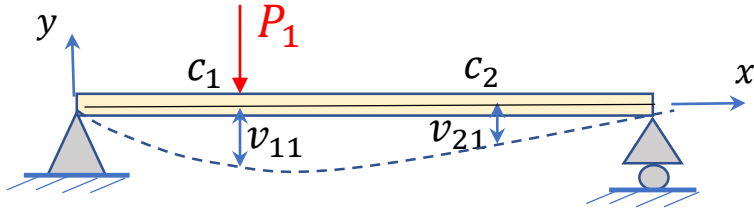


**Süperpozisyon prensibinde şu nokta gözden kaçırılmamalıdır:** 5.1.1 konusunda açıklandığı gibi, kirişe önce  $P_1$  uygulanır, daha sonra  $P_1$  kiriş üzerinde iken  $P_2$  uygulanır.  $P_2$  uygulandığında  $P_1$ 'in uygulama noktası ( $c_1$ )  $P_2$  sebebiyle biraz daha ( $v_{12}$  kadar) ötelenir ve  $P_2$  kuvveti  $P_1$  in işine  $P_1 \cdot v_{12}$  kadar katkı sağlar. Fakat  $P_1$  ilk uygulandığında  $P_2$  kiriş üzerinde henüz olmadığından,  $P_1$  kuvvetinin  $P_2$ 'nin işi üzerine katkısı olmaz. Önce  $P_2$  sonra  $P_1$  uygulanırsa durum benzer şekildedir. Aşağıdaki denklemler bu mantığa göre yazılmıştır. (Daha detaylı bilgi için bkz: 5.1.1 konusu)

	(5.1a denkleminde)	asıl kuvvetin etkisi	diğer kuvvetin katkısı		
Önce $P_1$ sonra $P_2$ uygulanırsa	$P_1$ 'in şekil değiştirme işi:	$U_{d_{P_1}} = \frac{1}{2} P_1 v_{11} + P_1 \cdot v_{12} = \frac{1}{2} P_1 (\alpha_{11} P_1) + P_1 (\alpha_{12} P_2) = \frac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_1 P_2$		$U_d = U_{d_{P_1}} + U_{d_{P_2}}$	$(U_d)_1 = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + \alpha_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22} \quad (5.22a)$
	$P_2$ 'nin şekil değiştirme işi:	$U_{d_{P_2}} = \frac{1}{2} P_2 v_{22} + 0 = \frac{1}{2} P_2 (\alpha_{22} P_2) = \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22}$			
Önce $P_2$ sonra $P_1$ uygulanırsa	$P_2$ 'nin şekil değiştirme işi:	$U_{d_{P_2}} = \frac{1}{2} P_2 v_{22} + P_2 \cdot v_{21} = \frac{1}{2} P_2 (\alpha_{22} P_2) + P_2 (\alpha_{21} P_1) = \frac{1}{2} \alpha_{11} P_2^2 + \alpha_{21} P_1 P_2$		$(U_d)_2 = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + \alpha_{21} P_1 P_2 + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22} \quad (5.22a)$	
	$P_1$ 'in şekil değiştirme işi:	$U_{d_{P_1}} = \frac{1}{2} P_1 v_{11} + 0 = \frac{1}{2} P_1 (\alpha_{11} P_1) = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11}$			
Her iki durumda da toplam şekil değiştirme işi aynı çıkacağından:		$(U_d)_1 = (U_d)_2 \rightarrow \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + \alpha_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22} = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + \alpha_{21} P_1 P_2 + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22} \rightarrow \alpha_{12} = \alpha_{21} \quad (5.23a)$			$\rightarrow \alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad (5.23b)$

maxwell karşılık teoremi:  $\rightarrow \alpha_{ik} = \alpha_{ki}$

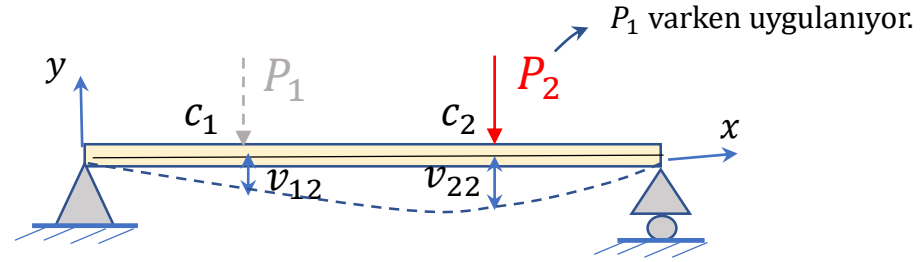
### 5.2.3 Betti Karşılıklı Teoremi



$$v_{21} = \alpha_{21} P_1$$

Her iki tarafı  $P_2$  ile çarparsak

$$P_2 v_{21} = \alpha_{21} P_1 P_2 \quad (I)$$



$$v_{12} = \alpha_{12} P_2$$

Her iki tarafı  $P_1$  ile çarparsak

$$P_1 v_{12} = \alpha_{12} P_1 P_2 = \alpha_{21} P_1 P_2 \quad (II)$$

(Maxwell karşılıklı teoreminden:  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ )

(I) ve (II) denklemlerinden  $\longrightarrow$  Betti Karşılıklı Teoremi:  $P_2 v_{21} = P_1 v_{12} \quad (5.24)$

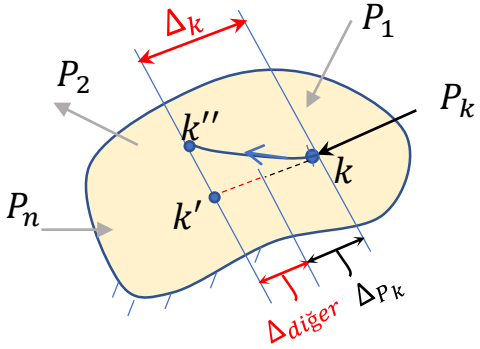
## 5.2.4 Castigliona Teoremleri

**1nci Castigliano Teoremi:** Statik dengede olan bir cisimde, toplam şekil değiştirme işi ( $U_d$ ) nin veya toplam şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ) nin bir **dış yüke göre kısmi türevi**, o yükün uygulama noktasının o dış yük doğrultusundaki şekil değiştirmesine eşittir. Buna 1nci castigliona teoremi denir.

**2nci Castigliano Teoremi:** Statik dengede olan bir cisimde, toplam Şekil değiştirme işi ( $U_d$ ) veya toplam şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ) nin bir noktadaki **şekil değiştirmeye göre kısmi türevi**, o şekil değiştirmeye sebep olan yüke eşittir. Buna 2nci castigliona teoremi denir.

Bu iki teoremin tanımlarına dikkat ederek aşağıdaki **en genel durumlar için** nasıl yazıldığını anlamaya çalışınız.

### 5.2.4.1 Tekil Kuvvetler için en genel durumda castigliona teoremleri



$k''$ : tüm kuvvetlerin etkisiyle  $k$  nın geldiği gerçek konum

$\Delta_{P_k}$ :  $P_k$  kuvveti sebebiyle oluşan uzama,

$\Delta_{diğer}$ : Diğer yükler sebebiyle oluşan uzama

$\Delta_k = \overline{kk''}$ : tüm kuvvetlerin etkisiyle  $k$  nın  $P_k$  doğrultusundaki net şekil değiştirmesidir.

1nci Castigliano Teoremi:

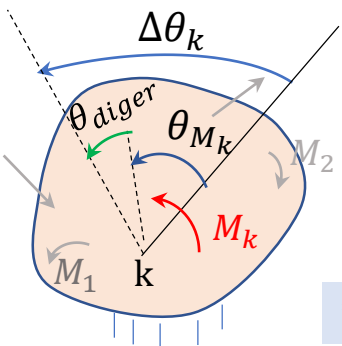
$$U_d = U_i \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial P_k} = \frac{\partial U_i}{\partial P_k} = \Delta_k \quad (5.25a)$$

2nci Castigliano Teoremi:

$$\frac{\partial U_d}{\partial \Delta_k} = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta_k} = P_k \quad (5.25b)$$

### 5.2.4.2 Tekil Momentler için en genel durumda castigliona teoremleri



$\theta_{M_k}$ :  $M_k$  momenti sebebiyle oluşan açı,

$\theta_{diğer}$ : Diğer yükler sebebiyle oluşan açı

$\Delta\theta_k = \theta_{M_k} + \theta_{diğer}$  (tüm yüklerin etkisi ile  $k$  noktasının  $M_k$  moment düzlemindeki dönme açısı)

1nci Castigliano Teoremi:

$$\frac{\partial U_d}{\partial M_k} = \frac{\partial U_i}{\partial M_k} = \Delta\theta_k \quad (5.26a)$$

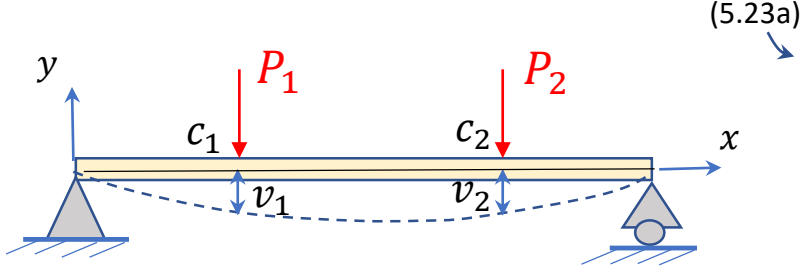
2nci Castigliano Teoremi:

$$\frac{\partial U_d}{\partial \Delta\theta_k} = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta\theta_k} = M_k \quad (5.26b)$$

\* Bu genel denklemler tekil kuvvetlerin veya tekil momentlerin oluşturduğu yükleme cinsine (çek, bası, eğilme, burulma vb.) bağlı değildir.

Şimdi bu teoremlerin doğruluklarını bazı örneklerle ve  $U_d$  şekil değiştirme işinden giderek ispat edeceğiz..>>

Aşağıdaki giriş örneğinden, önce 1nci castigliano teoreminin geçerliliğini göstereceğiz:



(5.23a)

$\alpha_{12} = \alpha_{21}$  olduğu için; bu giriş için yazılmış olan 5.22a denklemini şu formatta tekrar yazabiliriz:

$$U_d = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + \frac{1}{2} \alpha_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2} \alpha_{21} P_1 P_2 + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22} \quad (5.27)$$

$$U_d = \frac{1}{2} P_1 (\underbrace{\alpha_{11} P_1}_{v_{11}} + \underbrace{\alpha_{12} P_2}_{v_{12}}) + \frac{1}{2} P_2 (\underbrace{\alpha_{21} P_1}_{v_{21}} + \underbrace{\alpha_{22} P_2}_{v_{22}}) \rightarrow U_d = \frac{1}{2} P_1 (v_{11} + v_{12}) + \frac{1}{2} P_2 (v_{21} + v_{22}) \rightarrow U_d = \frac{1}{2} P_1 v_1 + \frac{1}{2} P_2 v_2 \quad (5.28)$$

n tane tekil kuvvet olsaydı:  $U_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot v_i = \frac{1}{2} (P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots + P_n v_n) \quad (5.29)$

(5.27) denkleminin  $P_1$ 'e göre kısmi türevini alırsak

$$\frac{\partial U_d}{\partial P_1} = \alpha_{11} P_1 + \frac{1}{2} \alpha_{12} P_2 + \frac{1}{2} \alpha_{21} P_2 \rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial P_1} = \underbrace{\alpha_{11} P_1}_{v_{11}} + \underbrace{\alpha_{12} P_2}_{v_{12}} = v_{11} + v_{12} = v_1 \rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial P_1} = v_1 \quad (5.30a)$$

$\alpha_{12} = \alpha_{21}$

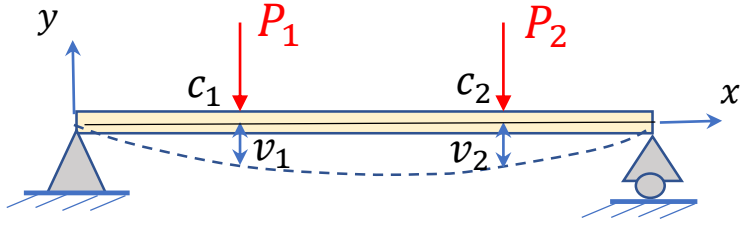
(5.27) denkleminin  $P_2$ 'ye göre kısmi türevini alırsak

$$\frac{\partial U_d}{\partial P_2} = \frac{1}{2} \alpha_{12} P_1 + \frac{1}{2} \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 \rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial P_2} = \underbrace{\alpha_{22} P_2}_{v_{22}} + \underbrace{\alpha_{21} P_1}_{v_{21}} = v_{22} + v_{21} = v_2 \rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial P_2} = v_2 \quad (5.30b)$$

$\alpha_{12} = \alpha_{21}$

(1nci castigliano teoremi doğruluğunu gösterir.)

Şimdi aynı örnek üzerinde 2nci castigliona teoreminin doğruluğunu gösterelim:



(5.21h ve 5.21i denklemlerini tekrar ele alıp,  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerini çekersek: )

$$v_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 \quad (5.21h)$$

$$v_2 = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 \quad (5.21i)$$

$$P_2 = \frac{\alpha_{11} v_2 - \alpha_{21} v_1}{\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}} \quad (5.31a)$$

$$P_1 = \frac{\alpha_{22} v_1 - \alpha_{12} v_2}{\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}} \quad (5.31b)$$

5.31 denklemlerini 5.28 denkleminde yerine koyarsak

$$(5.28) \rightarrow U_d = \frac{1}{2} P_1 v_1 + \frac{1}{2} P_2 v_2 = \frac{1}{2(\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21})} [v_1(\alpha_{22} v_1 - \alpha_{12} v_2) + v_2(\alpha_{11} v_2 - \alpha_{21} v_1)]$$

Son denklemin  $v_1$  'e göre kısmi türevini alırsak:

$$\frac{\partial U_d}{\partial v_1} = \frac{1}{2(\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21})} (2 \alpha_{22} v_1 - \alpha_{12} v_2 - \alpha_{21} v_2) = \frac{1}{2(\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21})} (2 \alpha_{22} v_1 - 2 \alpha_{12} v_2) = \frac{\alpha_{22} v_1 - \alpha_{12} v_2}{\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}} = P_1$$

$\alpha_{12} = \alpha_{21}$   
(5.23a)

$$\rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial v_1} = P_1 \quad (5.32)$$

(Bu son 5.32 denklemi 2nci castigliona teoreminin doğruluğunu gösterir.)

**Örnek 5.2.1** Çeki veya basıya maruz bir çubukta 1nci castigliona teoreminin (5.25a genel denkleminin) doğruluğunu gösteriniz.

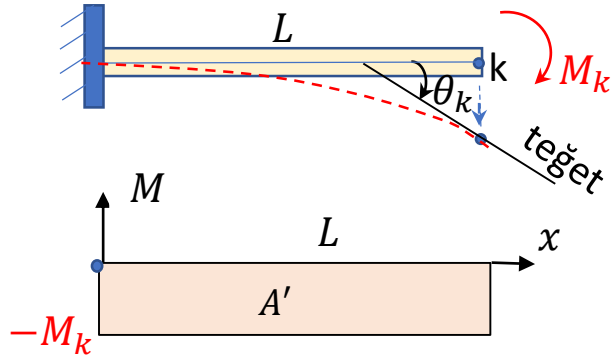


(5.1a denkleminden  
Şekil Değişirme İşi:)

$$U_d = \frac{1}{2} P_k \Delta_k = \frac{1}{2} \frac{P_k^2 L}{AE} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U_d}{\partial P_k} = \frac{P_k L}{AE} = \Delta_k$$

**Örnek 5.2.2** Bir konsol kirişin serbest ucuna tekil eğilme momenti uygulanıyor. Bu sistem için 1nci castigliona teoreminin doğruluğunu gösteriniz.

Moment alanı metodundan (3.2 konusu) k uç noktasının dönme açısı:  $\theta_k = \frac{A'}{EI} = -\frac{M_k L}{EI}$

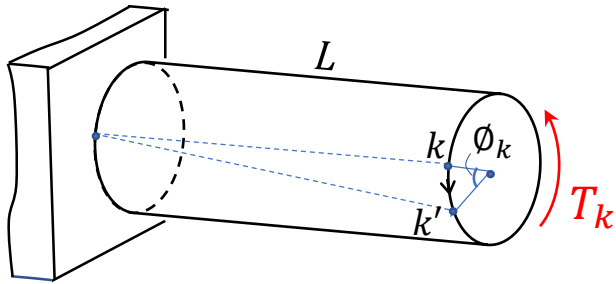


5.2a denkleminden Şekil değişirme İşi:  $U_d = \frac{1}{2} M_k \theta_k + M_k \theta_{diğer} = -\frac{1}{2} \frac{M_k^2 L}{EI}$

( $M_k$ 'dan başka bir dış moment olmadığından  $\theta_{diğer} = 0$ )

1nci Castigliona'ya göre 5.30 denkleminde:  $\frac{\partial U_d}{\partial M_k} = -\frac{M_k L}{EI} = \theta_k = \Delta\theta_k$

**Örnek 5.2.3** Ankastre milin serbest ucuna uygulanan Tekil burulma momentinin şekil değiştirmesini göze alarak 1nci castigliona teoreminin doğruluğunu gösteriniz.



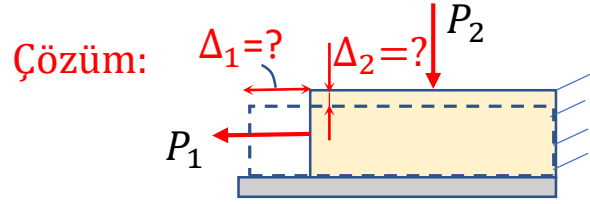
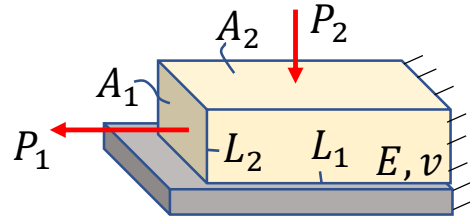
Muk.1 - 4.5 denkleminde burulma açısı:  $\phi_k = \frac{T_k L}{GJ}$

5.2b denkleminde Şekil değişirme işi:  $U_d = \frac{1}{2} T_k \phi_k + T_k \phi_{diğer} = \frac{1}{2} \frac{T_k^2 L}{GJ}$

( $T_k$ 'dan başka bir dış yük olmadığından:  $\phi_{diğer} = 0$ )

1nci Castigliona'ya göre:  $\rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial T_k} = \frac{T_k L}{GJ} = \phi_k = \Delta\phi_k$

## Örnek 5.2.4

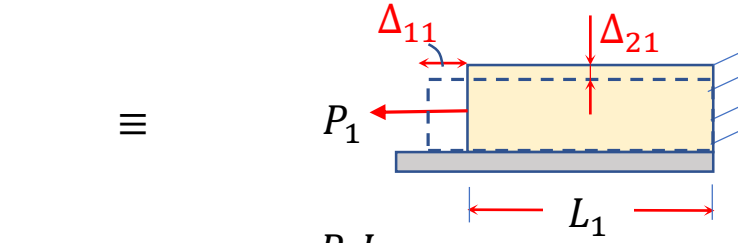


Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Toplam} \\ \text{Uzamlar} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} \\ \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} \end{array}$$

$$\text{Hacim: } V = A_1 L_1 = A_2 L_2$$

$$\rightarrow \frac{L_1}{A_2} = \frac{L_2}{A_1} \quad (I)$$

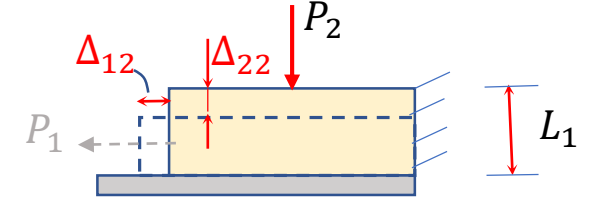


$$\Delta_{11} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E}$$

$$\text{Gerinme: } \varepsilon_{11} = \frac{\Delta_{11}}{L_1} = \frac{P_1}{A_1 E}$$

$$\Delta_{21} = \varepsilon_{21} \cdot L_2 = -\nu \cdot \varepsilon_{11} \cdot L_2 \rightarrow \Delta_{21} = -\nu \cdot \frac{P_1}{A_1 E} \cdot L_2$$

$$\text{veya (I) eşitliğini kullanarak } \rightarrow \Delta_{21} = -\nu \cdot \frac{P_1}{A_2 E} \cdot L_1$$



$$\Delta_{22} = \frac{P_2 L_2}{A_2 E}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta_{22}}{L_2} = \frac{P_2}{A_2 E}$$

$$\Delta_{12} = \varepsilon_{12} \cdot L_1 = -\nu \cdot \varepsilon_{22} \cdot L_1$$

$$\rightarrow \Delta_{12} = -\nu \cdot \frac{P_2}{A_2 E} \cdot L_1$$

Bu terimin neden yazılmadığını anlamadıysanız geçen konuları tekrar inceleyiniz.

5.27 denkleminde

Toplam şekil değiştirme işi:

$$U_d = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_2 \Delta_{21}$$

$$U_d = \frac{1}{2} P_1 \frac{P_1 L_1}{A_1 E} - P_1 \nu \cdot \frac{P_2}{A_2 E} L_1 + \frac{1}{2} P_2 \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = \frac{1}{2} P_1^2 \frac{L_1}{A_1 E} - P_1 P_2 \cdot \frac{\nu}{A_2 E} L_1 + \frac{1}{2} P_2^2 \frac{L_2}{A_2 E}$$

1inci Castigliano teoremi (5.25a denklemi):

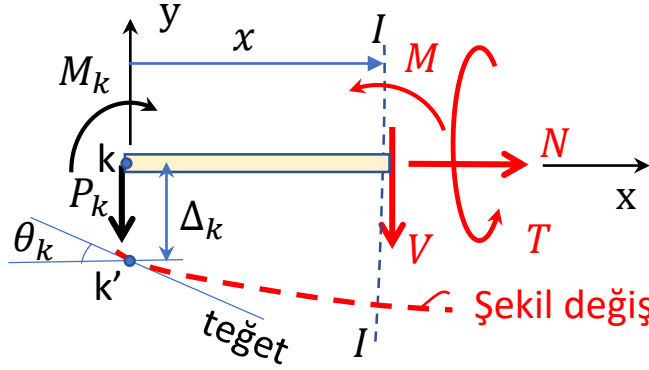
$$\frac{\partial U_d}{\partial P_1} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} - \frac{P_2 \nu L_1}{A_2 E} = \Delta_{11} + \Delta_{12} = \Delta_1$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial P_2} = \frac{P_2 L_2}{A_2 E} - \frac{P_1 \nu L_1}{A_2 E} = \Delta_{22} + \Delta_{21} = \Delta_2$$

## 5.2.5 Castiglione teoremlerinde $U_i$ Şekil Değişirme Enerjisinin Kullanılması

- Şu ana kadar dış yüklerin sebep olduğu  $U_d$  toplam şekil değiştirme işinin dış yüklere göre kısmi türevlerinden giderek castiglione teoremlerini açıkladık, ispat ettik ve bazı örnekler çözdük.
- Fakat 5.25 ve 5.26 denklemlerinden de anlaşılacağı üzere Castiglione teoremlerinde,  $U_d$  yerine, iç kuvvetler cinsinden yazılabilen  $U_i$  toplam şekil değiştirme enerjisinin yine dış yüklere göre kısmi türevleri de kullanılabilir ve bizi aynı sonuçlara götürür.
- Cisim üzerindeki sipesifik noktaların şekil değiştirmelerini veya o noktalardaki bilinmeyen kuvvetlerin/momentlerin hesaplanmasında, Castiglione teoremleri çok daha pratiklik sağlar ve hesaplamalar genellikle  $U_i$  toplam şekil değiştirme enerjisi yardımıyla yapılır.
- Şimdi doğrusal ve eğrisel eksenli çubuklar için 1nci ve 2nci Castiglione Teoremlerini  $U_i$  toplam şekil değiştirme enerjisi cinsinden yazarak, örnekler çözeceğiz.

## a-) Doğrusal Eksenli çubuklar için Ui cinsinden castigliona Teoremleri



Bir doğrusal eksenli çubuğun I-I kesiminin sol kısmının serbest cisim diyagramı genel olarak aşağıdaki gibidir.

$M_k, P_k$  : k noktasındaki tekil dış yükler ,  $M, N, V, T$  : kesitteki iç tesirlerdir.

Denklem 5.20.a dan

Toplam Şekil Değiştirme Enerjisi:  
(çubuğun tümünde depolanan enerji)

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{AE} dx + \frac{1}{2} \int_0^L f_s \frac{V^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx$$

$f_s$ : Düzeltme faktörü  
(tablo 5.1 den)

Cismin üzerindeki herhangi bir k noktası için alttaki denklemleri yazabiliriz.

1nci castigliona teoremi :

(Denklem 5.25'in açılımı)

$$\Delta_k = \frac{\partial U_i}{\partial P_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial P_k} dx + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_k} dx + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P_k} dx \quad (5.33a)$$

$$\theta_k = \frac{\partial U_i}{\partial M_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial M_k} dx + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial M_k} dx + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_k} dx + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial M_k} dx \quad (5.33b)$$

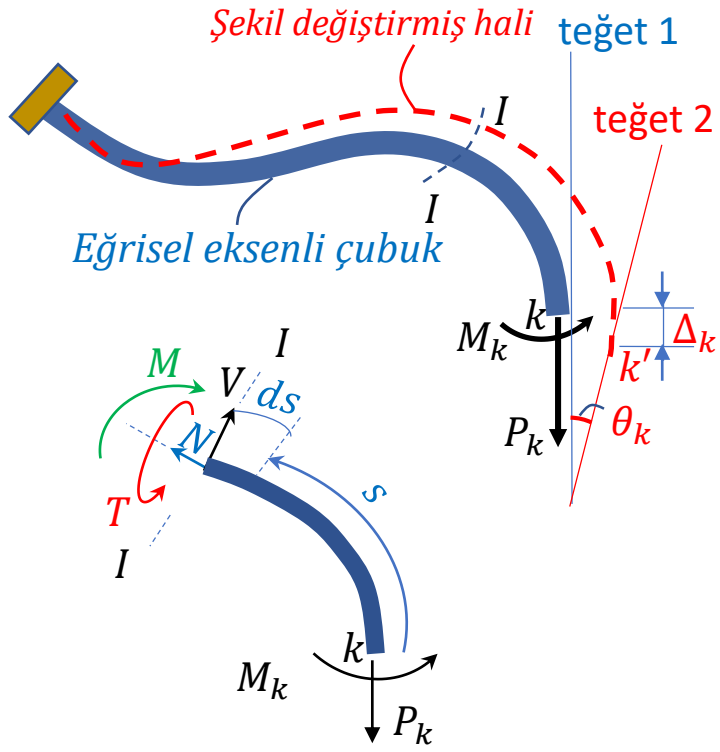
2nci castigliona teoremi :

(Denklem 5.26'nın açılımı)

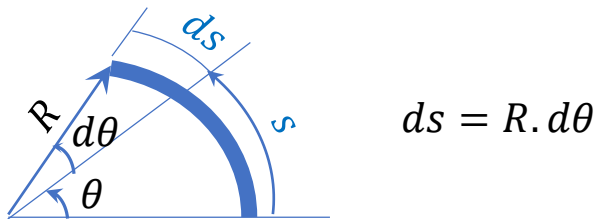
$$P_k = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial \Delta_k} dx + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial \Delta_k} dx + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \Delta_k} dx + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial \Delta_k} dx \quad (5.34a)$$

$$M_k = \frac{\partial U_i}{\partial \theta_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial \theta_k} dx + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial \theta_k} dx + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \theta_k} dx + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial \theta_k} dx \quad (5.34b)$$

## b-) Eğrisel Eksenli çubuklar için $U_i$ cinsinden Castigliano Teoremleri



Geometriye göre  $ds$  i açı cinsinden ifade etmek gerekir.  
(Daire yayı şeklinde bir çubuk için)



$$ds = R \cdot d\theta$$

Çubuğun bütününde depolanan şekil değiştirme enerjisi ( $U_i$ ), herbir kesitteki iç tesirlerin etkilerinin toplanmasıyla elde edilir. Bunun için ise kesitlerin konumunu gösteren değişkene göre integrasyon yapmak gerekir. Doğrusal çubuklarda bir kesitin konumu  $x$ 'e göre ifade edildiğinden 5.20.a denkleminde  $dx$ 'e göre integrasyon yapılmıştır. Eğrisel çubuklarda ise herhangi bir kesitin konumu şekilden de anlaşılacağı üzere  $s$ 'e göre ifade edilir. Buna göre;

Denklem 5.20.b den

$$\text{Toplam Şekil Değiştirme Enerjisi: } U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{AE} ds + \frac{1}{2} \int_0^L f_s \frac{V^2}{GA} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} ds$$

**1nci castigliano teoremi :** (Denklem 5.25'in açılımı)

$$\Delta_k = \frac{\partial U_i}{\partial P_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial P_k} ds + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial P_k} ds + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_k} ds + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial P_k} ds \quad (5.34a)$$

$$\text{Teğetler arasındaki açı: } \theta_k = \frac{\partial U_i}{\partial M_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial M_k} ds + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial M_k} ds + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_k} ds + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial M_k} ds \quad (5.34b)$$

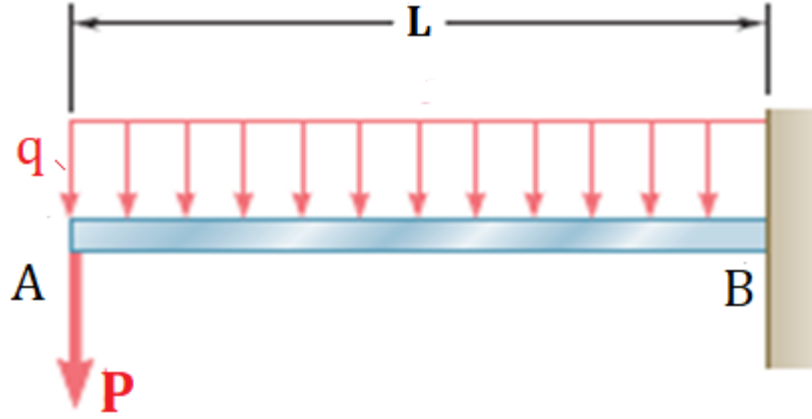
**2nci castigliano teoremi :** (Denklem 5.26'in açılımı)

$$P_k = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial \Delta_k} ds + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial \Delta_k} ds + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \Delta_k} ds + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial \Delta_k} ds \quad (5.35a)$$

$$M_k = \frac{\partial U_i}{\partial \theta_k} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial \theta_k} ds + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial \theta_k} ds + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \theta_k} ds + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial \theta_k} ds \quad (5.35b)$$

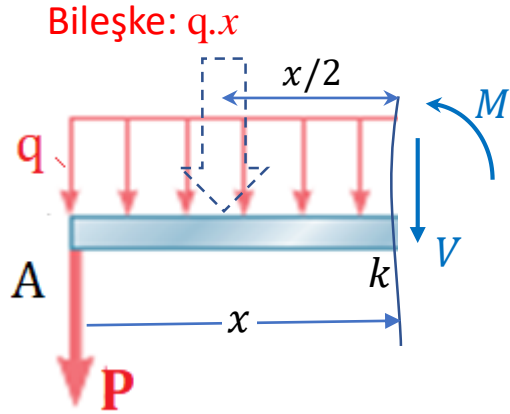
### 5.2.6 Castigliano Teoremlerinin diğer yöntemlerden benzer ve farklı yönleri:

- Eğim, Sehim hesaplarında ve hiperstatik problemlerin çözümünde kullanılan castigliano teoremleri, tıpkı moment alanı ve eşlenik çubuk metodları gibi belli bir noktadaki yer değiştirme (deplasman) ve eğimi doğrudan bulmamızı sağlar.
- Castigliano Teoremleri sadece eğilmeden değil, aynı zamanda çeki, bası, burulma, kesme yüklemelerinin bütününe hesaba katarak şekil değiştirmeleri hesaplamamızı sağlar. Sadece Kirişlerin çökmesi için değil tüm elastik sistemler için kullanılabilir. Oysa ki, Elastik Eğri konusunda anlatılan metodlar (analitik metod, moment alanı metodu ve eşlenik çubuk metodu) sadece eğilme yüklemesinden kaynaklı çökme ve eğim değerlerini hesaplamakta bize yardımcı olmaktadır.
- Castigliano teoremlerine yukarıda bahsi geçen diğer metodlar izotropik cisimlerde elastik şekil değiştirmelerin hesaplanmasında kullanılabilir. Bununla birlikte castigliona teoremleri lineer elastik (Hooke kanununa uyan, yani elastik bölgesi doğrusal olan) malzemeler için geçerli iken, nonlineer (Hooke kanuna uymayan yani elastik bölgesi eğrisel olan) malzemeler için sadece 2nci castigliona teoremi geçerlidir.
- Castigliano yönteminde şekil değiştirmesi incelenen noktada bir dış kuvvet veya dış moment olmalıdır. Eğer yoksa hayali bir dış kuvvet veya dış moment koyularak, çözüm yapılır ve çözüm sonunda bu hayali değerler sifıra eşitlenir.
- Castigliano yönteminin en önemli avantajlarından birisi de eğri eksenli çubuklardan oluşan sistemlerdeki deformasyon hesaplarında çok daha pratik ve hızlı çözüm vermesidir.

**Örnek 5.2.5**

Şekildeki kirişte A serbest ucunun  
a-) sehimini (çökmesini);  
b-) eğim açısını,  
Castigliano teoremlerini kullanarak hesaplayınız.

**Çözüm:** Öncelikle kirişte depolanan toplam şekil değiştirme enerjisini ( $U_i$ 'yi) bulmalıyız. Kesitte eğilme iç momenti M ve kesme iç kuvveti V vardır.  $U_i = U_V + U_M$ . Ancak  $U_V$ 'yi ihmal edeceğiz.



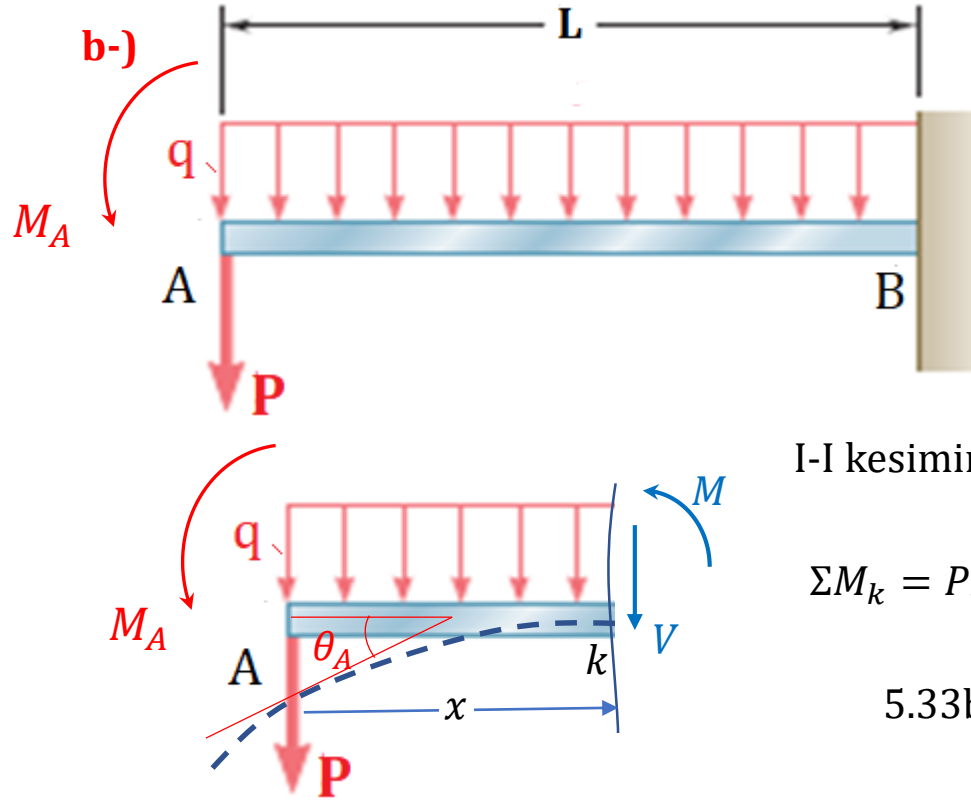
a-) I-I kesiminin sol kısmının dengesinden M iç momentinin x 'e bağlı ifadesini bulalım:

$$\Sigma M_k = Px + M + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M = -\left(Px + \frac{1}{2}q \cdot x^2\right) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

5.20a denklemden:  $U_i = U_M = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$

1nci castigliano teoremine göre A noktasındaki dış tekil kuvvete yani P'ye göre  $U_i$  nin kısmi türevi o noktadaki deplasmanı verir.

5.33a denklemden A noktasının sehimini:  $\rightarrow v_A = \frac{\partial U_i}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[-\left(Px + \frac{1}{2}q \cdot x^2\right)\right](-x) dx \rightarrow v_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^3}{3} + \frac{qL^4}{8}\right)$



2nci castigliano teoremine göre  $U_i$  nin, A noktasındaki dış tekil momente

göre kısmi türevi o noktadaki  $\theta_A$  dönme açısını verir:  $\theta_A = \frac{\partial U_i}{\partial M_A}$

Fakat problemde A noktasında bir dış tekil moment yoktur.

Bu sebeple A noktasına hayali bir  $M_A$  dış tekil momentini koyulur.

(Son işlemde bu moment sıfıra eşitlenir.) Şöyle ki:

I-I kesiminin sol kısmının dengesini tekrar ele alırız ve M in genel ifadesini tekrar buluruz:

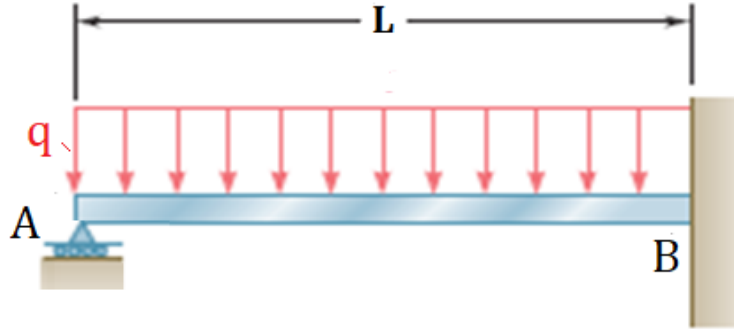
$$\Sigma M_k = Px + M + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_A = 0 \rightarrow M = -\left(Px + \frac{1}{2}q \cdot x^2\right) - M_A \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

5.33b denkleminde A'nin eğim açısı:

$$\theta_A = \frac{\partial U_i}{\partial M_A} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial M_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[-Px - \frac{1}{2}q \cdot x^2 - M_A\right](-1) dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^2}{2} + \frac{1}{6}qx^3 + M_A x \right) \Big|_0^L = \frac{1}{2EI} \left( PL^2 + \frac{qL^3}{3} + 2M_A L \right)$$

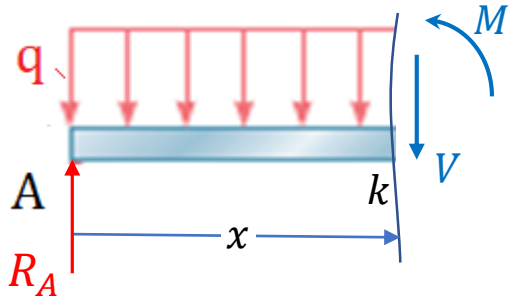
Son denklemde  $M_A = 0$  koyularak, gerçek eğim değeri:  $\theta_A = \frac{1}{2EI} \left( PL^2 + \frac{qL^3}{3} \right)$  bulunur.

**Örnek 5.2.6**

Şekildeki kirişte A mafsalındaki tepki kuvvetini Castigliano teoremlerini kullanarak hesaplayınız.

**Çözüm:**  $R_A$  statik denge denklemlerinden bulunamayacağı için Sistem statikçe belirsiz (hiperstatik) dir.

Bu örnek, 5.1 örneğine çok benzerdir. Sadece dış P kuvveti yerine  $R_A$  mesnet tepkisi koyulacaktır.



$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow -R_A \cdot x + \frac{1}{2} q x^2 + M = 0 \rightarrow M = R_A \cdot x - \frac{1}{2} q x^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

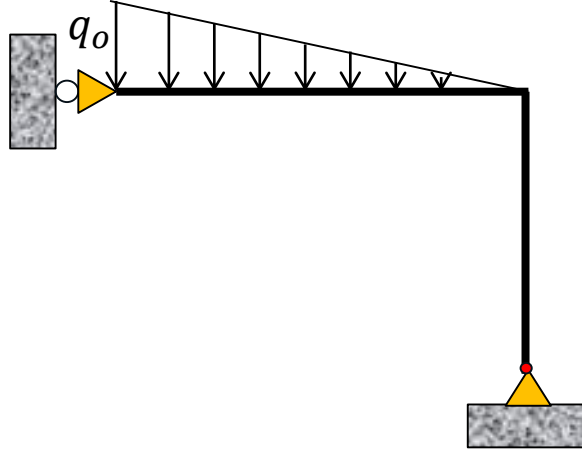
$$5.20a \text{ denkleminde: } U_i = U_M + \cancel{U_V} \approx 0 = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$$

( $U_V$ : kesme kuvvetinden kaynaklı terim ihmal edilir.)

$$5.33a \text{ denkleminde: } v_A = \frac{\partial U_i}{\partial R_A} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial R_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( R_A \cdot x - \frac{1}{2} q x^2 \right) (x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( R_A \cdot x^2 - \frac{1}{2} q x^3 \right) dx$$

1nci Castigliano Teoremine göre  $U_i$ 'nin A noktasındaki  $R_A$ 'ya göre kısmi türevi o noktadaki deplasmanı verir. Fakat mesnetten dolayı deplasman (yani çökme) sıfırdır. Buradan hareketle:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} q \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^L \\ \rightarrow v_A &= \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{L^3}{3} - q \frac{L^4}{8} \right) = 0 \rightarrow R_A = \frac{3}{8} qL \end{aligned} \right\}$$



## ENERJİ METODLARI

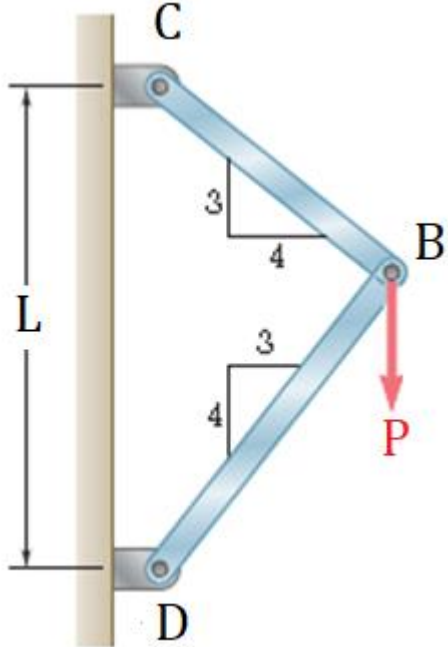
# 5.2.b Castigliano Teoremleri-2

*Doğrusal* eksenli çubuk sistemleriyle ilgili

***Örnek Problemler***

**Örnek 5.2.7**

Şekildeki kafes sistemde, B düğümünün yatay ve düşey deplasmanlarını hesaplayınız. Kirişlerin kesitleri (A) eşit ve malzemeleri aynıdır.



**Çözüm:** B düğümünün yatay yer değiştirmesi sorulduğu için B noktasına hayali bir Q kuvveti koyulur.

Önce, geometriden BC ve BD çubuklarının uzunluklarını L cinsinden elde edelim:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$AB = BC \cos \alpha = BD \sin \alpha$$

$$BC \sin \alpha + BD \cos \alpha = L$$

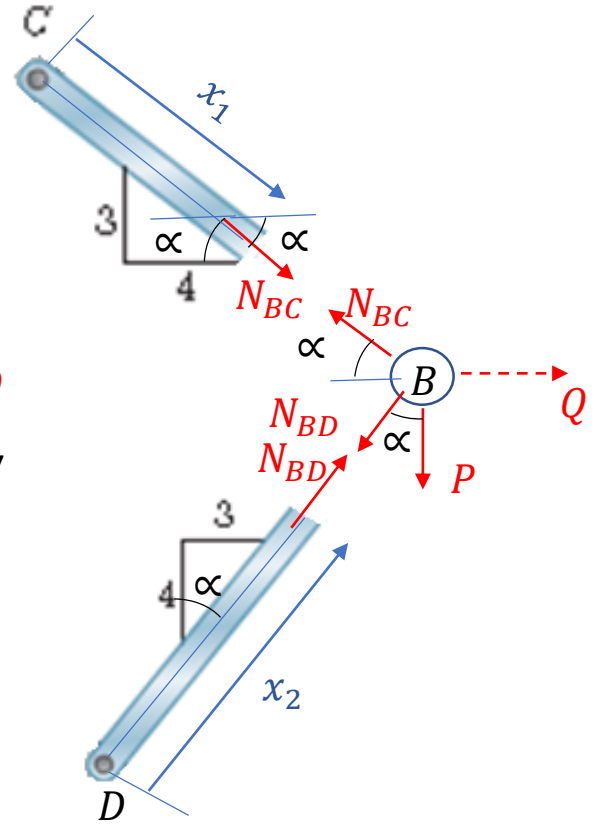
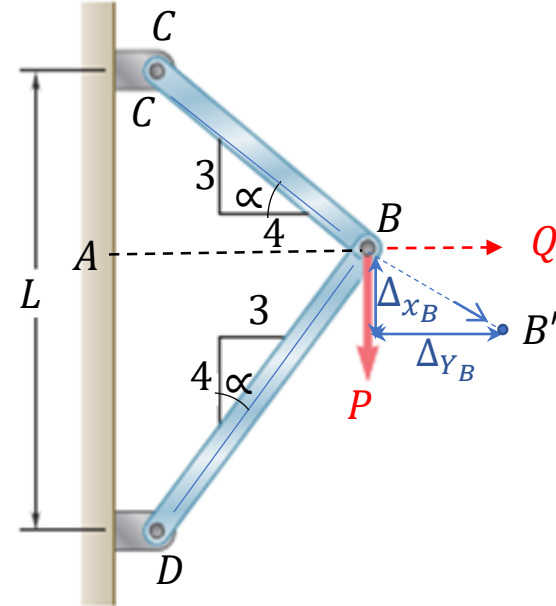
Bu denklemlerden,

$$BD = 0.8L, \quad BC = 0.6L \quad \text{bulunur.}$$

B düğümünün dengesinden:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -N_{BC} \cos \alpha - N_{BD} \sin \alpha + Q = 0 \quad (I)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_{BC} \sin \alpha - N_{BD} \cos \alpha - P = 0 \quad (II)$$



(I) ve (II) denklemlerinden

$$N_{BC} = 0.6P + 0.8Q \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N_{BC}}{\partial Q} = 0.8 \quad , \quad \frac{\partial N_{BC}}{\partial P} = 0.6$$

$$N_{BD} = -0.8P + 0.6Q \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N_{BD}}{\partial Q} = 0.6 \quad , \quad \frac{\partial N_{BD}}{\partial P} = -0.8$$

Çubuklarda sadece N normal iç kuvvetleri oluşur. Bu sebeple 5.20a denkleminde toplam şekil değiştirme enerjisi her bir çubuğun enerjilerinin toplamıdır :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_C^B \frac{N_{BC}^2}{AE} dx_1 + \frac{1}{2} \int_D^B \frac{N_{BD}^2}{AE} dx_2$$

1inci castiglano teoremine göre 5.33a denkleminde :

x yönünde B noktasının deplasmanı:

$$\Delta_{x_B} = \frac{\partial U_i}{\partial Q} = \int_C^B \frac{N_{BC}}{AE} \frac{\partial N_{BC}}{\partial Q} dx_1 + \int_D^B \frac{N_{BD}}{AE} \frac{\partial N_{BD}}{\partial Q} dx_2 = \frac{1}{AE} \left[ \int_0^{0.6L} (0.6P + 0.8Q)0.8 dx_1 + \int_0^{0.8L} (-0.8P + 0.6Q)0.6 dx_2 \right]$$

$$\Delta_{x_B} = \frac{1}{AE} \left\{ [0.48Px_1] \Big|_0^{0.6L} + [0.64Qx_1] \Big|_0^{0.6L} + [-0.48Px_2] \Big|_0^{0.8L} + [0.36Qx_2] \Big|_0^{0.8L} \right\} = (0.48x0.6 - 0.48x0.8)PL \quad \rightarrow \quad \Delta_{x_B} = -0.096 \frac{PL}{AE}$$

y yönünde B noktasının deplasmanı

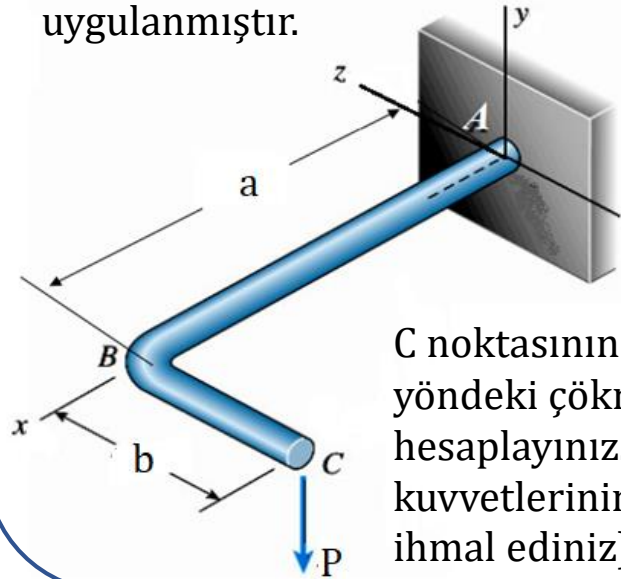
$$\Delta_{y_B} = \frac{\partial U_i}{\partial P} = \int_C^B \frac{N_{BC}}{AE} \frac{\partial N_{BC}}{\partial P} dx_1 + \int_D^B \frac{N_{BD}}{AE} \frac{\partial N_{BD}}{\partial P} dx_2 = \frac{1}{AE} \left[ \int_0^{0.6L} (0.6P + 0.8Q)0.6 dx_1 + \int_0^{0.8L} (-0.8P + 0.6Q)(-0.8) dx_2 \right]$$

$$\Delta_{y_B} = \frac{1}{AE} \{ [(0.6P)(0.6)(0.6L) + (0.8Q)(0.6)(0.6L)] + [(-0.8P)(-0.8)(0.8L) + (0.6Q)(-0.8)(0.8L)] \} \quad \rightarrow \quad \Delta_{y_B} = +0.728 \frac{PL}{AE}$$

(+) çıkması P ile aynı yönde olduğunu gösterir.

**Örnek 5.2.8**

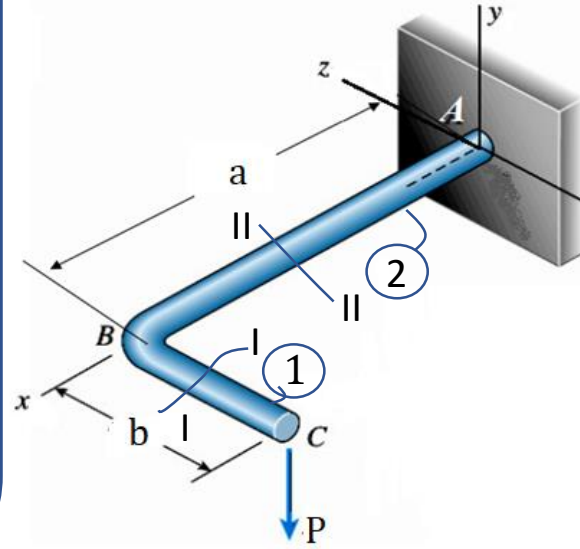
Dairesel kesitli ve L şeklinde bükülmüş çelik çubuğun C ucuna P düşey yükü uygulanmıştır.



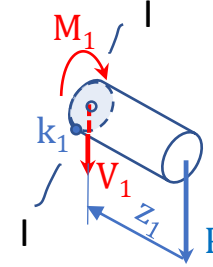
C noktasının düşey yöndeki çökmesini hesaplayınız. (Kesme kuvvetlerinin etkisini ihmal ediniz)

**Çözüm:**

Çubuğu, kesit tesirleri farklı olan 2 bölgeye ayırırız. Herbir bölgedeki iç tesirleri I-I ve II-II kesimleriyle statik dengeden aşağıdaki gibi buluruz.



1. Bölge

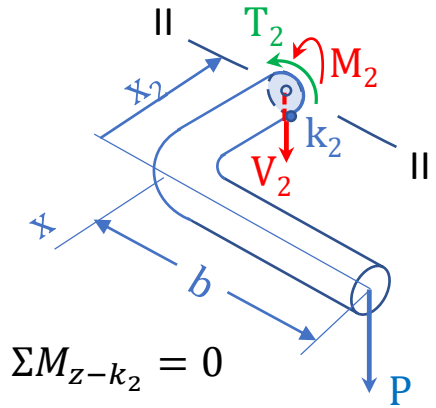


$$\Sigma M_{z-k_1} = 0$$

$$P \cdot z_1 + M_1 = 0$$

$$M_1 = -P \cdot z_1$$

2. Bölge



$$\Sigma M_{z-k_2} = 0$$

$$P \cdot x_2 + M_2 = 0$$

$$M_2 = -P \cdot x_2$$

$$\Sigma M_{x-k_2} = 0$$

$$P \cdot b - T_2 = 0$$

$$T_2 = P \cdot b$$

\*  $V_1$  ve  $V_2$  kesme kuvvetlerinin etkisi ihmal edildiğinden bunları hesaplamaya gerek yoktur.

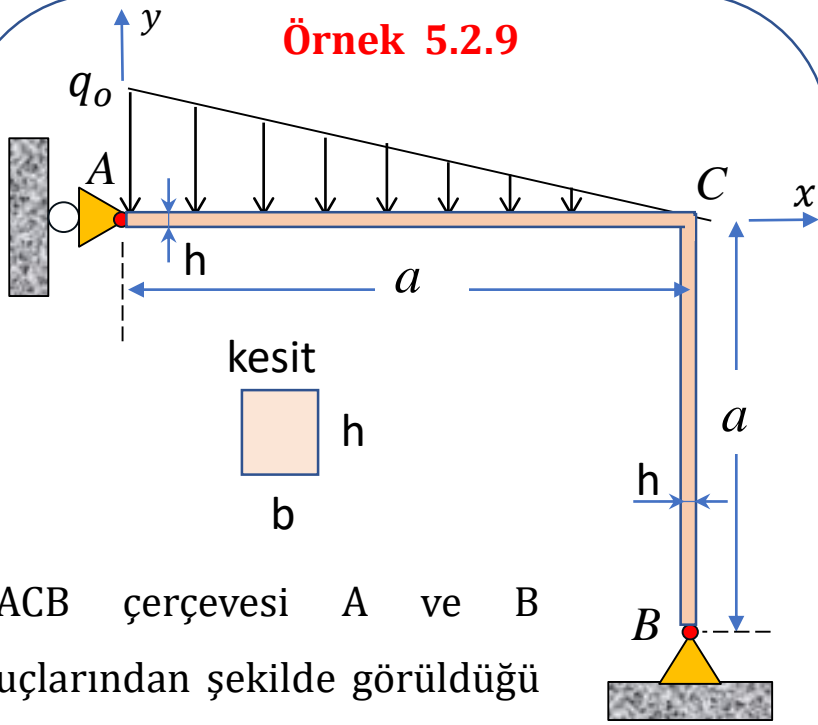
1nci castigliona teoremine göre C noktasının düşey yöndeki çökmesi:

$$5.33.a \text{ denkleminde: } v_C = \frac{\partial U_i}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_C^B M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dz_1 + \frac{1}{EI} \int_B^A M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx_2 + \frac{1}{GJ} \int_B^A T_2 \frac{\partial T_2}{\partial P} dx_2$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^b (-Pz_1)(-z_1) dz_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (-Px_2)(-x_2) dx_2 + \frac{1}{GJ} \int_0^a P \cdot b \cdot b dx_2 = \frac{P}{EI} \frac{z_1^3}{3} \Big|_0^b + \frac{P}{EI} \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^a + \frac{Pb^2}{GJ} x_2 \Big|_0^a \rightarrow v_C = \frac{P}{3EI} (b^3 + a^3) + \frac{Pab^2}{GJ}$$

Kesitteki iç moment veya iç kuvvetlerin seçilen yönü castigliano yöntemindeki sonucu etkilemez. Çünkü kısmi türevlerle çarpıldığından üstteki denklemde çarpımlar aynı işaret çıkar.

Örneğin üstteki çözümde  $T_2 = Pb$  alındığı için  $T_2 \frac{\partial T_2}{\partial P} = Pb \cdot (b) = Pb^2$  çıkar.  $T_2 = -Pb$  zıt yönde alınsaydı  $T_2 \frac{\partial T_2}{\partial P} = -Pb \cdot (-b) = Pb^2$  aynı sonuç çıkar.

**Örnek 5.2.9**

ACB çerçevesi A ve B uçlarından şekilde görüldüğü gibi mesnetlenerek, AC kısmı lineer değişen yayılı kuvvete maruz bırakılıyor.

Buna göre, A (mesnet) ucunun düşey yer değiştirmesini hesaplayınız.

( $E=200\text{GPa}$ ,  $b=20\text{mm}$ ,  $h=80\text{mm}$ ,  $a=1\text{m}$ ,  
 $q_0=2\text{kN/m}$ ,  $G=80\text{GPa}$ )

**Çözüm:**

A kayar mesnetinde normalde düşey yönde tepki kuvveti oluşmaz. Fakat düşey yöndeki deplasmanı hesaplamak için düşey yönde hayali bir  $Q$  kuvveti koyulur. Son kısımda bu kuvvet sıfıra eşitlenir.

Çubuğun statik dengesinden:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{By} - Q - \frac{1}{2} q_0 a = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow F_{By} \cdot a - F_{Bx} \cdot a - \frac{q_0 a}{2} \left(\frac{a}{3}\right) = 0$$

Bu 2 eşitlikten:  $F_{By} = \frac{q_0 a}{2} + Q$  ;  $F_{Bx} = \frac{q_0 a}{3} + Q$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{q_0 a}{3} + Q$$

Çerçevenin BC ve AC bölgelerindeki kesit tesirlerini bulalım:

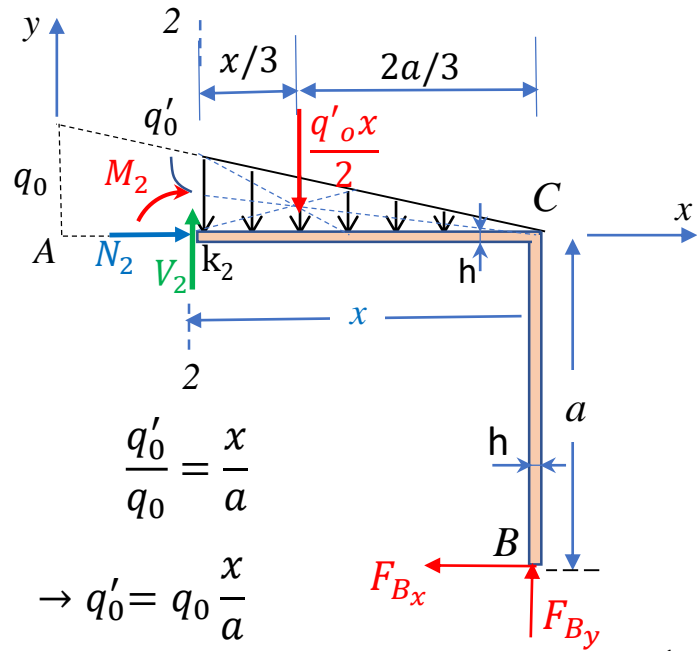
$$\Sigma M_{z-k_1} = 0 \rightarrow -M_1 - F_{Bx} \cdot y = 0$$

$$\rightarrow M_1 = -\left(\frac{q_0 a}{3} + Q\right) y \rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial Q} = -y$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow V_1 = F_{Bx} = \frac{q_0 a}{3} + Q \rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial Q} = 1$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 = F_{By} = \frac{q_0 a}{2} + Q \rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial Q} = 1$$

Eğilme momenti  $M_1 = M_z$  olduğundan atalet momenti:  $I_1 = I = I_z = \frac{bh^3}{12}$  alınır.



$$\Sigma M_{k_2} = 0 \rightarrow -M_2 + F_{By} \cdot x - F_{Bx} \cdot a - \frac{q'_0 x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0$$

$$M_2 = \left( \frac{1}{2} q_0 a + Q \right) x - \left( \frac{1}{3} q_0 a + Q \right) a - \frac{q_0 x^3}{6a} \rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial Q} = x - a$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_2 = F_{Bx} = \frac{qa}{3} + Q \rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial Q} = 1$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_2 = -F_{By} + \frac{q'_0 x}{2} = -\frac{q_0 a}{2} - Q + \frac{q_0 x^2}{2a} \rightarrow \frac{\partial V_2}{\partial Q} = -1$$

1.Castigliona teoremine göre 5.33.a denkleminde A noktasının düşey deplasmanı bulunur:

$$v_A = \frac{\partial U_i}{\partial Q} = \left[ \frac{1}{EI_1} \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} dy + \frac{1}{EI_2} \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} dx \right] + \int_0^a \frac{N_1}{AE} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial Q} dy + \int_0^a \frac{N_2}{AE} \frac{\partial N_2}{\partial Q} dx + \int_0^a f_s \frac{V_1}{GA} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Q} dy + \int_0^a f_s \frac{V_2}{GA} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial Q} dx$$

$$v_A = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a \left( -\frac{1}{3} q_0 a y - Q \right) (-y) dy + \int_0^a \left[ \left( \frac{1}{2} q_0 a + Q \right) x - \frac{1}{3} q_0 a^2 - Q a - \frac{q_0 x^3}{6a} \right] (x - a) dx \right] +$$

$$+ \frac{1}{AE} \left[ \int_0^a \left( \frac{1}{2} q_0 a + Q \right) \cdot 1 \cdot dy + \int_0^a \left( \frac{1}{3} q_0 a + Q \right) \cdot 1 \cdot dx \right] + \frac{f_s}{GA} \left[ \int_0^a \left( \frac{1}{3} q_0 a + Q \right) \cdot 1 \cdot dy + \int_0^a \left( -\frac{1}{2} q_0 a - Q + \frac{q_0 x^2}{2a} \right) (-1) dx \right]$$

...>>

Sonuç olarak: 
$$v_A = \frac{73}{360EI} q_0 a^4 + \frac{5q_0 a^2}{6AE} + 2f_s \frac{q_0 a^2}{3GE}$$
 elde edilir.

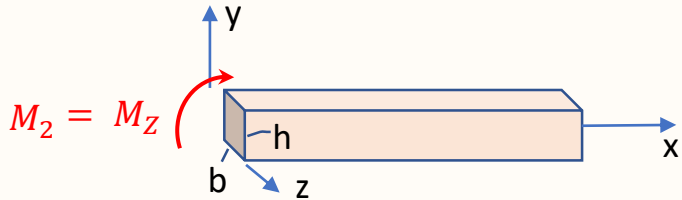
Soruda verilen Sayısal değerleri yerine koyarsak: (E=200GPa, b=20mm, h=80mm, a=1m,  $q_0 = 2\text{kN/m}$ , G=80GPa)

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 80^3}{12} = 853333 \text{mm}^4, \quad A = bh = 20 \times 80 = 1600 \text{mm}^2 \quad \text{Tablo 5.1 den dikdörtgen için: } f_s = 1.2$$

$$v_A = \frac{73}{360 \times 200 \times 10^3 \times 853333} 2 \times 1000^4 + \frac{5 \times 2 \times 1000^2}{6 \times 1600 \times 200 \times 10^3} + 2 \times 1.2 \frac{2 \times 1000^2}{3 \times 80 \times 10^3 \times 200 \times 10^3}$$

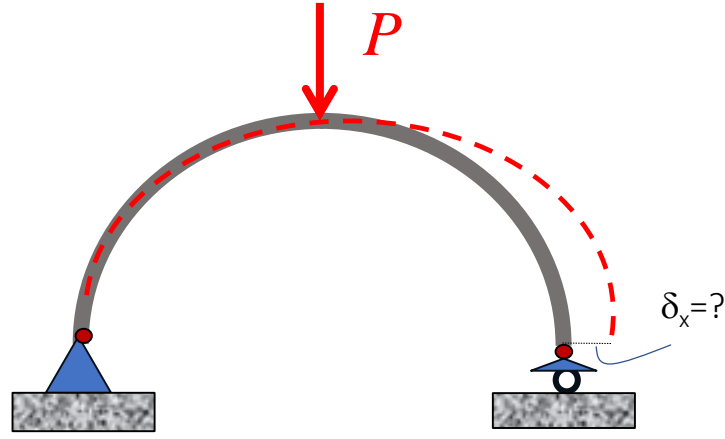
$$v_A = \underbrace{2.376 \text{mm}}_{(v_A)_M} + \underbrace{0.0052 \text{mm}}_{(v_A)_N} + \underbrace{0.0001 \text{mm}}_{(v_A)_V} \rightarrow v_A \cong 2.381 \text{mm}$$

Görüldüğü gibi N ve V kuvvetlerinin etkisi moment etkisi yanında ihmal edilebilecek mertebelerde çıkmaktadır.



5.33a denklemindeki  $I$  atalet momentinin indisi Eğilme iç momentinin indisi ile aynı olmalıdır. 2-2 kesiminde  $M_2$  eğilme iç momentini sağ el kaidesine göre  $-z$  yönündedir.

Bu durumda  $I_2 = I = I_z = \frac{bh^3}{12}$  olacaktır.



## ENERJİ METODLARI

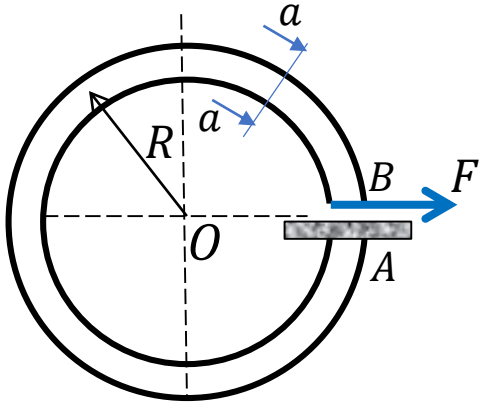
# 5.2.c Castigliano Teoremleri-3

*Eğrisel eksenli çubuk sistemleriyle ilgili*

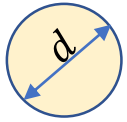
## *Örnek Problemler*

**Örnek 5.2.10**

Şekildeki dairesel kesitli ve dairesel formdaki çubuğun F kuvveti etkisiyle B ucunun yatay yer değiştirmesini hesaplayınız. (Tüm kesit tesirlerini dahil ediniz.)



a - a kesit görünümü:



Verilenler:

(E=200GPa, R=150mm, d=20mm, F=3kN, G=80GPa)

**Çözüm:**

Önce dairesel kesitin geometrik özelliklerini hesaplırsak:

Atalet Momenti:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 20^4}{64} \cong 7854 \text{mm}^4$$

Kesitin Alanı:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 20^2}{4} \cong 314 \text{mm}^2$$

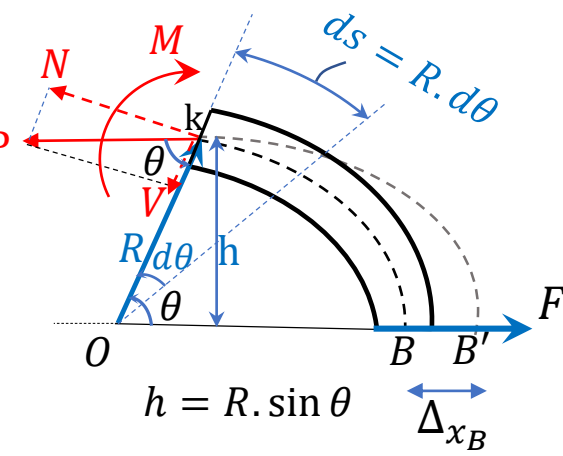
$\theta$  kadarlık bir kısımdan kesim yaparak, Statik dengeden kesit tesirlerini bulalım:

$$\Sigma M_k = 0 \rightarrow F \cdot h - M = 0 \rightarrow M = F \cdot h = F \cdot R \cdot \sin \theta \rightarrow (\partial M / \partial F = R \cdot \sin \theta)$$

$$\Sigma P_x = 0 \rightarrow P = F$$

P kuvvetinin bileşenleri: N Normal kuvveti ve V Kesme kuvvetidir.

$$\rightarrow N = P \sin \theta = F \sin \theta, \quad V = P \cos \theta = F \cos \theta$$



$$(\partial V / \partial F = \cos \theta)$$

$$(\partial N / \partial F = \sin \theta)$$

1nci castigliona teoremine göre şekil değiştirme sonucu B noktasının yatay yer değiştirmesi,

5.34.a denkleminde:

$$\Delta_{x_B} = \frac{\partial U_i}{\partial F} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial F} ds + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial F} ds + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds + \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial F} ds$$

(tablo 5.1'den dairesel kesit için kesit faktörü  $f_s = 1.33$ )

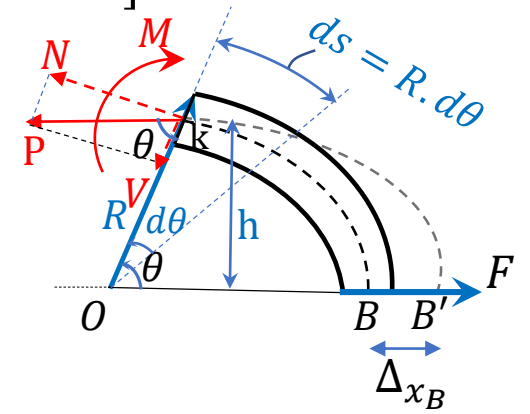
...>>

$$\Delta_{x_B} = \frac{\partial U_i}{\partial F} = \int_0^L \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial F} ds + \int_0^L f_s \frac{V}{GA} \frac{\partial V}{\partial F} ds + \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds$$

$$\Delta_{x_B} = \frac{1}{AE} \left[ \int (F \cdot \sin \theta)(\sin \theta) (Rd\theta) \right] + \frac{1.33}{GA} \left[ \int (F \cdot \cos \theta)(\cos \theta) (Rd\theta) \right] + \frac{1}{EI} \left[ \int (F \cdot R \cdot \sin \theta)(R \cdot \sin \theta) (Rd\theta) \right]$$

$$\Delta_{x_B} = \frac{FR}{AE} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 1.33 \frac{FR}{GA} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \frac{FR^3}{EI} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \left( \frac{FR}{AE} + \frac{FR^3}{EI} \right) \int_0^{2\pi} \overbrace{\left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)}^{\sin^2 \theta} d\theta + 1.33 \frac{FR}{GA} \int_0^{2\pi} \overbrace{\left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)}^{\cos^2 \theta} d\theta$$



$$= \left( \frac{FR}{2AE} + \frac{FR^3}{2EI} \right) \left[ \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right] + 1.33 \frac{FR}{2GA} \left[ \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right] = \left( \frac{FR}{2AE} + \frac{FR^3}{2EI} \right) \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} + 1.33 \frac{FR}{2GA} \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \Big|_0^{2\pi}$$

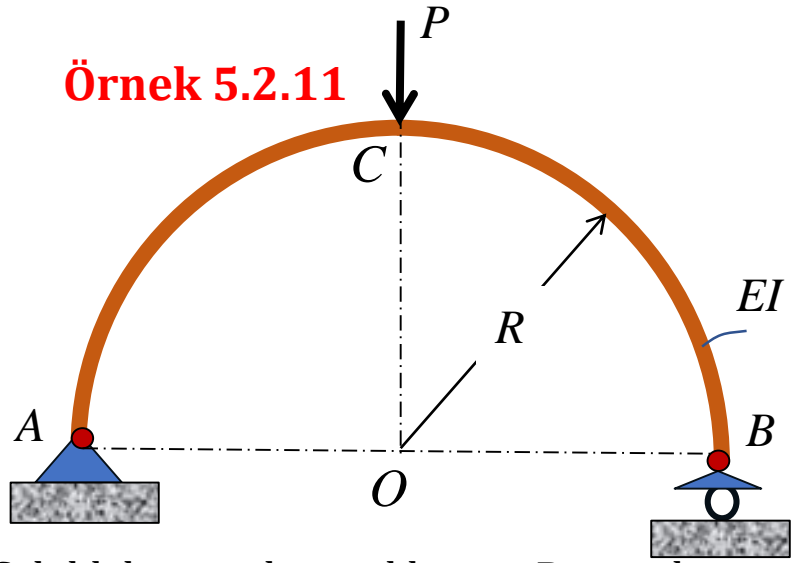
$$\Delta_{x_B} = \left( \frac{FR}{2AE} + \frac{FR^3}{2EI} \right) \left[ (2\pi - \frac{\sin 4\pi}{2}) - (0 - \sin 0) \right] + 1.33 \frac{FR}{2GA} \left[ (2\pi + \frac{\sin 4\pi}{2}) - (0 + \sin 0) \right] \rightarrow \Delta_{x_B} = \frac{\pi FR^3}{EI} + \frac{\pi FR}{EA} + 1.33 \frac{\pi FR}{GA}$$

Değerler yerine koyulursa:

$$\rightarrow \Delta_{x_B} = \frac{\pi(3000N)(150mm)^3}{(200000MPa)7854mm^4} + \frac{\pi(3000)(150)}{(200000)(314)} + 1.33 \frac{\pi(3000)(150)}{(80000)(314)} = 20.25 + 0.0225 + 0.075 \rightarrow \Delta_{x_B} = 20.347mm$$

M'in etkisi    N'in etkisi    V'nin etkisi

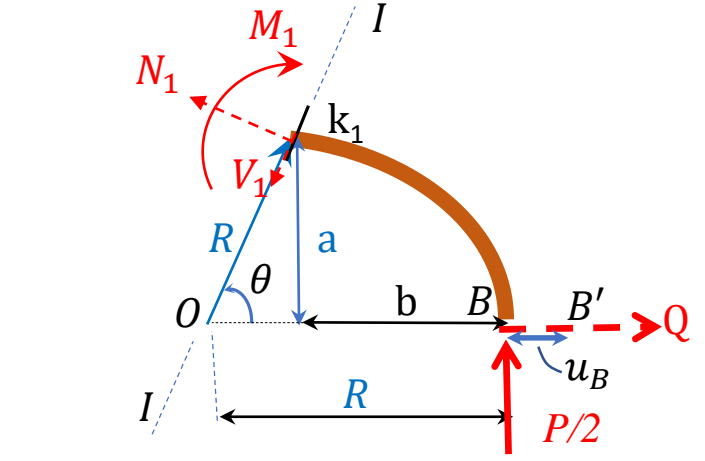
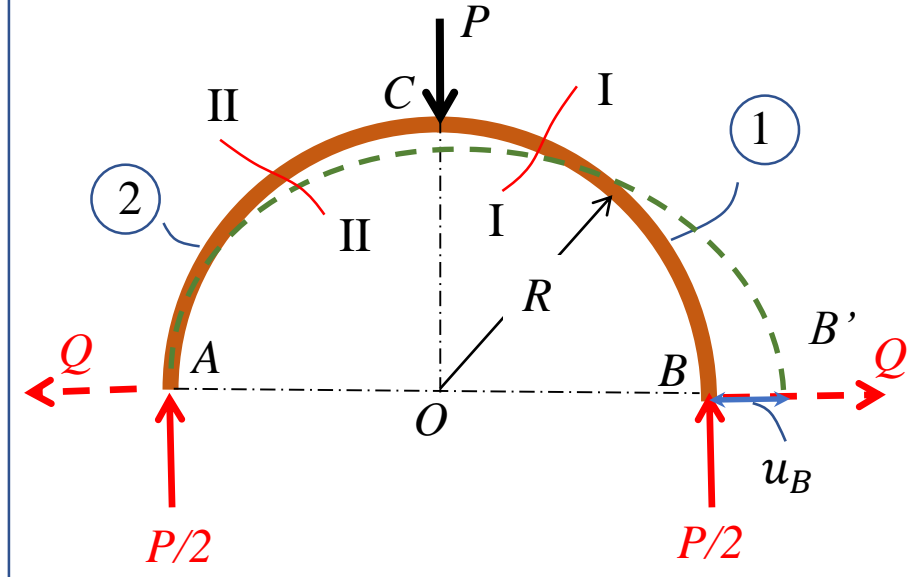
**Örnek 5.2.11**



Şekildeki yarı-dairesel kirişin B ucunda meydana gelen yatay sehimi ve eğim açısını hesaplayınız. (Normal ve Kesme kuvvetlerinin etkilerini ihmal ediniz.)

**Çözüm:**

B nin yatay yer değiştirmesi sorulduğu için B noktasına bir yatay hayali Q kuvveti koyulur. Dolayısıyla denge sağlanması için A noktasında da zıt yönde bir Q kuvveti ortaya çıkacaktır.



$$a = R \sin \theta, \quad b = R(1 - \cos \theta)$$

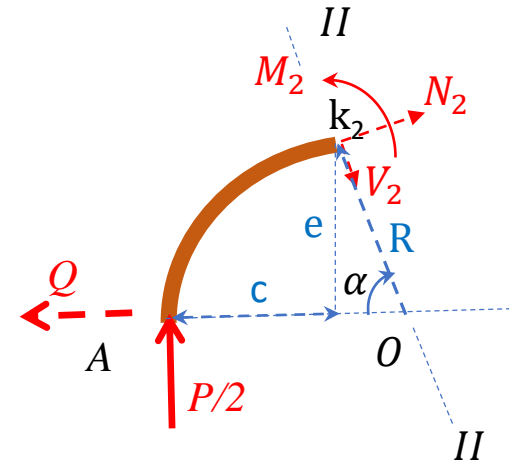
1.Bölge I-I kesiminin sağ kısmının statik dengesi:

$$\sum M_{k_1} = 0 \rightarrow -M_1 + \frac{P}{2}b + Q \cdot a = 0 \rightarrow M_1 = \frac{P}{2}b + Q \cdot a \rightarrow M_1 = \frac{P}{2}R(1 - \cos \theta) + Q \cdot R \sin \theta$$

2.Bölge II-II kesiminin sol kısmının statik dengesi:

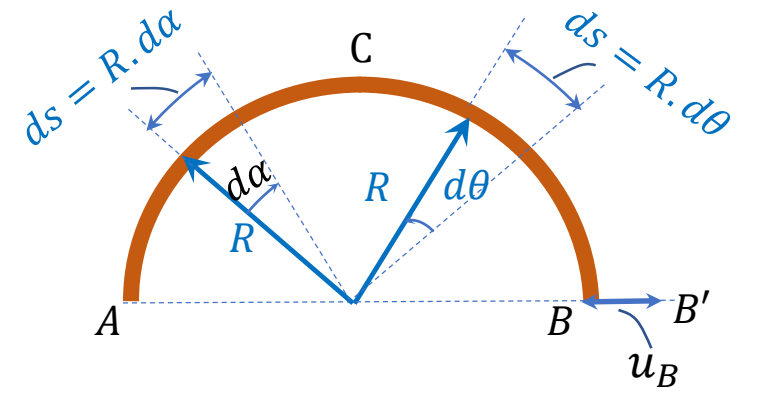
$$e = R \sin \alpha, \quad c = R(1 - \cos \alpha)$$

$$\sum M_{k_2} = 0 \rightarrow -M_2 + \frac{P}{2}c + Q \cdot e = 0 \rightarrow M_2 = \frac{P}{2}R(1 - \cos \alpha) + Q \cdot R \sin \alpha$$



$$M_1 = \frac{P}{2}R(1 - \cos \theta) + Q \cdot R \sin \theta \quad \rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial Q} = R \sin \theta$$

$$M_2 = \frac{P}{2}R(1 - \cos \alpha) + Q \cdot R \sin \alpha \quad \rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial Q} = R \sin \alpha$$



Soruda belirtildiği üzere N ve V iç kuvvetlerinin etkileri ihmal edilecektir.

5.34a denkleminde B noktasının yatay deplasmanı:  $u_B = \frac{1}{EI} \left[ \int_B^C M_1 \frac{\partial M_1}{\partial Q} ds + \int_A^C M_2 \frac{\partial M_2}{\partial Q} ds \right]$

$$u_B = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{P}{2}R(1 - \cos \theta) + \cancel{Q \cdot R \sin \theta} \right] (R \sin \theta) R d\theta + \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{P}{2}R(1 - \cos \alpha) + \cancel{Q \cdot R \sin \alpha} \right] (R \sin \alpha) R d\alpha \right]$$

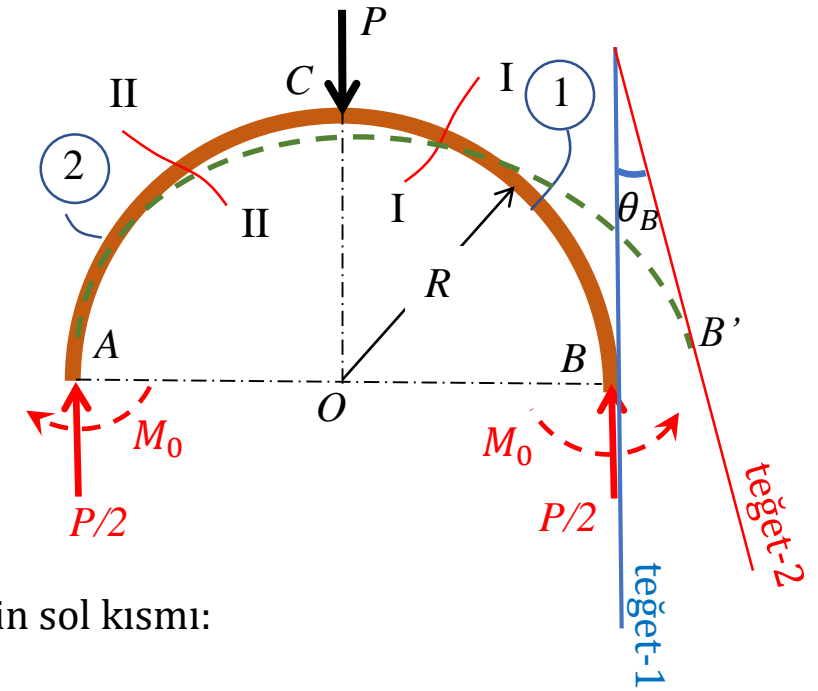
$$u_B = \frac{PR^3}{2EI} \left[ \int_0^{\pi/2} \underbrace{(1 - \cos \theta)}_t \underbrace{\sin \theta d\theta}_{dt} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{(1 - \cos \alpha)}_m \underbrace{\sin \alpha d\alpha}_{dm} \right] \rightarrow u_B = \frac{PR^3}{2EI} \left[ \int_B^C t dt + \int_A^C m dm \right] = \frac{PR^3}{2EI} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{m^2}{2} \right)$$

Değişken dönüşümü yaparsak:  $t$   $dt$   $m$   $dm$

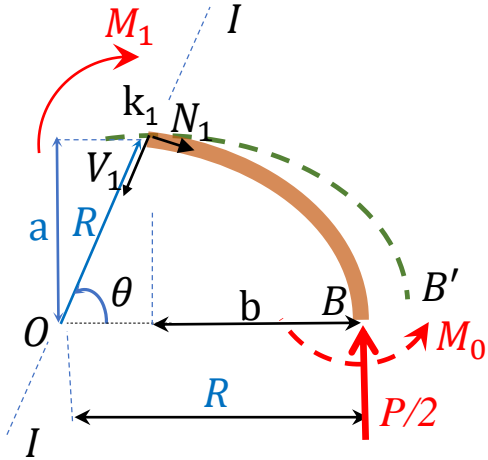
$$u_B = \frac{PR^3}{4EI} \left[ (1 - \cos \theta)^2 \Big|_0^{\pi/2} + (1 - \cos \alpha)^2 \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{PR^3}{4EI} \left[ (1 - 0)^2 - (1 - 1)^2 + (1 - 0)^2 - (1 - 1)^2 \right] \rightarrow u_B = \frac{PR^3}{2EI}$$

b-)

B nin eğim açısı: ilk ve son konumların teğetleri arasındaki açıdır. 5.34b denkleminde bulunur. Bunun için ise B noktasına hayali bir dış  $M_0$  momenti koyarız. A daki sabit mesnet aslında moment tepkisi oluşturmaz. Fakat tüm sistemin dengesinin sağlanması için A noktasına da de zıt yönde bir dış  $M_0$  koymak gerekir.



1. Bölge I-I kesiminin sağ kısmı:



$$a = R \sin \theta,$$

$$b = R(1 - \cos \theta)$$

$$\sum M_{k_1} = 0$$

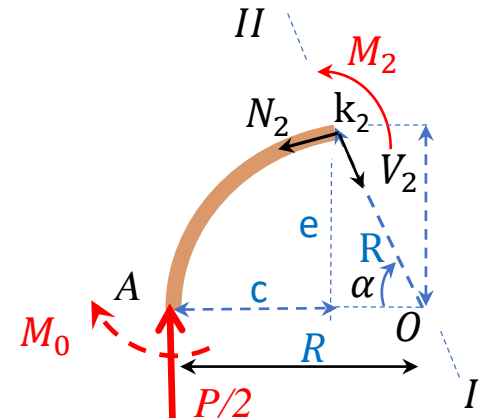
$$\rightarrow -M_1 + \frac{Pb}{2} + M_0 = 0$$

$$M_1 = \frac{Pb}{2} + M_0$$

$$M_1 = \frac{PR}{2}(1 - \cos \theta) + M_0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M_0} = 1$$

2. Bölge II-II kesiminin sol kısmı:



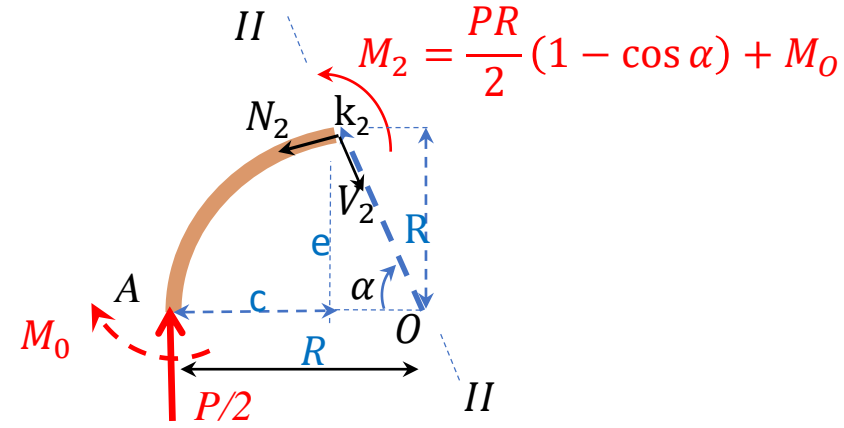
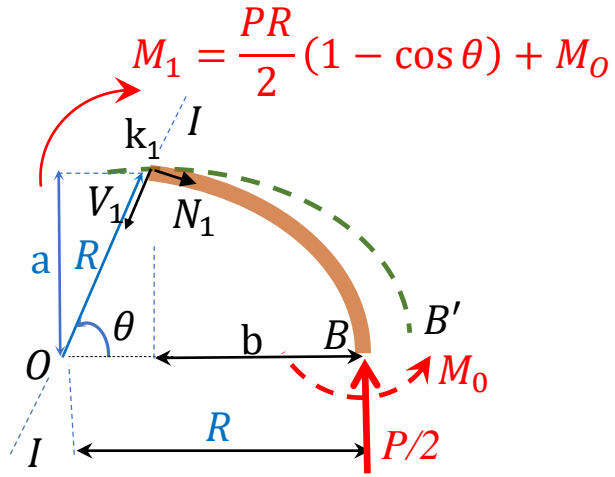
$$c = R(1 - \cos \alpha)$$

$$e = R \sin \alpha$$

$$\sum M_{k_2} = 0 \rightarrow M_2 = \frac{Pc}{2} + M_0$$

$$\rightarrow M_2 = \frac{PR}{2}(1 - \cos \alpha) + M_0$$

$$\rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial M_0} = 1$$



Kesme kuvvetleri ( $V_1, V_2$ ) ve Normal iç kuvvetlerin ( $N_1, N_2$ ) etkileri ihmal edilirse, 5.34.b denkleminde B noktasının eğimi:

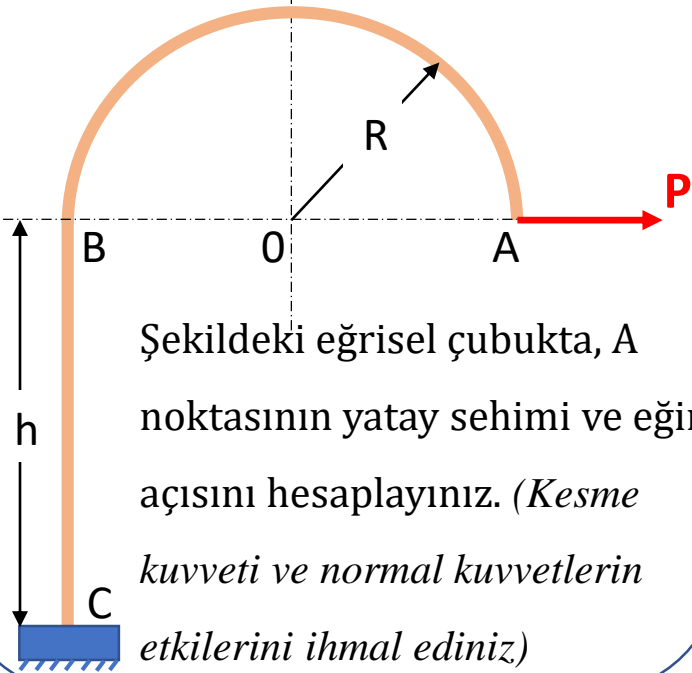
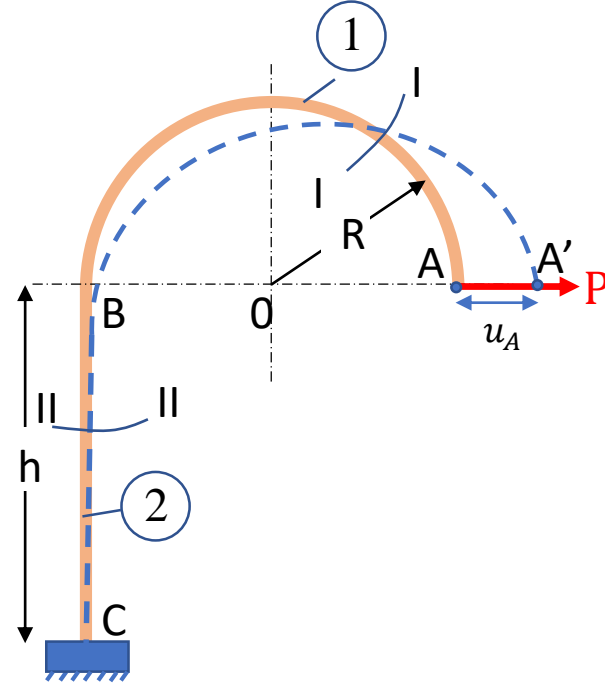
$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_0} ds + \int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_0} ds \right] = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{PR}{2} (1 - \cos \theta) + M_0 \right\} 1 \cdot R d\theta \right] + \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{PR}{2} (1 - \cos \alpha) + M_0 \right\} 1 \cdot R d\alpha \right]$$

A
B

A ve B denklemlerinin tüm terimler ve integral sınırları aynı olduğundan:  $A = B \rightarrow \theta_B = 2A$

$$\theta_B = \frac{PR^2}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{PR^2}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right] = \frac{PR^2}{EI} (\theta - \sin \theta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{PR^2}{EI} \left( \frac{\pi}{2} - 1 - 0 - 0 \right) \rightarrow \theta_B = \frac{PR^2}{2EI} (\pi - 2)$$

*Not: Benzer şekilde aşıkında bulduğumuz  $u_B$  deplasmanı da A ve B gibi eşit iki terime ayrılabilirdi.*

**Örnek 5.2.11****Çözüm:** Çubuğu AB ve BC olmak üzere 2 kısma ayırırız

$$\sum M_{k_1} = 0$$

$$-M_1 + P \cdot R \cdot \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow M_1 = P \cdot R \cdot \sin \theta$$

$$\sum M_{k_2} = 0$$

$$-M_2 - P x_2 = 0$$

$$\rightarrow M_2 = -P x_2$$

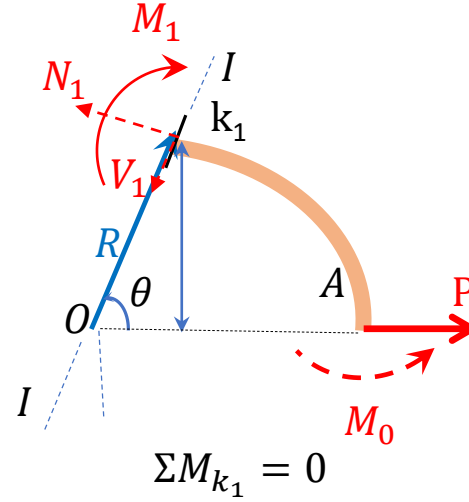
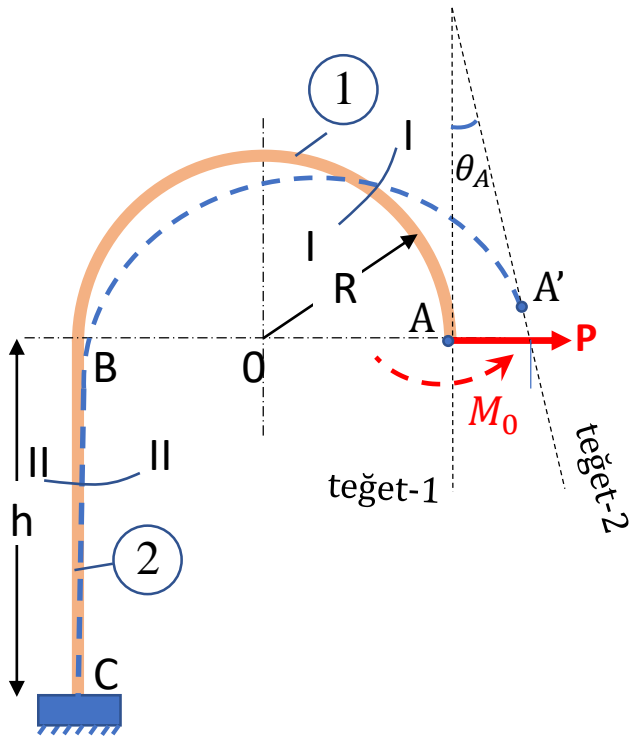
A noktasının yatay sehimini 1nci Castigliona teoreminden:  $u_A = \frac{1}{EI} \left[ \int_A^B M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} ds + \int_B^C M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx_2 \right]$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial P}$$

$$u_A = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^\pi P \cdot R \cdot \sin \theta \cdot R \cdot \sin \theta \cdot R d\theta \right] + \frac{1}{EI} \left[ \int_0^h (-P x_2) (-x_2) \cdot dx_2 \right] = \frac{PR^3}{EI} \left[ \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right] + \frac{P}{EI} \left[ \int_0^h x_2^2 \cdot dx_2 \right]$$

$$= \frac{PR^3}{EI} \int_0^\pi \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta + \frac{P}{3EI} x_2^3 \Big|_0^h = \frac{PR^3}{2EI} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi + \frac{P}{3EI} h^3 = \frac{PR^3}{2EI} \left( \pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) + \frac{P}{3EI} h^3 \rightarrow u_A = \frac{P}{EI} \left( \frac{\pi R^3}{2} + \frac{h^3}{3} \right)$$

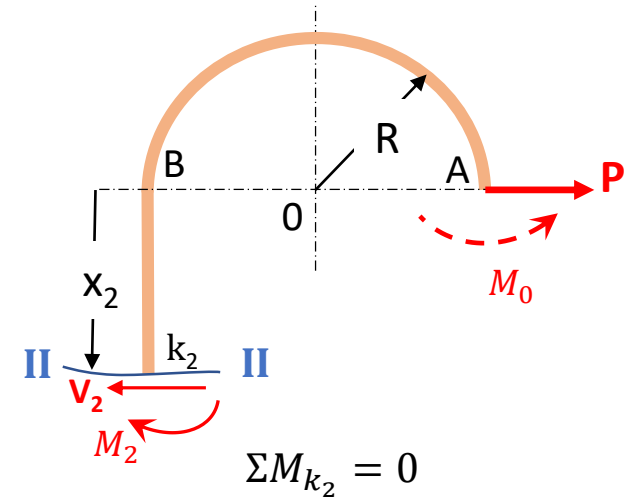
b-) A noktasının eğim açısını bulmak için yine A noktasına hayali bir tekil  $M_0$  dış eğilme momenti uygulanır. Bu durumda öncelikle her bölgedeki iç momentleri tekrar hesaplamamız gerekir.



$$\Sigma M_{k_1} = 0$$

$$-M_1 + M_0 + P \cdot R \cdot \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow M_1 = M_0 + P \cdot R \cdot \sin \theta \quad \rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial M_0} = 1$$



$$\Sigma M_{k_2} = 0$$

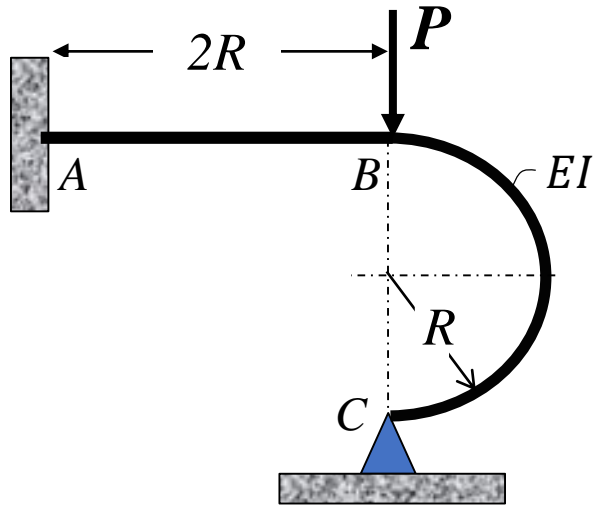
$$-M_2 - P x_2 + M_0 = 0$$

$$\rightarrow M_2 = M_0 - P x_2 \quad \rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial M_0} = 1$$

A noktasının eğimi yine 1nci Castigliano teoreminden (5.33.b ve 5.34.b denklemlerinin birleşiminden) bulunur:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EI} \left[ \int M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_0} \cdot ds \right] + \frac{1}{EI} \left[ \int_0^h M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_0} \cdot dx_2 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \int (M_0 + P \cdot R \cdot \sin \theta) 1 \cdot R d\theta \right] + \frac{1}{EI} \left[ \int_0^h (M_0 - P x_2) 1 \cdot dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{EI} P R^2 \left[ \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right] - \frac{P \cdot x_2^2}{2EI} \Big|_0^h = \frac{P R^2}{EI} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi - \frac{P \cdot h^2}{2EI} = -\frac{P R^2}{EI} (-1 - 1) - \frac{P \cdot h^2}{2EI} \rightarrow \theta_A = \frac{P}{2EI} (4R^2 - h^2) \end{aligned}$$

**Örnek 5.2.12** ([Video 5.2.c - Örnek 4](#)) Tüm ders anlatım videolarına : [www.mehmetzor.com](http://www.mehmetzor.com) sitesinden veya youtube kanalından erişebilirsiniz.



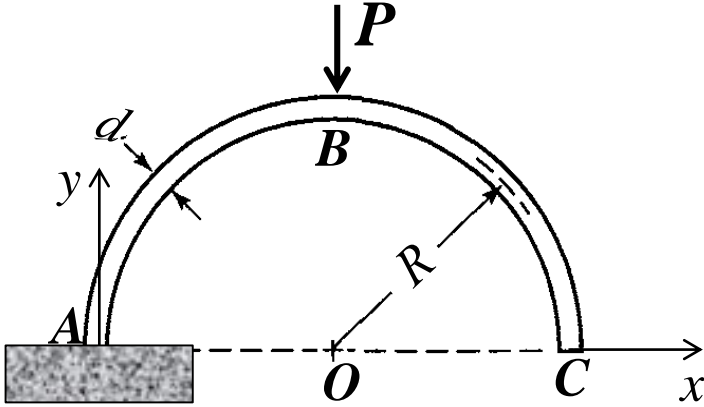
ABC çerçevesi, A noktasından ankastre ve C ucundan sabit mesnetle desteklenerek B noktasına düşey  $\mathbf{P}$  kuvveti uygulanmıştır. Buna göre

- (a) C noktasındaki mesnet tepkilerini bulunuz.  
 (b) B noktasında meydana gelen düşey yer değiştirmeyi hesaplayınız.

**Cevaplar:** a-)  $C_x = 0.233P$  ,  $C_y = 0.519P$       b-)  $\delta_{B_y} = 0.3503 \frac{PR^3}{EI}$

## Cevaplı Sorular

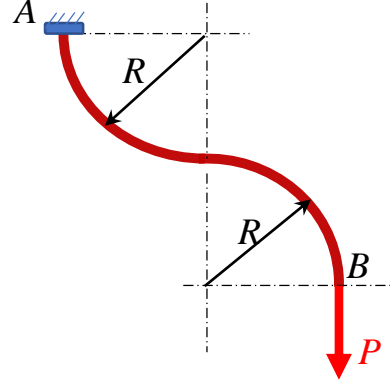
## Soru-1



Şekildeki yarı dairesel kirişin C ucunun düşey yer değiştirmesini hesaplayınız.

$$\text{Cevap: } v_C = (4 + \pi) \frac{PR^3}{4EI}$$

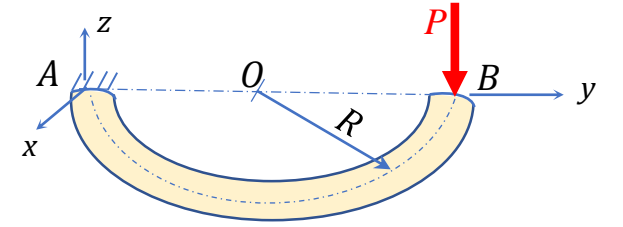
## Soru-2



Şekildeki eğrisel çubuğa B yönünde P düşey kuvveti etki ediyor. Buna göre, B noktasının düşey yer değiştirmesini (sehimini) hesaplayınız.

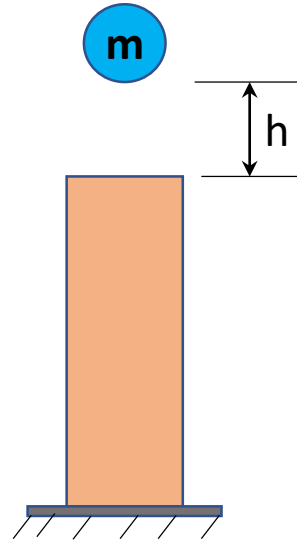
$$\text{Cevap: } v_B = \frac{3\pi PR^3}{2EI}$$

## Soru-3



x-y düzlemindeki yarı dairesel çubuk, A ucundan ankastredir ve B ucuna düşey P kuvveti uygulanmaktadır. Buna göre, B ucunun düşey sehimini hesaplayınız.

$$\text{Cevap: } v_B = \frac{\pi PR^3}{2} \left( \frac{3}{GJ} + \frac{1}{EI} \right)$$



## ENERJİ METODLARI

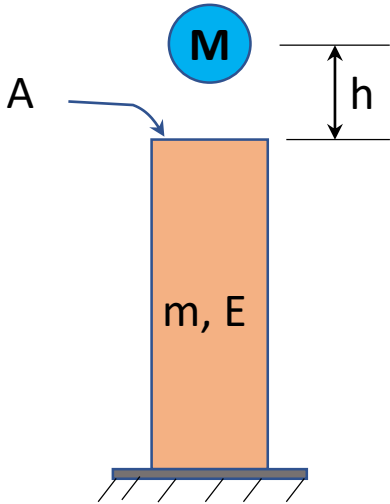
# 5.3 ELASTO KİNETİK ETKİLER

(Çarpma Sonucu Oluşan, Gerilme- Şekil Değişirme Hesapları)

**Bu Bölümde Amacımız:** Bir katı cismin üzerine aniden düşen veya uygulanan bir ağırlık sonucunda cisimde oluşan gerilme ve şekil değiştirmeleri hesaplamak ve statik durumdaki değerlerle karşılaştırmaktır. Konu örnekler üzerinden anlatılacaktır.

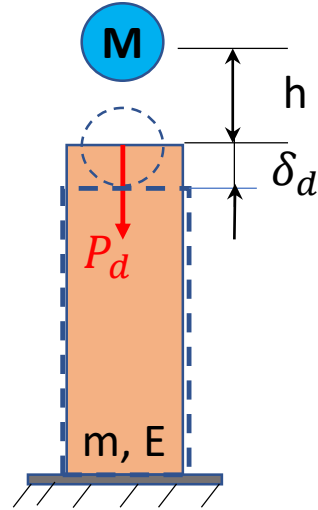
**Genel Çözüm mantığı:** Düşürülen kütle ilk enerjisi ile diğer cisme çarpar ve bir çarpma kuvveti oluşur. Bu kuvvetin çarpılan cisimde yaptığı iş, çarpılan cisimde şekil değiştirme enerjisine dönüşür. Sonuç olarak çarpan cismin ilk enerjisi çarpılan cisimde şekil değiştirme enerjisi olarak depolanır. Bir kısım enerji çarpışma sırasında kaybolabilir ancak bu ihmal edilir.

### Örnek 5.3.1



Boyutu ihmal edilebilen M kütleli bir cisim, m kütleli, E elastik modülüne ve A kesitine sahip bir çubuğun üzerine h yükseklikten düşürülüyor. Çubuktaki çökme miktarını hesaplayınız.

**Çözüm:** M kütlesi çubuğa çarptığında, bir çarpışma kuvveti oluşur. Kuvvet sıfırdan itibaren lineer olarak diyagramdaki gibi artar. Son konumda kuvvet  $P_d$  ve çökme  $\delta_d$  değerlerine ulaşır.



M kütlesinin İlk konumundaki potansiyel enerjisi:

$$U_1 = Mg(h + \delta_d) \quad (5.21)$$

$P_d$  çarpışma kuvvetinin yaptığı iş :

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \cdot \delta_d \quad (5.22)$$

Son konumda şekil değiştirme enerjisi:

$$U_2 = U_d = \frac{1}{2} P_d \cdot \delta_d$$

Eksenel yüklemde de çökme miktarı:  
(Muk .1- 3.3.a denklemi ile aynıdır)

$$\delta_d = \frac{P_d \cdot L}{AE} \quad (5.23)$$

(Dinamik çökme miktarı)

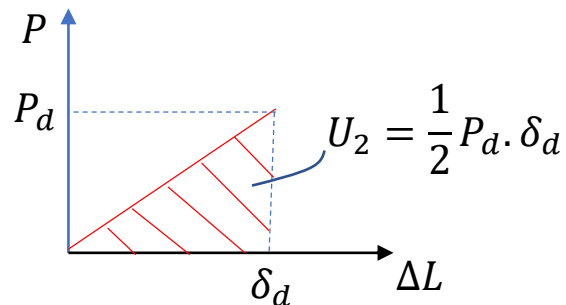
Statik yüklem olsaydı :

M kütlesi çubuk üzerine yavaşça koyulursa, statik yüklem söz konusu olur ve eksenel bası kuvveti ağırlık kuvvetine eşit olur.

$$P = P_s = Mg$$

$$\text{Bu durumda : } \rightarrow \delta_s = \frac{MgL}{AE} \quad (5.24)$$

(statik çökme miktarı)



Dinamik Yüklemede yani çarpmadaki enerji dengesini düşünürsek:  $U_1 - U_c = U_2$  (5.25)

$U_c$ : çarpışma sırasında kaybolan enerjidir.  $U_c \approx 0$  kabul edilir. Bu durumda enerji korunur:  $U_1 = U_2$  (5.26)

5.21 ve 5.22 denklemleri 5.26 denkleminde yerine koyulursa:  $Mg(h + \delta_d) = \frac{1}{2} P_d \cdot \delta_d$

$$\text{5.23 denkleminde} \quad \rightarrow P_d = \delta_d \frac{AE}{L} \quad \rightarrow Mg(h + \delta_d) = \frac{1}{2} \delta_d \frac{AE}{L} \cdot \delta_d$$

$$\text{Son eşitliği düzenlersek:} \quad AE\delta_d^2 - 2MgL\delta_d - 2MgLh = 0$$

2nci derecedeki bu son denklemin köklerini hesaplırsak:  $\delta_{d_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2MgL \pm \sqrt{(-2MgL)^2 - 4AE(-2MgL)}}{2AE}$

$$\text{(Denk.5.24)'den Statik çökme miktarı: } \delta_s = \frac{MgL}{AE} \pm \sqrt{\left(\frac{MgL}{AE}\right)^2 + 2h \frac{MgL}{AE}} = \delta_s \pm \sqrt{(\delta_s)^2 + 2h\delta_s} = \delta_s \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right]$$

Bulunan köklerden pozitifini alınmalıdır. Buna göre: çarpma sonucu çökme miktarı:  $\delta_d = \delta_s \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right]$  (5.27)

$$\text{Dinamik çarpan:} \quad \phi = \frac{\delta_d}{\delta_s} = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right] \quad (5.28)$$

$$\delta_d = \phi \cdot \delta_s \quad (5.29)$$

**Püf Noktası:** Farklı yükleme tipleri için aynı analiz yapılırsa 5.24 nolu denklem ( $\delta_s$  formülü) değişir fakat 5.28 ve 5.29 denklemleri değişmez

5.29 denklemini açarsak:  $\frac{P_d \cdot L}{AE} = \phi \frac{P_s \cdot L}{AE}$

Dinamik ve statik yüklemelerdeki kuvvetler için:

$$\rightarrow P_d = \phi P_s \quad (5.30)$$

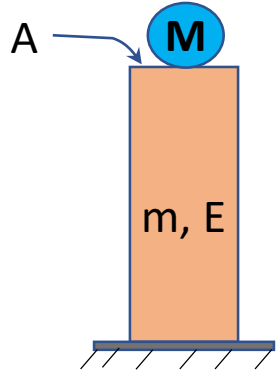
5.30 denkleminin her iki tarafını A alanına bölersek:

$$\rightarrow \frac{P_d}{A} = \phi \frac{P_s}{A} \quad \sigma_d \quad \sigma_s$$

Dinamik ve Statik yüklemelerdeki normal gerilmeler için:

$$\sigma_d = \phi \sigma_s \quad (5.31)$$

**Özel bir durum:**



*M sıfır yükseklikten aniden bırakılırsa:*

$$h = 0 \rightarrow 5.28 \text{ denkleminde dinamik çarpan: } \phi = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right] \rightarrow \phi = 2$$

5.31 denkleminde:  $\sigma_d = \phi \sigma_s = 2\sigma_s$  (gerilme statik duruma göre 2 katı çıkıyor)

5.29 denkleminde:  $\delta_d = \phi \cdot \delta_s = 2\delta_s$  (çökme miktarı statik duruma göre 2 katı çıkıyor)

**Çarpışma sırasında kaybolan enerji ( $U_c$ ) ihmal edilemezse:**

Dinamik çarpan denkleminde  $\xi$  terimi gelir. Şöyle ki:

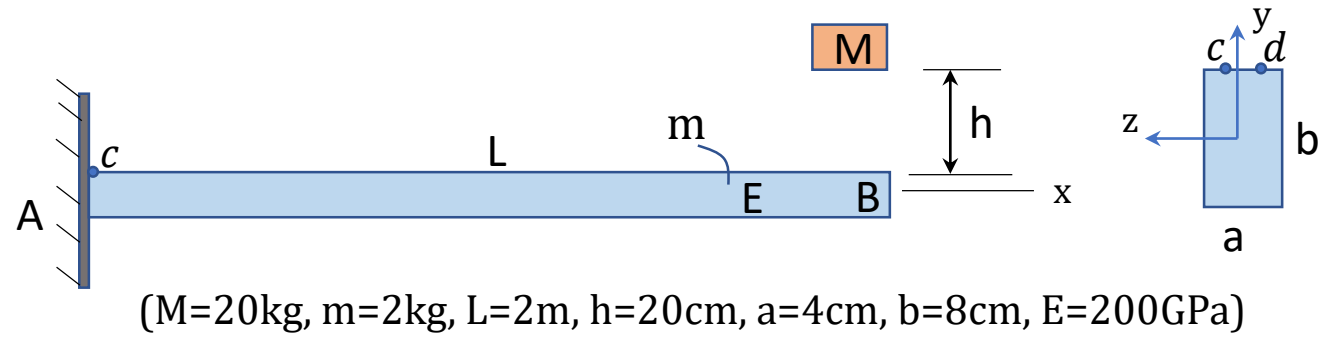
$$\phi = \left[ 1 + \sqrt{1 + \xi \frac{2h}{\delta_s}} \right] \quad (5.32)$$

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{olup } \xi \text{ şu denklemle hesaplanır: } \xi = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \quad (5.33)$$

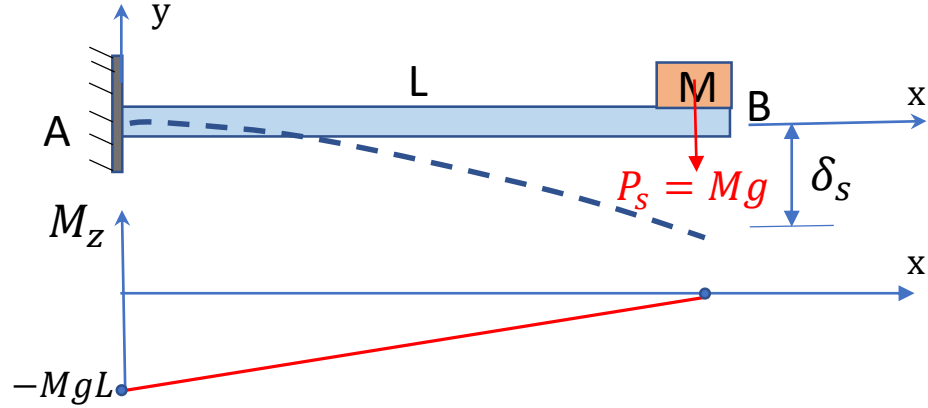
Çarpılan cismin kütlesi ihmal edilebilirse ( $m \approx 0$ ), 5.33 denkleminde  $\xi = 1$  bulunur. 5.32 ve 5.28 denklemleri aynı olur. Bu kaybolan enerji  $U_c$  nin ihmal edilebileceği anlamına gelir. ( $U_c \approx 0$ )

**Örnek 5.3.2**

Bir ucu ankastre olan 2kg kütleli kirişin serbest ucuna boyutları ihmal edilebilen bir M kütlesi h yüksekliğinden bırakıldığında kirişte oluşan maksimum gerilmeyi **a-)** kiriş kütleini ihmal ederek, **b-)** kiriş kütleini ihmal etmeden hesaplayınız.



**Çözüm:** Statik yükleme Durumu olsaydı: (M yavaşça B noktasına koyulursa):



M kütleinin boyutları ihmal edilebildiği için  $P_s$  kuvvetini sanki B uç noktasına etki eder gibi düşünebiliriz.

Maksimum gerilme A ucundaki kesitte y koordinatı  $b/2$  olan noktalarda (üst çizgi boyunca) oluşur:

$$\text{Muk.1 Denk. 5.1'den: } \sigma_{s_{max}} = -\frac{M_{z-A}}{I_z} y_c = -\frac{(-MgL)}{I_z} y_c$$

$$\sigma_{s_{max}} = -\frac{(-20 \times 9.81 \times 2000)}{1706667} \times 40 = \sigma_{x_c} = \sigma_{x_d} = 9.2 \text{ MPa}$$

$$I_z = I = \frac{ab^3}{12} = \frac{40 \times 80^3}{12}$$

(Eğilme momenti z yönünde olduğu için)

$$\rightarrow I = 1706667 \text{ mm}^4$$

B ucunun çökmesi:

(Örnek 3.2.1'de bulunmuştu.)

$$\delta_s = \frac{P_s L^3}{3EI} = \frac{MgL^3}{3EI}$$

$$\delta_s = \frac{20 \times 9.81 \times 2000^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times 1706667}$$

$$\rightarrow \delta_s = 1.53 \text{ mm}$$

**Dinamik Yükleme Durumu**

(M kütlei h yüksekliğinden bırakılırsa):

**a-)** m ihmal edilirse  $\xi=1$  ve enerji korunur.

Dinamik çarpan: Denk 5.28'den)

$$\phi = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right] = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 200}{1.53}} \right] = 17.2$$

$$\sigma_{d_{max}} = \phi \sigma_{s_{max}} = \sigma_{x_c} = 17.2 \times 9.2 = 158.23 \text{ MPa}$$

**b-)** m ihmal edilmezse enerji kaybı hesaba katılır.

$$\text{Denk. 5.33' den: } \xi = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{20}} = 0.91$$

Denk. 5.32' den:

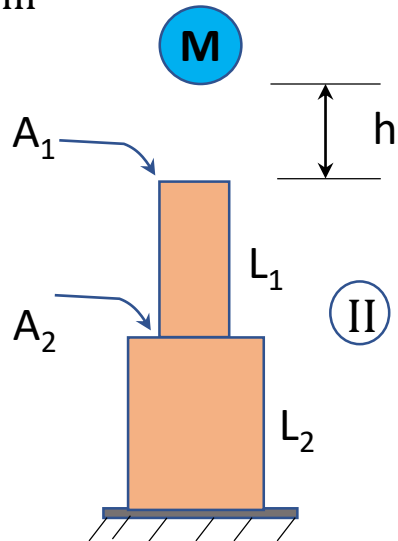
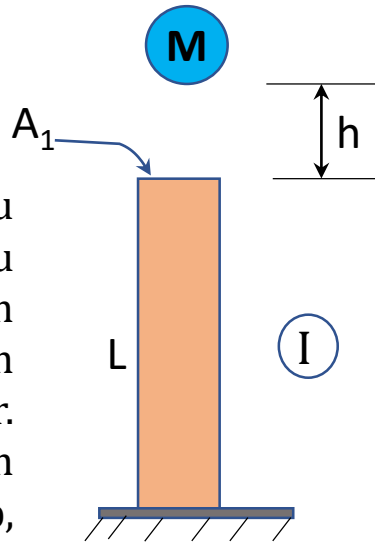
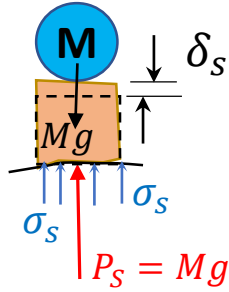
$$\phi = \left[ 1 + \sqrt{1 + \xi \frac{2h}{\delta_s}} \right] = \left[ 1 + \sqrt{1 + 0.91 \frac{2 \times 200}{1.53}} \right] = 16.4$$

$$\sigma_{d_{max}} = \phi \sigma_{s_{max}} = \sigma_{x_c} = 16.4 \times 9.2 = 150.88 \text{ MPa}$$

**Örnek5.3.3**

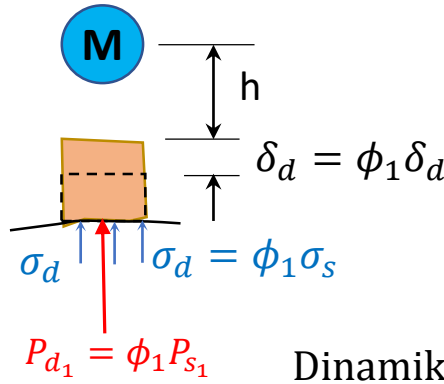
M kütleli cisimler, I nolu kadememiz ve 2 nolu kademeli direklerin üzerine aynı h yüksekliğinden bırakılıyor. Direkler aynı malzemeden imal edilmiş olup, kütleleri ihmal edilebilir. Buna göre direklerde oluşan maksimum gerilmeleri hesaplayınız.

$L=2m$ ,  $h=20cm$ ,  
 $L_1=1m$ ,  $L_2=1m$ ,  
 $M=50kg$ ,  $A_1=10cm^2$ ,  
 $A_2=50cm^2$ , direkler için  $E=80GPa$

**Çözüm:**

Statik yükleme gerilmesi:

$$\sigma_s = \frac{Mg}{A_1} = \frac{50 \times 9.81}{1000} = 0.4905 MPa$$



(5.31 denkleminde)

$$\text{Dinamik yükleme gerilmesi: } \sigma_d = \phi_1 \cdot \sigma_s = 183.57 \times 0.4905 \rightarrow \sigma_d = 90.04 MPa$$

$$\text{Dinamik yükleme çökmesi: } \delta_d = \phi_1 \delta_s = 183.57 \times 0.012 \rightarrow \delta_d = 2.2 mm$$

**I nolu direk için**Statik yükleme olsaydı

M kütleli yavaşça I nolu direğin üstüne bırakılırsa statik yükleme söz olurdu.

Statik çökme miktarını hesaplırsak:

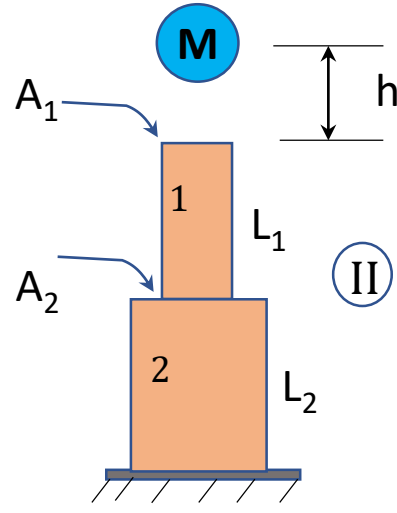
$$\delta_s = \frac{P_s \cdot L}{AE} = \frac{Mg \cdot L}{A_1 E} = \frac{50 \times 9.81 \times 2000}{1000 \times 80000} = 0.012 mm$$

Dinamik Yükleme:

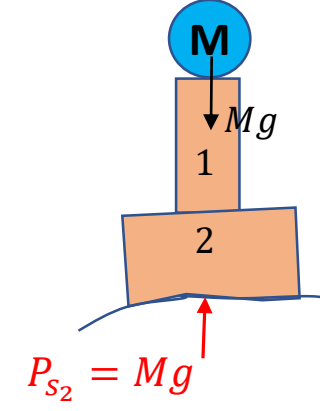
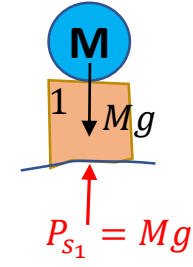
M kütleli h mesafesinden bırakılır.

Direklerin kütleleri ihmal edildiği için enerji korunur. ( $\xi=1$ )

$$\text{Dinamik çarpan: } \phi_1 = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right] = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 200}{0.012}} \right] = 183.57$$

**II nolu direk için (Direği iki bölgeye ayırırız.)****Statik yükleme:**

$L=2m, h=20cm,$   
 $L_1=1m, L_2=1m,$   
 $M=50kg, A_1=10cm^2,$   
 $A_2=50cm^2,$  direkler  
 için  $E=80GPa$



Statik çökme miktarı her bir bölgenin çökmelerinin toplamıdır.

$$\delta_s = \frac{P_{s1} \cdot L}{A_1 E} + \frac{P_{s2} \cdot L}{A_2 E} = \frac{Mg}{E} \left( \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} \right) = \frac{50 \times 9.81}{80 \times 1000} \left( \frac{1000}{1000} + \frac{1000}{5000} \right) = 0.00735 mm$$

Statik yükleme için max. gerilme:  $\sigma_{smax} = \frac{Mg}{A_1} = \frac{50 \times 9.81}{1000} = 0.4905 MPa$  (İç kuvvet bölgelerde aynı olduğu için kesiti küçük olan 1 nolu bölgede max. gerilme çıkar.)

**Dinamik yükleme:**

Dinamik çarpan:

$$\phi_2 = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} \right] = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 200}{0.00735}} \right] = 234.3$$

Dinamik yükleme gerilmesi:

$$\sigma_{dmax} = \phi_2 \cdot \sigma_{smax} = 234.3 \times 0.4905$$

$$\rightarrow \sigma_{dmax} = 114.92 MPa$$

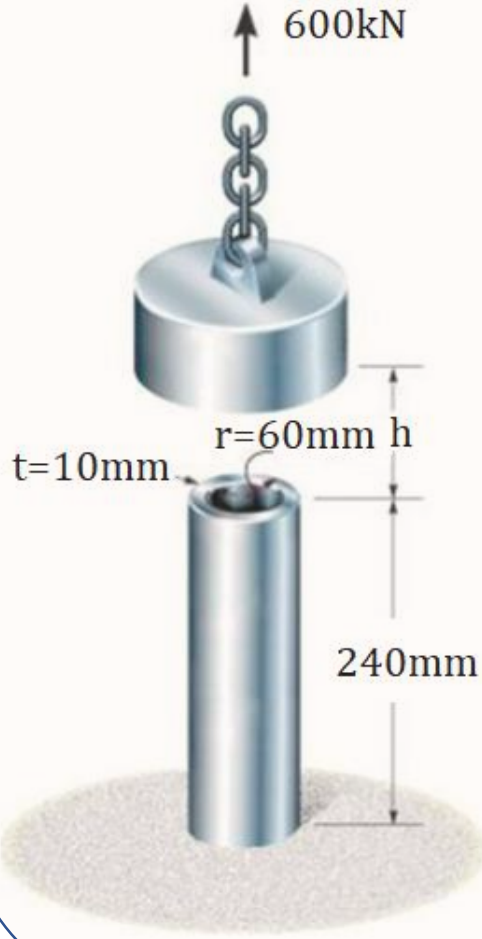
Dinamik yükleme çökmesi:

$$\delta_d = \phi_2 \delta_s = 234.3 \times 0.00735$$

$$\rightarrow \delta_d = 1.72 mm$$

## Cevaplı Sorular

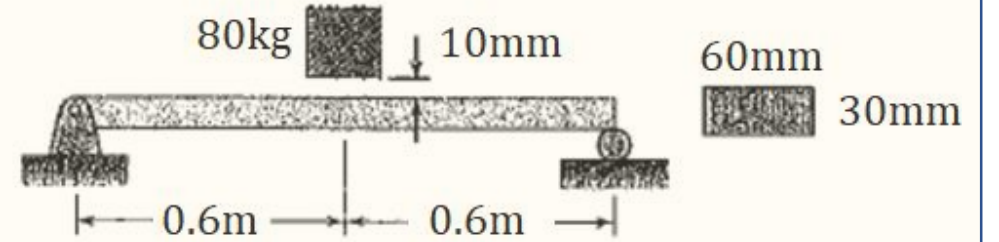
## Soru-1



Alt kısmı zemine sabitlenmiş bir Alüminyum borunun üzerine  $h = 0$  yükseklikten, 600kN luk bir yük aniden bırakılıyor. Alüminyum boruda oluşan çökme miktarını bulunuz. Çarpışma sırasındaki enerji kaybını ihmal ediniz. ( $E_{Al} = 70\text{GPa}$ )

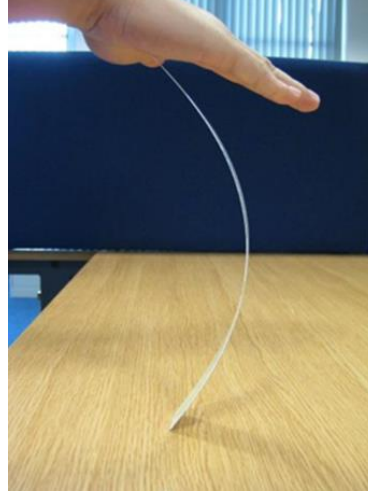
Cevap: 1.19 mm

## Soru-2



Bir çelik kirişin ortasına 10mm yükseklikten 80 kg lık bir kütle düşürüldüğünde, kirişte oluşacak maksimum normal gerilmenin yerini ve şiddetini hesaplayınız. (Çelik için:  $E=200\text{GPa}$ ).

Cevap: orta kesitte, 143.5MPa



(Buckling of Columns)

**6.a**

**KOLONLARIN**

**BURKULMASI-1**

**(Örneklı Konu Anlatımı - Euler ve Tetmajer Formülleri)**

## 6.1 Kolon Nedir?:

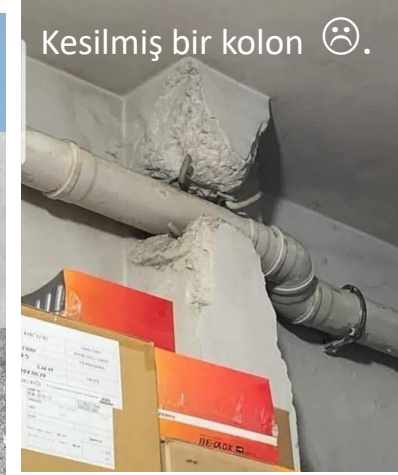
Düşey eksenli taşıyıcı çubuk elemanlara kolon denir. Yapıların statüğünde ve sağlamlığında hayati önem taşıyan kolonlar genellikle eksenli yönünde bası yüklerine maruz kalır.



(a)



(b)



(c)

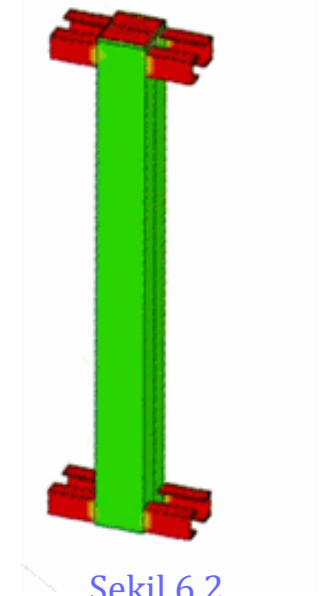
Şekil 6.1

## 6.2 Burkulma Nedir?

Bir kolonun (veya bir çubuk elemanın) eksenli yönünde bası yüküne maruz kalması sonucu, akma (veya gevrek malzemelerde kırılma) sınırından önce, yanal olarak eğilmesine burkulma denir.

Bu sebeple bu tip çubukların tasarımı yapılırken, sadece akma/kırılma sınırı değil burkulma sınırının da göze alınması son derece önemlidir.

İşte **bu konuda amacımız**, kolonların burkulma sınırlarını (kritik burkulma yüklerini) teorik olarak hesaplamamızı sağlayacak formüllerin çıkarılmasıdır. Son kısımda çeşitli örneklerle konu pekiştirilecektir.



Şekil 6.2

## 6.3 Kolonların Sınıflandırılması :

Kolonları hasar şekillerine göre (akma veya burkulma durumuna göre ) kalın ve ince kolon olmak üzere ikiye ayırabiliriz.

### a-) Kalın Kolonlar

Bir kolon yeterince kalınsa, bası yükünü akma sınırına kadar taşır.

Akmadan önce:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Burkulmadan önce

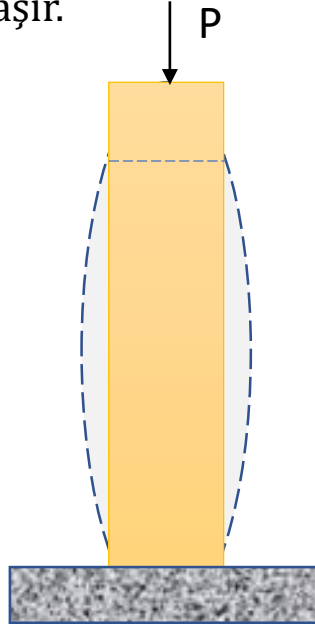
Akma Anında:

$$\sigma = \sigma_{ak} = \frac{P_{ak}}{A}$$

$\sigma_{kr}$  :Burkulma anındaki gerilme

$$(\sigma_{kr} > \sigma_{ak})$$

Şekil 6.3



Bu durumda mukavemet hesapları akma sınırına göre yapılır.

Not: Gevrek kolonlarda akma çok az miktardadır. Bu sebeple akma sınırı yerine kırılma anı dikkate alınır.

### b-) İnce Kolonlar

Bir kolon yeterince ince ise, aksenal bası yükü sonucunda akma sınırına ulaşmadan önce yanal olarak eğilir yani burkulur.

Burkulmadan önce:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

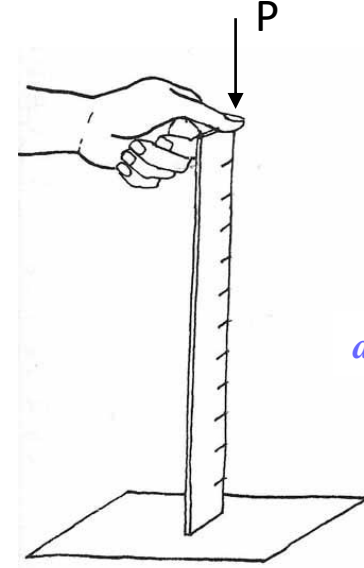
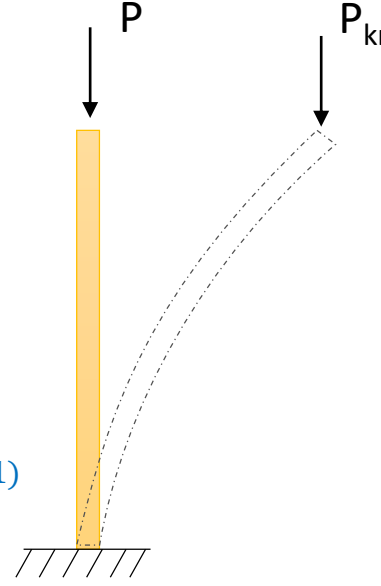
Akmadan önce

Burkulma Anında:

$$\sigma = \sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} \quad (6.1)$$

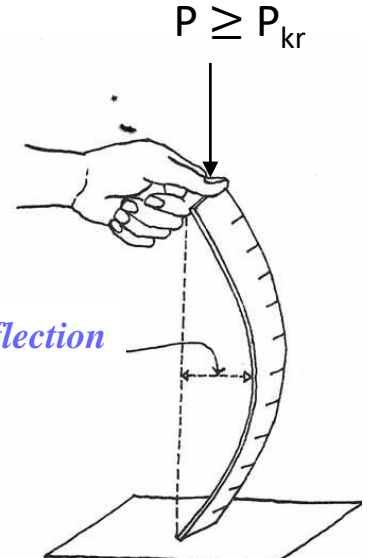
$$(\sigma_{kr} < \sigma_{ak})$$

Şekil 6.4



$$\sigma < \sigma_{kr}$$

Şekil 6.5a



$$\sigma \geq \sigma_{kr}$$

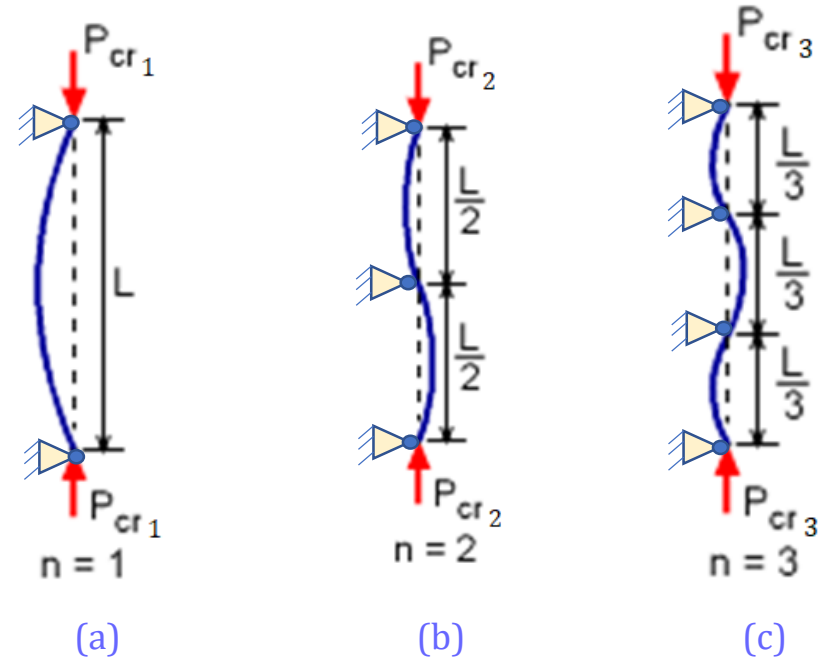
Şekil 6.5b

Bu durumda ise mukavemet hesapları burkulma sınırına göre yapılmalıdır.

- Bunun için ise kolonun kritik burkulma yükü ( $P_{kr}$ ) veya gerilmesi  $\sigma_{kr}$  hesaplanabilmelidir.
- Kritik yüklerin hesabı malzeme özelliklerinden başka kolon boyutlarıyla da yakından ilişkilidir.
- Genel anlamda ise kolon tasarımı hem bası hem burkulma dikkate alınarak yapılmalıdır.
- Bundan sonra bu tespitlerin teorik olarak nasıl yapıldığı anlatılacaktır...>>

## 6.4. Burkulma ile İlgili Püf Noktalar:

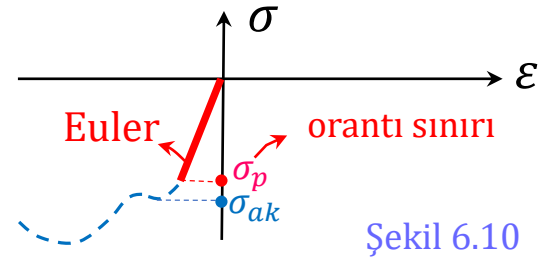
1. Akma Gerilmesi ( $\sigma_{ak}$ ) sadece malzeme cinsine bağılı olmasına rağmen; Burkulma gerilmesi ( $\sigma_{kr}$ ) malzeme cinsine, geometriye ve sınır şartlarına bağılı değişiklik gösterir.
2. Akma Gerilmesi ( $\sigma_{ak}$ ) sadece deneysel olarak bulunabilir, Burkulma gerilmesi ( $\sigma_{kr}$ ) ise deneysel ölçümlerin yanısıra teorik olarak da hesaplanabilir.
3. Burkulmada bası yükleri ve bası gerilmeleri söz konusudur ancak hesaplamalarda işaretleri + olarak alınır.
4. Sınır şartlarına bağılı olarak çubuğun burkulması farklı modlarda gerçekleşebilir ve herbir modda kiriş farklı bir deformasyon şekline sahip olabilir. Genel anlamda en kolay 1nci modda burkulur. Herbir mod için farklı bir kritik burkulma yükü söz konusudur.
5. Düzlemlere göre sınır şartı farkı yoksa, kolon öncelikle minimum asal atalet eksenini etrafında dönmeye çalışır yani burkulur.  
(Bu madde 6.1.1 konusunda daha detaylı açıklanmıştır.)



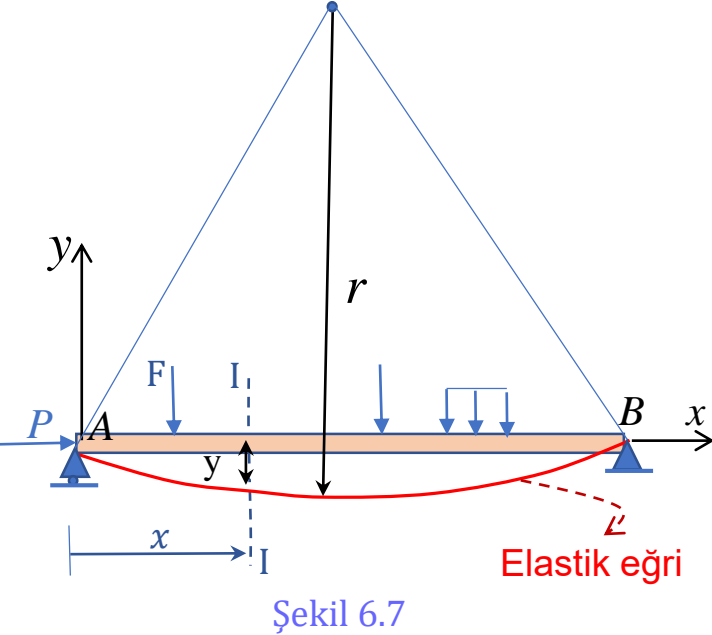
Şekil 6.6

## 6.5 Elastik Eğri Benzeşimi ile Euler Burkulma Yaklaşımı

- Bu yaklaşım, eğilmeye maruz kirişlerin elastik eğrisindeki kabul ve denklemleri esas alır,
- Eksenel yüklerdeki burkulmayı, yanal bir elastik eğri gibi düşünür ve
- Kritik burkulma yüklerini farklı sınır şartları için hesaplamamızı sağlar.
- Bu hesaplamalar Hooke kanununun geçerli olduğu orantı sınırına kadar (bası eğrisinin doğrusal kısmı için) geçerlidir.



3.1 nolu Elastik Eğri konusunda anlatıldığı üzere düşey yüklü bir kiriş düşünelim. Bu kirişe ayrıca eksenel yatay bir P kuvveti etki etsin.:

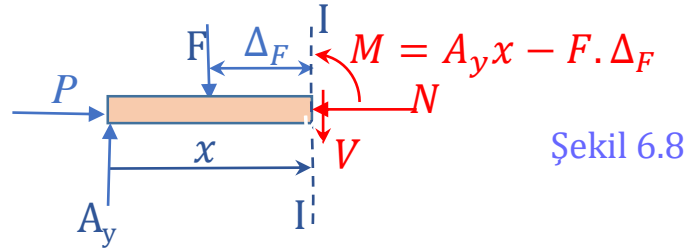


3.1 denkleminde Kirişin eğriliği:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

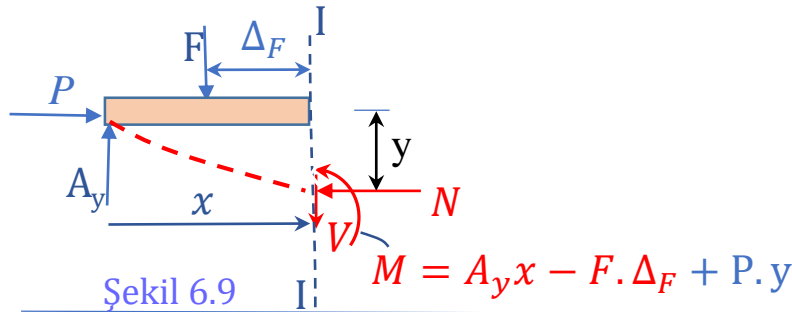
Kirişin **şekil değiştirmemiş** hali dikkate alınırsa

- \* Eğilme iç momenti  $M$ 'in üzerinde  $P$ 'nin etkisi yoktur.
- \* Eğilme ve elastik eğri konularında bu kabul yapılmıştır.



Kirişin **şekil değiştirmiş** hali dikkate alınırsa

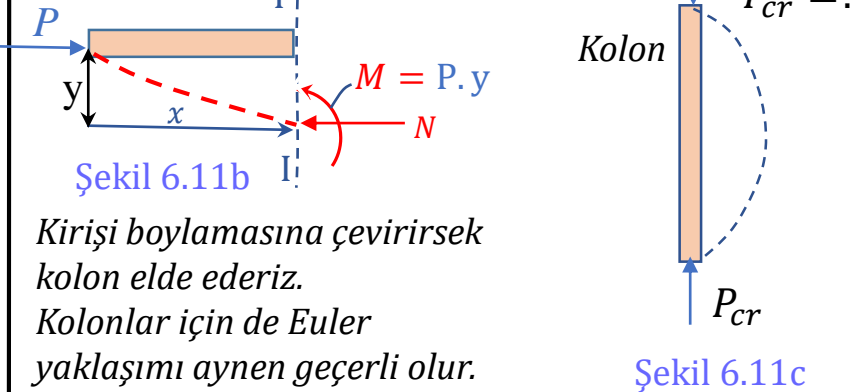
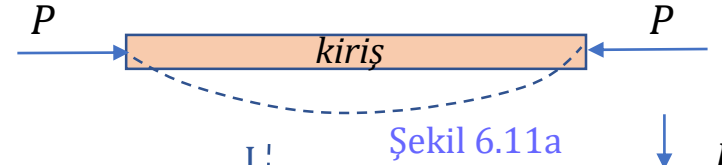
- \*  $M$ 'in üzerinde  $P$ 'nin etkisi vardır. Şöyleki:



\*3.1 denklemini yukarıdaki her iki durum için de geçerlidir.

Euler yaklaşımında:

- Kirişin elastik eğrisinin şekil değiştirmiş hali dikkate alınır.
- Sadece kiriş eksenine doğrultusunda P bası kuvveti olduğunu kabul edilir.



Kirişi boylamasına çevirirsek kolon elde ederiz. Kolonlar için de Euler yaklaşımı aynen geçerli olur.

Şimdi Euler yaklaşım mantığından hareketle farklı sınır şartlarına sahip kolonlar için  $P_{cr}$  yüklerini elde edeceğiz...>>

## 6.6 Farklı Durumlar için Euler Burkulma Formülleri

### 6.6.1 Alt ve üst uçları küresel mafsallı ve üst ucu ayrıca kayabilir kolon

$L$  uzunluğunda,  $P$  aksel kuvvetine maruz kolon düşünelim. Kesit simetriktir ve asal atalet eksenleri  $z$  ve  $y$  dir.  $I_z < I_y$  dolayısıyla minimum asal atalet momenti  $I_{\min} = I_z = I$  olur. Kolon bu düzlemde  $z$  eksenini etrafında döner yani burkulur ve  $y$  yönünde bir yanal deplasman oluşur.

I-I kesiminin şekil değiştirmiş halinin dengesinden  $\Sigma M_c = 0 \rightarrow P \cdot y + M = 0 \rightarrow M = -P y$

3.1 denklemden: 
$$\rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EI} = -\frac{P y}{EI} \quad ; \quad \frac{P}{EI} = k^2 \text{ olarak tanımlarsak}$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

Bu sabit katsayısı homojen diferansiyel denklemin genel çözümü:  $y = A \cos kx + B \sin kx$  şeklindedir.

A ve B sabitlerini sınır şartlarından bulabiliriz: Mesnetlerde bir yanal deplasman olmayacağından;

$$x=0 \text{ için } y = 0 = A \cos(k0) + B \sin(k0) = A \cdot 1 + 0 \rightarrow A=0$$

$$x=L \text{ için } y = 0 = B \sin kL = 0 \rightarrow B \sin(kL)=0 \left. \begin{array}{l} \text{Burada } B \text{ sıfır olamaz (} B \neq 0 \text{). Çünkü } A=0 \text{ olduğundan her durumda } y=0 \text{ çıkar ki burkulmanın} \\ \text{hiçbir zaman olmayacağı anlamına gelecektir ki bu da olamaz. O halde } \sin(kL)=0 \text{ olmalıdır.} \end{array} \right\}$$

$P$  yavaş yavaş arttırılır,  $k$  değeri de artar ve  $P = P_{kr}$  değerine eriştiğinde burkulma oluşur ve burkulma anında:  $k^2 = \frac{P_{kr}}{EI}$  ve  $\sin(kL)=0$  olur.

**Bu durumda  $kL = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$  değerlerinden birisi olmalıdır.**

(burkulma mod numarası:  $n=1, 2, 3, \dots$ )

$$kL = n\pi \text{ alınırsa: } k = \frac{n\pi}{L} \rightarrow k^2 = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P_{kr}}{EI}$$

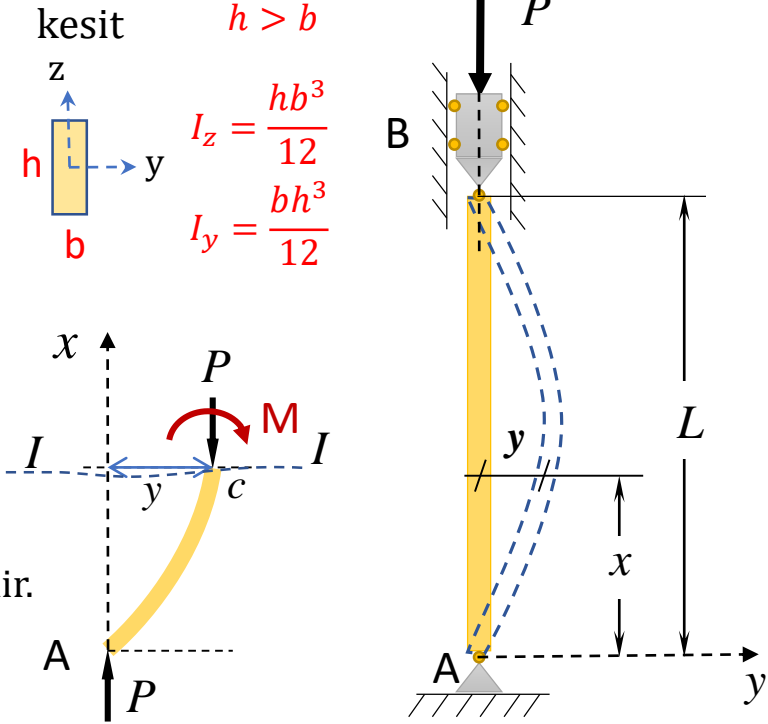
$n$  değeri sınır şartlarına göre değişir.

n nolu modda burkulma yükü:

İlk modda ( $n = 1$ )

2nci modda ( $n = 2$ )

$$P_{kr-2} = 2^2 P_{kr-1} = 4P_{kr-1}$$



Şekil 6.12

$$P_{kr-n} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.2)$$

$$P_{kr-1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.3)$$

### 6.6.2 Alt ucu ankastre, üst ucu serbest kolon

I-I kesiminin şekil değiştirmiş halinin üst kısmının dengesinden:  $\Sigma M_e = 0 \rightarrow -P(\delta - y) + M = 0$

$$M = P(\delta - y) \quad \text{3.1 denkleminde:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EI} = \frac{P(\delta - y)}{EI} \quad \text{yazılabilir.}$$

Burada yine:  $\frac{P}{EI} = k^2$  alınırsa:  $y'' + k^2y = k^2\delta$  (sabit katsayısı homojen dif. denklem)

$$\begin{aligned} \text{Bu dif. denklemin genel çözümü:} \quad y &= C\cos kx + D\sin kx + \delta && \text{(sehim denklemi)} \\ y' &= -Ck\sin kx + Dk\cos kx && \text{(eğim denklemi)} \end{aligned}$$

Ankastre uçta eğim ve sehim sıfırdır:

$$x=0 \quad \text{için} \quad y' = \frac{dy}{dx} = 0 = -Ck\sin 0 + Dk\cos 0 \quad \text{-----} \rightarrow D=0$$

$$x=0 \quad \text{için} \quad y=0 = C\cos 0 + D\sin 0 + \delta \quad \text{-----} \rightarrow C = -\delta \quad \text{bulunur.}$$

$$y = \delta(1 - \cos kx)$$

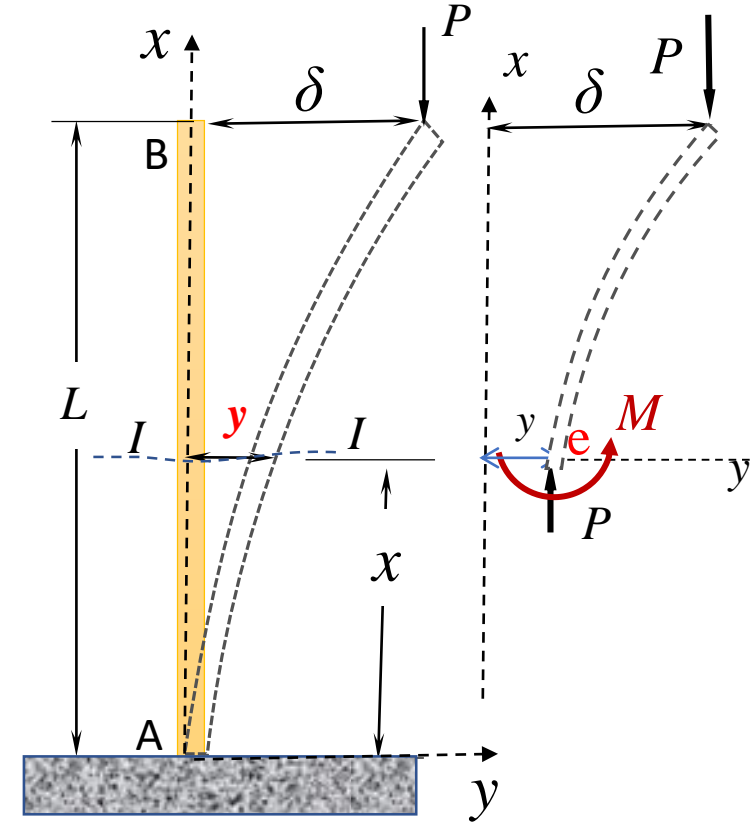
P yavaş yavaş arttırılır.  $P < P_{kr}$  değerine kadar bir y deplasmanı yani burkulma oluşmaz.  $P = P_{kr}$  değerine ulaştığı anda B noktasında  $x=L$  için  $y = \delta$  olacaktır ve bu anda burkulma oluştuğu söylenebilir.

0 halde burkulma anında:

$$\delta = \delta(1 - \cos kL) \rightarrow \cos kL = 0 \rightarrow kL = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \dots = \frac{n\pi}{2}, \quad n = (1, 3, 5, \dots)$$

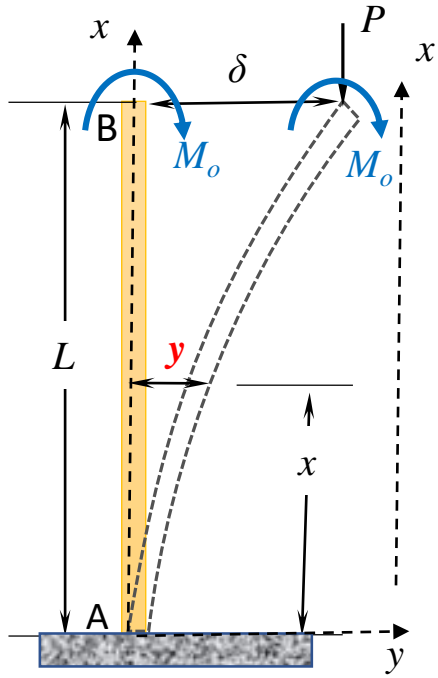
$$\text{İlk burkulma modu } n = 1 \text{ için} \quad kL = \frac{\pi}{2} \rightarrow kL = \frac{\pi}{2} \rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} = \frac{P_{kr-1}}{EI}$$

$$P_{kr-1} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (6.4)$$



Şekil 6.12





Şekil 6.13.b

$$\left(\frac{P}{EI} = k^2\right)$$

Bulduğumuz denklemleri tekrar yazalım:

$$\text{Sehim (çökme) denklemi: } \rightarrow y = C\sin(kx) + D\cos(kx) + \frac{M_o + P\delta}{P}$$

$$\text{Eğim açısı denklemi: } \rightarrow y' = Ck\cos(kx) - Dk\sin(kx)$$

Şimdi sınır şartlarından C ve D sabitlerini bulalım.

Ankastre uçta, hem sehim hem eğim değeri sıfır olur.

$$x=0 \text{ için } y' = \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow Ck\cos(0) - Dk\sin(0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$x=0 \text{ için } y = 0 \rightarrow D\cos(0) + \frac{M_o + P\delta}{P} = 0 \rightarrow D = \frac{M_o + P\delta}{P}$$

$$y = \frac{M_o + P\delta}{P} [1 - \cos(kx)]$$

$$\text{Serbest uçtaki sehim: } x=L \text{ için } \rightarrow y = \delta = \frac{M_o}{P} \left( \frac{1}{\cos kL} - 1 \right) \rightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{P}{M_o} \left( \frac{\cos kL}{1 - \cos kL} \right)$$

Burkulma anının tespiti:

P arttırılır, bu sırada k terimi de artar. y deplasmanı oluşmaya başlar.

$$kL = \frac{\pi}{2} \text{ olduğu anda: } \cos kL = 0 \rightarrow \frac{1}{\delta} = 0 \text{ ve } \delta \rightarrow \infty \text{ olur.}$$

(Bu sebeple burkulmanın bu anda oluştuğu kabul edilir.)

Burkulma anında:

$$kL = \frac{\pi}{2} \text{ ve } P = P_{kr}$$

$$\rightarrow k^2 L^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{P_{kr}}{EI} L^2$$

$$\rightarrow P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Dikkat edilirse 6.6.2 maddesinde anlatılan sadece P'nin olduğu durumdaki, (6.4 denklemindeki) aynı kritik burkulma yükünü bulduk. O halde :M<sub>o</sub> momentinin burkulma yüküne etkisi yoktur diyebiliriz.

## 6.7 Euler Burkulma Formülünün Genelleştirilmesi :

Aşağıdaki Şekil 6.14 de gösterilen tiplerin her birisi için benzer şekilde kritik burkulma yükleri hesaplanır ve yandaki gibi genel formüller yazılabilir:..>>

Denklemlerdeki  $L_e$  : etkin uzunluk olup, kolon tipine göre farklılık gösterir.

Ayrıca farklı sınır şartları için de benzer çözümler yapılarak  $P_{cr}$  ve  $\sigma_{cr}$  hesaplanabilir.

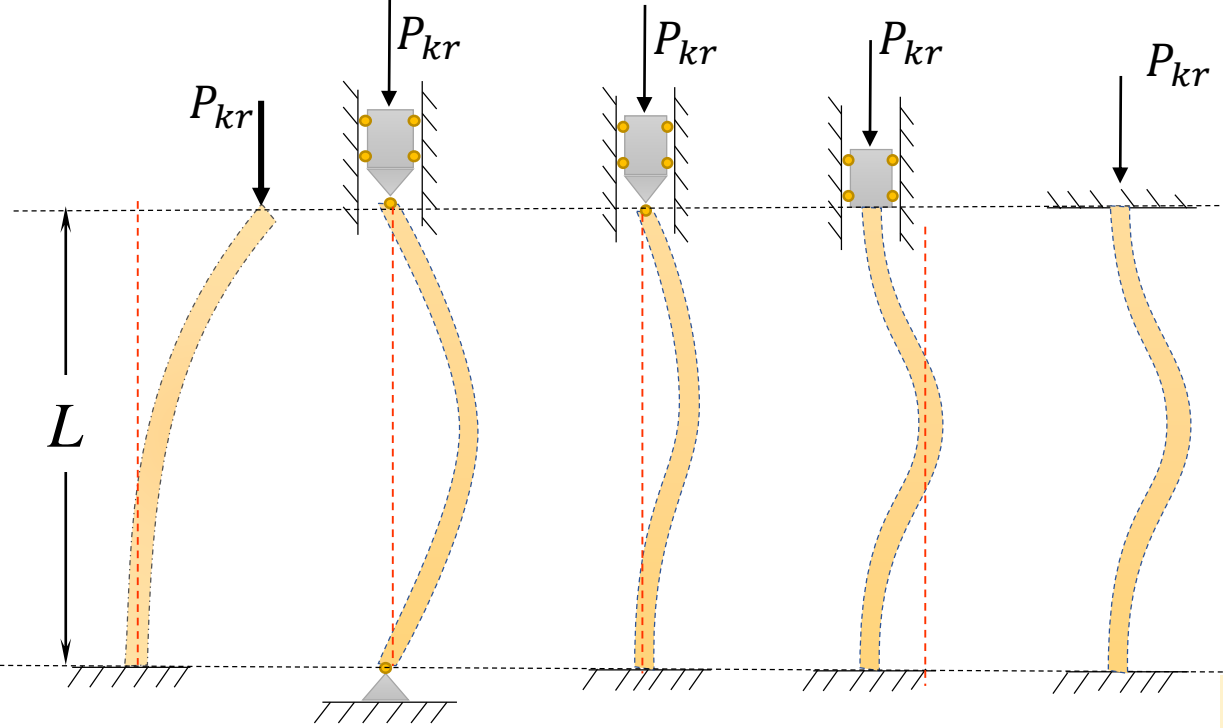
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (6.5)$$

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2 A} \quad (6.6)$$

Tablo 6.1

Tip No	Etkin Uzunluk ( $L_e$ )	Kritik Burkulma Yükü $P_{kr}$
1	$2L$	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ (6.7a)
2	$L$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (6.7b)
3	$\sqrt{0.5} L \cong 0,7L$	$\frac{2\pi^2 EI}{L^2}$ (6.7c)
4 ve 5	$0.5 L$	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ (6.7d)

$I$  : Burkulma eksenini dediğimiz kirişin etrafında dönmeye çalıştığı eksene göre atalet momentidir. Küresel mafsallı ve ankastre bağlantılarda, kiriş minimum asal atalet eksenini etrafında dönmek ister ve  $I = I_{min}$  olur. Düzlem mafsalda ise  $I$  değeri  $I_{min}$  dan farklı olabilir.



	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Üst:	Serbest	Küresel veya Düzlem Mafsallı	Küresel veya Düzlem Mafsallı	Ankastre Kayar	Ankastre
Alt:	Ankastre	Küresel veya Düzlem Mafsallı	Ankastre	Ankastre	Ankastre

Şekil 6.14

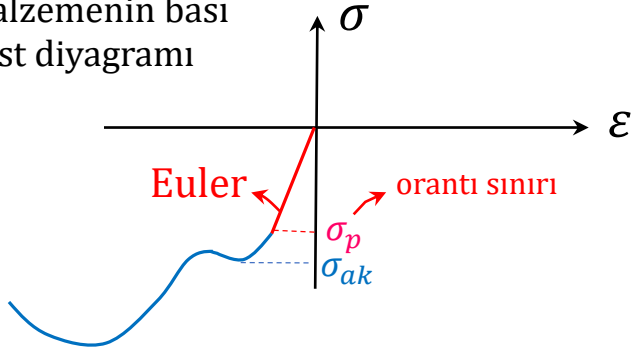
**Düzlem mafsallı** düzlemine dik doğrultuda serbestçe dönmeye izin vermez ve ankastre gibi davranır. Bu sebeple dik yön için  $L_e = 0.5L$  alınır. Burkulma kontrolü dik yön içinde yapılmalıdır. (tablodaki tip 2 için olan  $L$  değeri düzlem mafsallı kendi düzlemi içindir.)

**Küresel mafsallı ve ankastre** bağlantılarda diğer yönlerde farklı bir sınırlandırma getirmez ve tablodaki  $L_e$  değerleri değişmez. Burkulma kesitin minimum asal atalet eksenini etrafında gerçekleşir. Bu durumlar ileride izah edilecektir.

**6.8 Narinlik Oranı ( $\lambda$ ) :**

Çubuğun geometrisine bağılı bir özelliğı olup şu şekilde tanımlanır:

$$\lambda = \frac{L_e}{i} \quad (6.8)$$

Malzemenin bası  
Test diyagramı

Şekil 6.15.a

6.8 denklemindeki  $i$  terimi atalet yarıçapıdır:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (6.9)$$

Bu durumda 6.6 Euler genel denklemindeki kritik burkulma gerilmesi 6.10 denklemindeki gibi ifade edilebilecektir:

**Orantı Sınırına kadar:** $(\sigma_{kr} \leq \sigma_p \text{ veya } \lambda \geq \lambda_p)$ 

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (6.10)$$

Orantı sınırında ( $\sigma_{kr} = \sigma_p$ ) narinlik oranının kritik değeri:

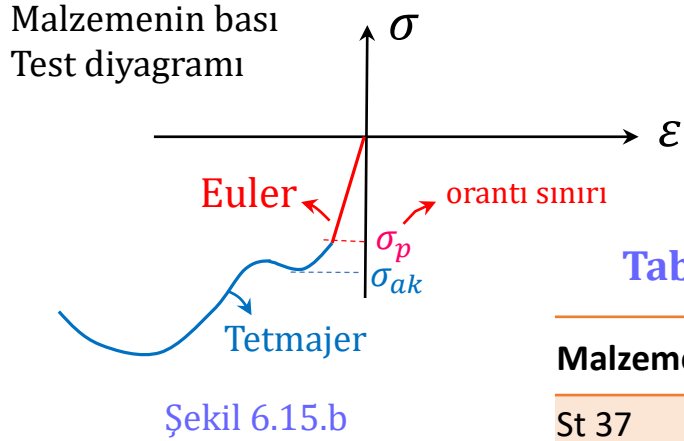
$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (6.11)$$

*Dikkat: Euler formülleri (6.2-6.11 denklemleri) orantı sınırına kadar geçerlidir.*

(Çünkü Euler formüllerinin dayanağını oluşturan elastik eğri benzeşimindeki 5.3 denkleminin çıkarımında Hooke bağıntısı kullanılmıştır.)

## 6.9 Tetmajer Amprik Denklemi

Orantı sınırı aşıldığı zaman burkulma yükü hesaplarında deneysel verilerle elde edilmiş olan Tetmajer Amprik Denklemi (Denklem 6.12) kullanılır:

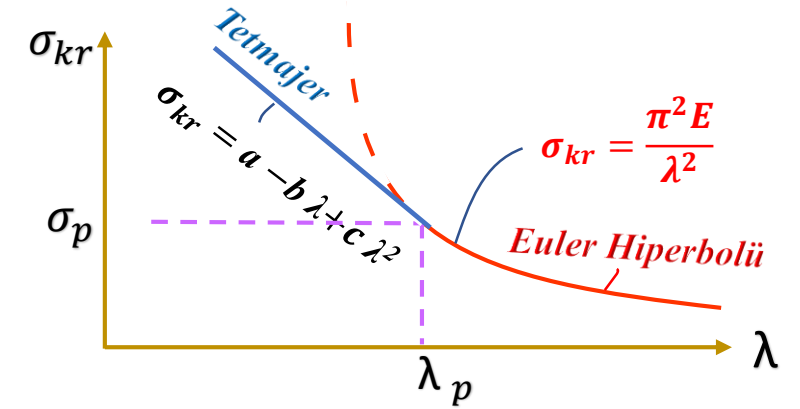


Tablo 6.2 Tetmajer Amprik Denklemi sabitleri

Malzeme	a	b	c	E (GPa)	$\sigma_p$ (MPa)	$\lambda_p$
St 37	310	1	0	210	190	104
St 50 – St 60	335	0.62	0	210	260	89
%5-Ni-Çelik	470	2	0	210	280	86
Kır döküm (GG)	776	12	0.053	100	154	80

Orantı Sınırı Aşıldığında:  
( $\sigma_{kr} > \sigma_p$  veya  $\lambda < \lambda_p$ )

$$\sigma_{kr} = a - b \lambda + c \lambda^2 \quad (6.12)$$



### Niçin «Tetmajer doğrusu» denir?

Tetmajer denklemi 2nci dereceden olmasına rağmen Tablo 6.2 den görüleceği üzere c sabiti birçok malzeme için sıfırdır. Tetmajer denklemi genelde doğrusal olur ve bu sebeple tetmajer doğrusu da denilebilir.

- $\sigma_{kr}$  : dış yüklerden bağımsız olup, kolon malzemesi ve geometrisinin bir özelliğidir ve euler veya tetmajer bölgesinden birisinde olabilir ancak cismin üzerindeki gerçek gerilme ( $\sigma = P/A$ ) aynı bölgede olmak zorunda değildir.
- Eğer orantı sınırı belli değilse  $\sigma_p \cong \sigma_{ak}$  alınabilir.
- Koordinatları ( $\lambda_p, \sigma_p$ ) olan nokta Euler hiperbolü üzerindedir fakat Tetmajer doğrusu üzerinde olmayabilir. Bu sebeple bu nokta için 6.10 denklemi geçerli olsa da, 6.12 denklemi sağlanmayabilir.

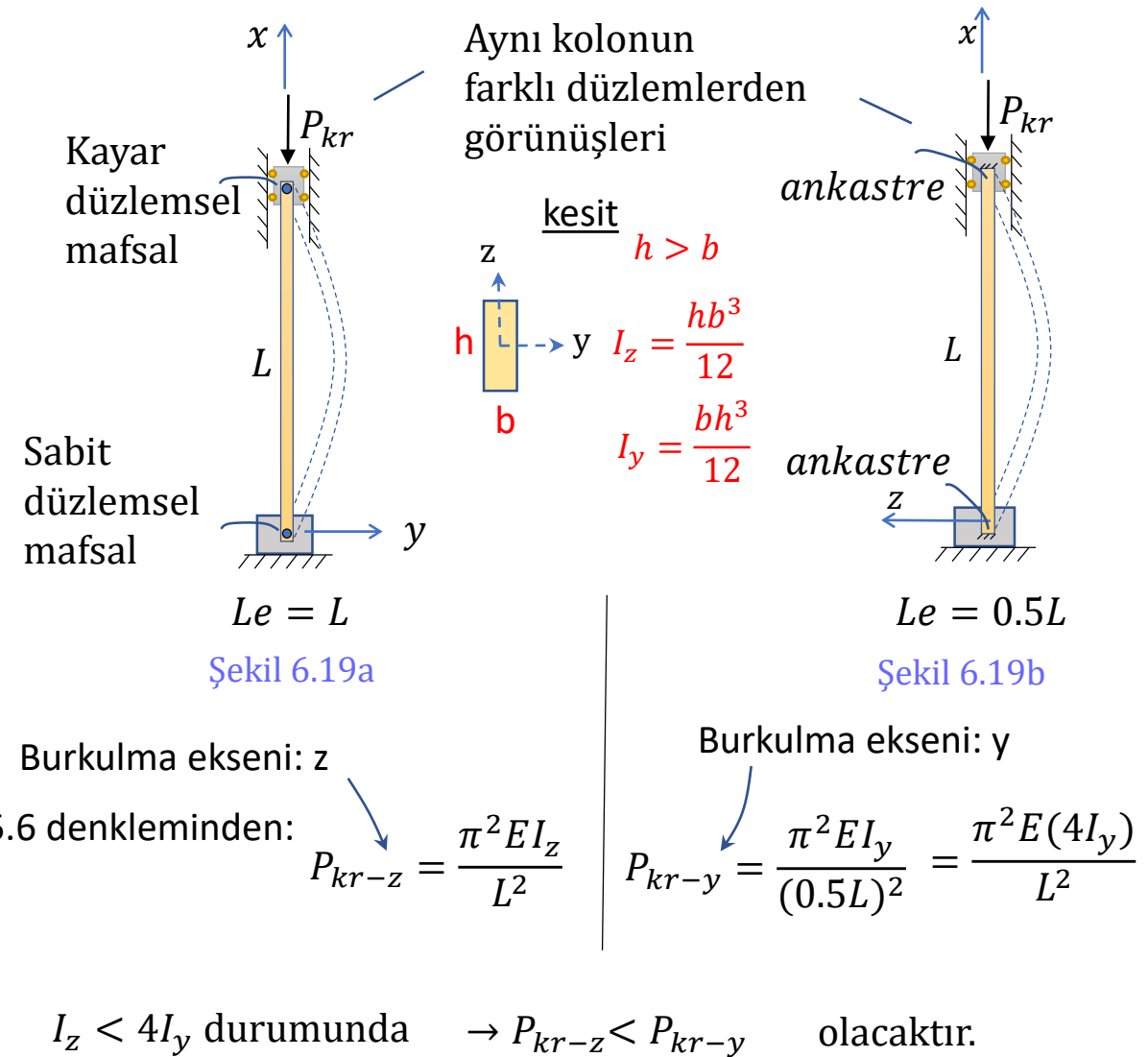


### 6.10.2) Sınır Şartlarının Yöne Göre Değişmesi Durumunda Burkulma Eksenî Tespiti (Düzlemsel Mafsallar)

Düzlem mafsal gibi bağlantılar, kendi düzleminde (veya başka ifadeyle düzleme dik eksen etrafında) dönmeye izin vermesine rağmen, dik düzlemde (düzleme paralel eksenler etrafında) dönmeye izin vermezler.

Dolayısıyla dik düzlemde ankastre gibi davranırlar. Kendi düzlemi için dönmeye izin verdiği için etkin uzunluk  $Le=L$  ve simetrik kesitli kirişlerin burkulma eksenî (kirişin etrafında dönmek istediği eksen)  $z$  dir.

Ancak dik düzlemde ankastre davranış dolayısıyla  $Le=0.5L$  ve burkulma eksenî  $y$  olacaktır. Kendi düzleminde  $I=I_z$ , dik düzlemde ise  $I=I_y$  alınmalıdır. Her iki düzlemde hesaplanan kritik burkulma yüklerinden hangisi küçük ise kritik burkulma yükü ( $P_{kr}$ ) değeri olur. Veya  $\sigma_{kr}$  değeri küçük olan düzlemde ilk olarak burkulma olur diyebiliriz.



Bu durumda Önce  $x$ - $y$  düzleminde yani  $z$  eksenî etrafında burkulma meydana gelecektir. O halde:  $\rightarrow P_{kr} = P_{kr-z}$

### 6.10.3) Narinlik Oranından İlk Burkulma Eksenini Tespiti:

$(\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}) \rightarrow$  6.10 denkleminde paydaki  $(\pi^2 E)$  çarpımı sabit olduğundan minimum  $\sigma_{kr}$  değeri maksimum  $\lambda$  değerinde ortaya çıkar. (Tetmajer doğrusuna baktığımızda yine aynı şeyi söylememiz mümkündür. ) Bu durumdan tüm durumları kapsayacak şekilde şöyle genel bir kural çıkarabiliriz:

**İlk burkulma Narinlik oranı ( $\lambda$ ) en yüksek olan kesit ekseninde oluşur.**

Yanda iki farklı görünüşü verilen kolon için,

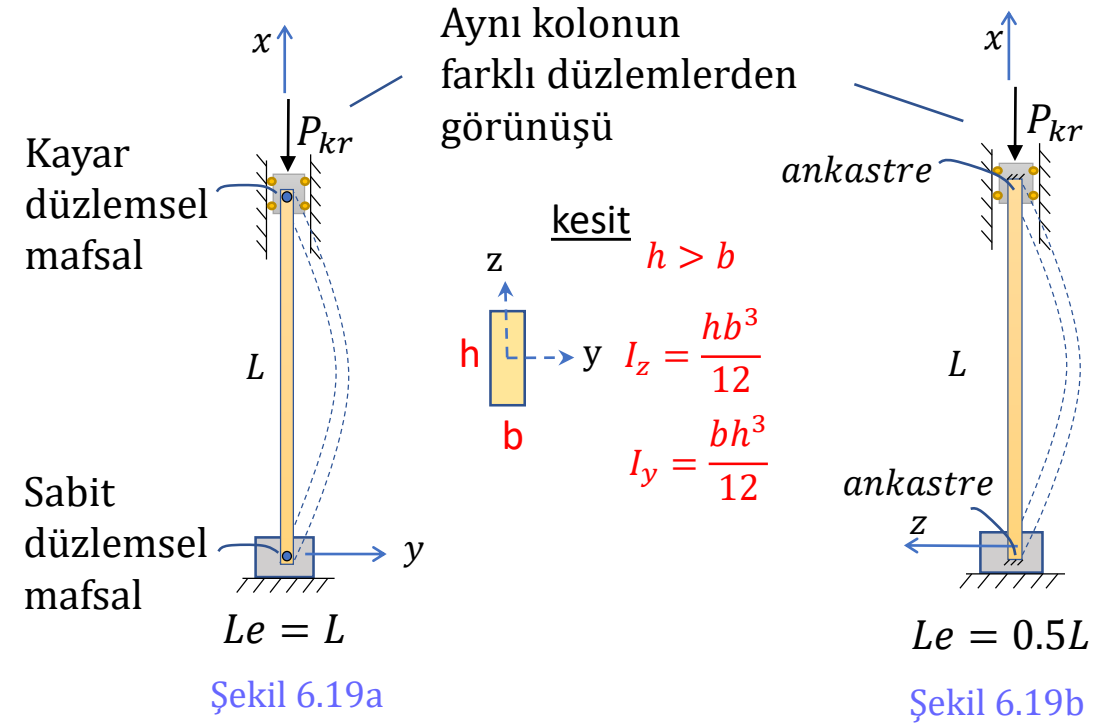
6.8 denkleminde  $y$  ve  $z$  eksenlerindeki narinlik katsayılarını hesaplırsak:

$$\lambda_z = \frac{L_e}{i} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}}, \quad \lambda_y = \frac{0.5L}{\sqrt{\frac{I_y}{A}}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{4I_y}{A}}}$$

Kesite göre  $h > b$  olduğundan  $I_z < I_y$  ve dolayısıyla  $I_z = I_{min}$ .

$I_z < 4I_y$  ise  $\rightarrow \lambda_z > \lambda_y \rightarrow \lambda_{max} = \lambda_z$  olur.  $x$ - $y$  düzleminde ( $z$  etrafında) burkulma oluşacaktır.  $\rightarrow P_{kr} = P_{kr-z}$

$I_z > 4I_y$  ise  $\rightarrow \lambda_z < \lambda_y \rightarrow \lambda_{max} = \lambda_y$  olur.  $x$ - $z$  düzleminde ( $y$  etrafında) burkulma oluşacaktır.  $\rightarrow P_{kr} = P_{kr-y}$



## 6.11 Kolon Problemlerinde İzlenecek Yol Haritası:

Boyutları ve malzemesi belli bir kolonun taşıyabileceği aksel bası yükü aşağıdaki adımlarla bulunur:

### 1.Adım - Burkulma Yüğü Tespiti: 4 adımı vardır.

1.1- Şekil 6.14 ve Tablo 6.1 den kolonun hangi tipe girdiği ve etkin uzunluğu ( $L_e$ ) belirlenir.

1.2- Euler veya Tetmajer formüllerinden hangisini kullanılacağına karar verilir. 2 alternatif vardır:

#### 1. Alternatif: Narinlik oranlarının karşılaştırılması

6.8 denkleminde mevcut durumdaki narinlik oranı belirlenir:

$$\lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{L_e}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$$

6.9 denkleminde orantı sınırındaki narinlik oranı belirlenir:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

$\lambda \geq \lambda_p$  ise Euler kullanılır  
 $\lambda < \lambda_p$  ise Tetmajer kullanılır

#### 2. Alternatif: Euler kabul edilip kritik gerilme ( $\sigma_{kr}$ ) 6.10 denkleminde hesaplanır.

Denklem: 6.10

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2 A}$$

$\sigma_{kr} > \sigma_p$  ise Euler kullanılmaz, Bulduğumuz  $\sigma_{kr}$  değeri doğru değildir. Tetmajer kullanılır:  $\sigma_{kr} = a - b\lambda + c\lambda^2$  geçerlidir. Denklem: 6.12

$\sigma_{kr} \leq \sigma_p$  ise Euler kullanılabilir. Bulduğumuz  $\sigma_{kr}$  değeri doğrudur.

\*Bulunan kritik gerilme için:  $\sigma_{kr} \geq \sigma_{b-akma}$  ise önce bası hasarı oluşacaktır. Bu durumda 2nci adıma geçilebilir. Çünkü  $P_{max} = P_{b-max}$  olacaktır.

1.3-  $P_{cr} = \sigma_{kr} \cdot A$  burkulma yükü bulunur. (Buraya kadar ki tüm adımlar küresel mafsal ve ankastre bağlantılar için tüm durumlarda geçerlidir.)

1.4 - Bağlantı düzlem mafsal vb şekilde olup yöne bağlı sınır şartlarını değiştiriyorsa o yönlerdeki burkulma kontrolü de mutlaka yapılmalıdır.

### 2. Adım - Bası Yüğü Tespiti: Bası emniyetini aşmaya sebep olacak yük : $P_{b-max} = \sigma_{b-akma} \cdot A$ hesaplanır.

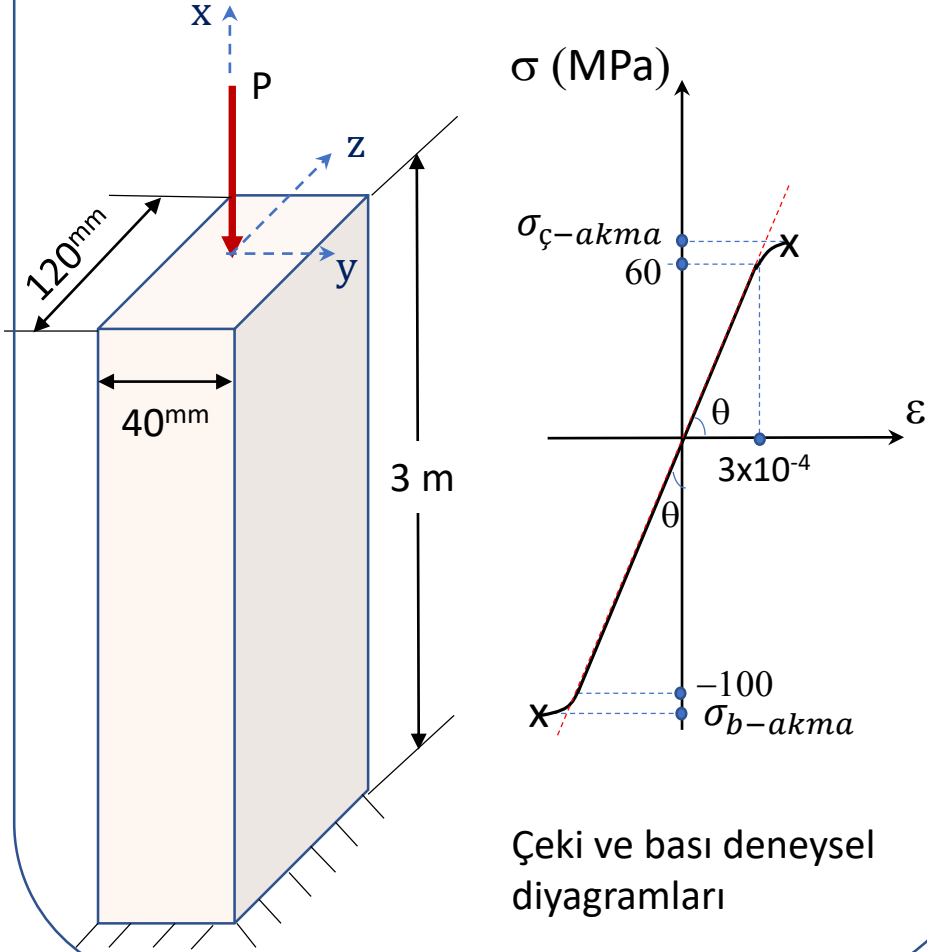
$\sigma_{kr} < \sigma_{bası-emn}$  ise bu hesaba gerek yoktur. Çünkü önce burkulma olacaktır  $P_{max} = P_{cr}$  olur

### 3.Adım - Maksimum Yüğü Tespiti: $P_{cr}$ ve $P_{b-max}$ değerlerinden küçük olanı Kolonun Taşıyabileceği maksimum yük ( $P_{max}$ ) değeridir.

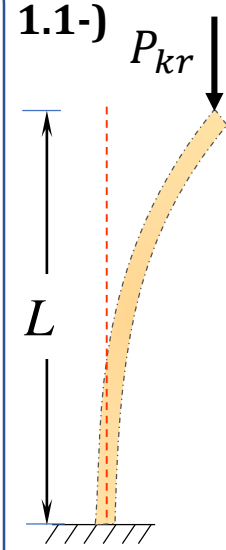
Özel problemlerde bağlantıların serbestçe izin verdiği dönme ve ötelenmeler iyi analiz edilerek, hangi mesnet tipine uygun olduğu ve hangi kolon tipine girdiği doğru tespit edilmelidir. Bazı durumlarda kolon farklı düzlemlerde farklı tiplere sokulabilir. Ayrıca 2 den fazla bağlantı söz konusu ise burkulma modu şekil 6.6 'den doğru tespit edilmelidir. Eğer hiçbir tipe sokulamazsa, 6.6 konusundaki gibi burkulma formülü Euler kiriş benzeşiminden hesaplanmalıdır.

**Örnek 6.2**

Alt ucundan ankastre edilmiş kolonun işlevselliğini yitirmeden taşıyabileceği maksimum P yükünü hesaplayınız. Kolon malzemesi gevrek olup çeki-bası diyagramı aşağıda verilmiştir.



**Çözüm:** 6.11 maddesindeki yol haritası adımlarını takip edeceğiz:

**1.Adım :** Burkulma yükü ( $P_{kr}$ ) tespiti**1.1-)**

Bu kolon Şekil 6.14 deki tiplerden Tip 1 'e girer

**Tip 1**

Bir ucu serbest, diğer ucu ankastre

Tablo 6.1'den etkin uzunluk

$$L_e = 2L$$

Elastiklik modülü ( E ) hesabı:

$$E = \tan\theta = 60/3 \times 10^{-4}$$

$$E = 200 \times 10^3 \text{ MPa}$$

Kesitin minimum atalet momenti

$$I_y = \frac{40 \times 120^3}{12} = 5760 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{120 \times 40^3}{12} = 640 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_z < I_y \rightarrow I_z = I_{min}$$

**1.2-)** Euler' mi ; Tetmajer mi kullanılmalıdır?

2. Alternatiften

Euler'i kullanabileceğimizi kabul edelim:

(Denklem: 6.10'dan burkulma gerilmesi)

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_e^2 \cdot A}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 (200 \times 10^3) \cdot (640 \times 10^3)}{(2 \times 3000 \text{ mm})^2 \cdot (120 \times 40)} = 7.31 \text{ MPa}$$

Soruda verilen diyagramın bası bölgesine dikkat edilirse, orantı sınırındaki gerilme:

$$\sigma_p = 100 \text{ MPa}$$

(Burkulmada bası kuvvetleri ve gerilmeleri pozitif işaretli düşünülür.)

$$\sigma_{kr} < \sigma_p \quad (7.31 < 100)$$

→ o halde Euler'i kullanmamız doğrudur.

bası akma gerilmesi

$$\sigma_{b-akma} \cong \sigma_p = 100 \text{ MPa}$$

**1.3-)** Burkulma yükü:  $P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = (7.31)(120)(40) \rightarrow P_{kr} = 35088N$

**1.4-)** Sınır şartlarını yöne bağılı değıştiren bir bağlantı ( düzlem mafsals gibi ) yoktur.

**2.Adım :** Bası yükü:  $P_{b-max} = \sigma_{b-akma} A = 100 (120)(40) \rightarrow P_{b-max} = 480000N$

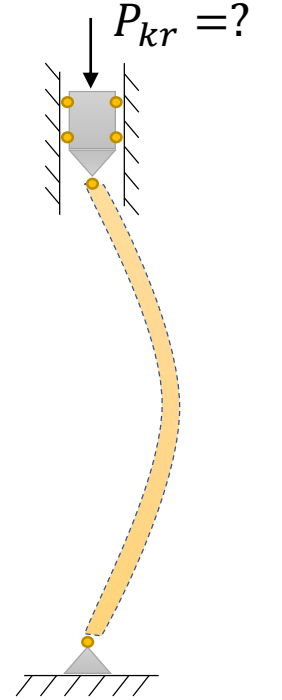
**3.Adım:** Max. Yük tespiti:  $\rightarrow P_{kr} < P_{b-max} \rightarrow$  önce burkulma oluşur.  $\rightarrow P_{max} = P_{kr} = 35088N$

*Not: 1.2 adımının sonunda  $\sigma_{kr} < \sigma_{b-akma}$  olduğu ve önce burkulma olacağı görülebilirdi.*

*Bu durumda  $P_{max} = P_{kr}$  olacağından 2nci adımdaki  $P_{b-max}$  ı bulmaya gerek kalmazdı.*

(Buckling of Columns)

# 6.b KOLONLARIN BURKULMASI-2 Örnek Problemler



**Örnek 6.3**

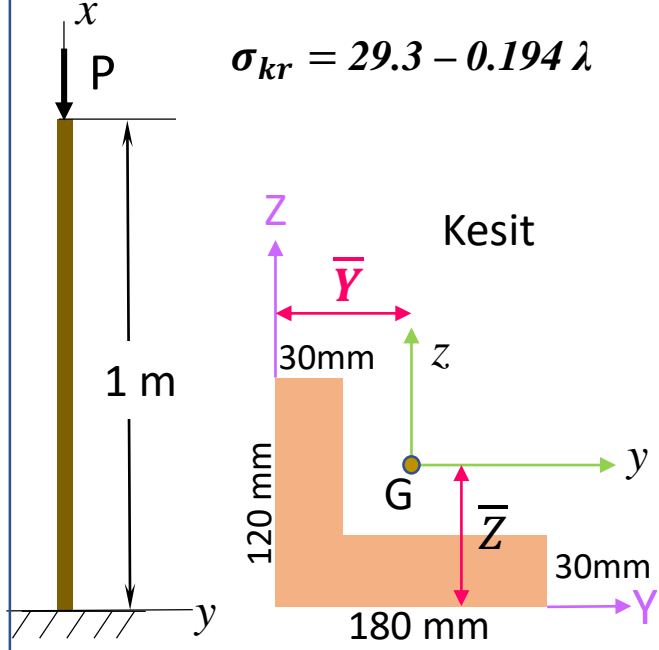
Şekildeki ahşap kolonun emniyet katsayısı  $ek=3$  güvenliği ile taşıyabileceği  $P$  yükünü hesaplayınız.

$$E = 10 \text{ GPa}, \bar{Y} = 65 \text{ mm},$$

$$\lambda_p = 80 \quad \bar{Z} = 35 \text{ mm}$$

(Gerekli olursa) Tetmajer Denklemi:

$$\sigma_{kr} = 29.3 - 0.194 \lambda$$



**Çözüm:** 6.11 maddesinde anlatılan yol haritasını takip ediyoruz.

**1.Adım)** Burkulma yükü ( $P_{kr}$ ) tespiti

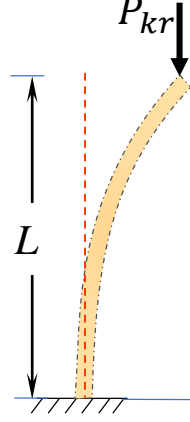
**1.1)** Kolon tipi (bknz: konu 6.7)

Bir ucu serbest,  
diğer ucu ankastre:

*Tip 1*

Tablo 6.1 den etkin uzunluk

$$L_e = 2L = 2m$$

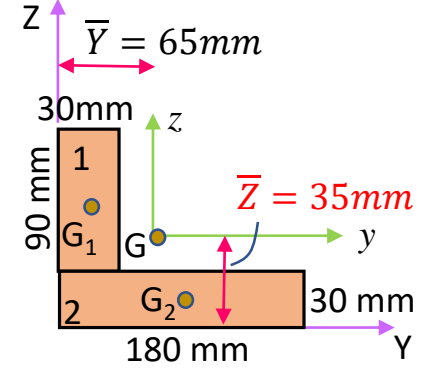


**1.2)** Euler mi, tetmajer mi kullanılmalı?

1nci alternatiften gidelim:

Narinlik oranını hesaplamalıyız:

$$\lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{L_e}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}}$$



Kesit simetrik değildir. Minimum asal atalet eksenini etrafında dönmek ister.

$I_{min}$  = minimum asal atalet momenti aşağıda hesaplanmıştır:

$$\text{Kesit alanı: } A = 90 \times 30 + 180 \times 30 = 8.1 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \left[ \frac{30 \times 90^3}{12} + (90 \times 30)(75 - 35)^2 \right] + \left[ \frac{180 \times 30^3}{12} + (180 \times 30)(15 - 35)^2 \right] \cong (8.71)10^6 \text{ mm}^4$$

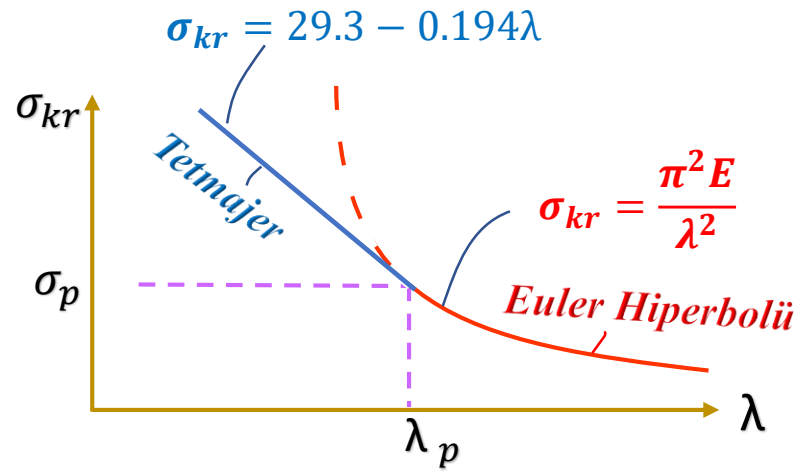
$$I_z = \left[ \frac{90 \times 30^3}{12} + (90 \times 30)(15 - 65)^2 \right] + \left[ \frac{30 \times 180^3}{12} + (180 \times 30)(90 - 65)^2 \right] \cong 24.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{zy} = [(90 \times 30)(75 - 35) \times (15 - 65)] + [(180 \times 30) \times (15 - 35) \times (90 - 65)] = -8.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{max,min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \Rightarrow I_{max} = 28.26 \times 10^6 \text{ mm}^4; I_{min} = 5.353 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Narinlik oranı:

$$\rightarrow \lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{2000}{\sqrt{\frac{5.353 \times 10^6}{8.1 \times 10^3}}} = 77.8.. < 80 \rightarrow \lambda < \lambda_p \quad \text{olduğundan Tetmajer kullanılmalıdır.}$$



Soruda verilen Tetmajer denkleminde burkulma anındaki gerilme:

$$\sigma_{kr} = 29.3 - 0.194\lambda = 29.3 - 0.194(77.82) = 14.21 \text{ MPa},$$

Orantı sınırındaki gerilme

Euler Hiperbolü denkleminde bulunabilir:  $\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2} = \frac{\pi^2 10(10^3)}{80^2} = 15.42 \text{ MPa}$

(Dikkat:  $(\lambda_p; \sigma_p)$  noktası Euler hiperbolü üzerindedir fakat tetmajer doğrusu üzerinde olmayabilir. Bu sebeple  $\sigma_p$  değerini Tetmajer doğru denkleminde bulmak doğru olmaz.)

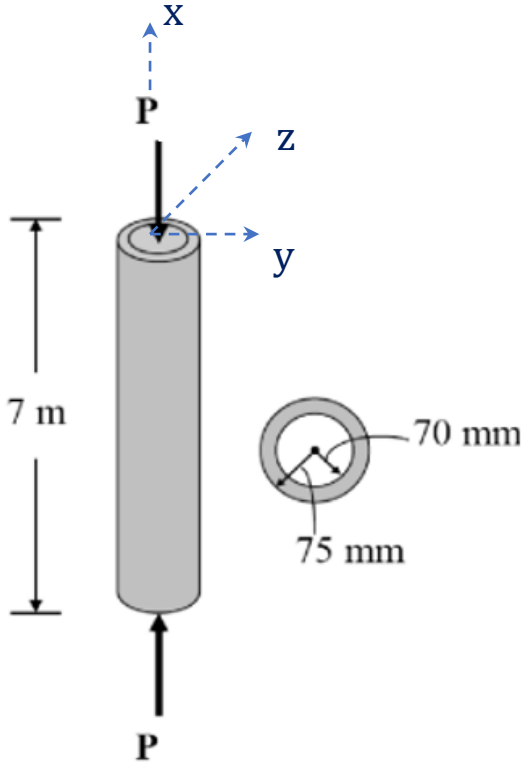
Basıdaki akma gerilmesi :  $\sigma_{b-akma} \cong \sigma_p$  alınabilir.

$$14.21 < 15.42 \rightarrow \sigma_{kr} < \sigma_{b-akma} \rightarrow \text{O halde önce burkulma oluşur.}$$

**1.3)** Kritik Burkulma Yüğü:  $P_{kr} = \sigma_{kr} A = 14.21 \times 8100 = 115.1 \times 10^3$  ,  $N \cong 115.1 \text{ kN}$

Emniyetli Burkulma Yüğü:  $\rightarrow P_{kr-em} = P_{kr}/n = 115.1/3 \cong 38.37 \text{ kN} = P_{max}$  (Emniyet sınırları içinde uygulanabilecek max. Kuvvet)

Yol haritasındaki diğer adımları yapmaya gerek kalmamıştır.

**Örnek 6.4**

7m uzunluğundaki çelik tüpe uygulanabilecek maksimum aksel bası yükünü hesaplayınız.  
 $E= 200\text{GPa}$ ,  $\sigma_{akma} = 250\text{MPa}$

**Çözüm:**

Bası mukavemeti açısından önce incelersek;

$$P_{b-max} = |\sigma_{b-akma}| \cdot A = |-250| \cdot \pi(75^2 - 70^2) \rightarrow P_{b-max} = 569.4\text{kN}$$

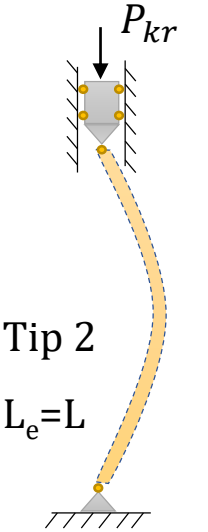
Burkulma yükü ( $P_{kr}$ ) tespiti

6.11 maddesindeki yol haritasındaki adımları takip edeceğiz.

**1.1-** Kolon tipinin ve etkin uzunluğun tespiti:

Tüpün bir mesnetlenmesi yoktur. Bu durumda hangi tipe sokabiliriz?

- Bu yükleme durumu için, her iki uç, tüm yönlerde dönebilir.
- Her iki uçta da bir eğim açısı olması söz konusudur.
- Yükleme ve sınır şartları simetriktir ve orta eksene göre simetrik bir burkulma beklenir.
- Tüm bu durumları ise Tablo 6.1'deki tiplerden 2 numaralı tipin küresel mafsallık durumuyla sağlanır:



## 1.2 ) Euler'i mi Tetmajer 'i kullanacağız?

2. alternatif'ten gidersek

Euler'i kullanacağımızı kabul ediyoruz: 
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L e^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \times 10^3 \cdot \frac{\pi}{4} (75^4 - 70^4)}{(7 \times 10^3)^2 \cdot \pi (75^2 - 70^2)} = 106 \text{MPa}$$

Orantı Sınırındaki gerilme:  $\sigma_p \cong \sigma_{b-akma} = 250 \text{MPa}$  alınabilir.

$\rightarrow \sigma_{kr} < \sigma_p$  olduğundan Euler kullanılabilir. Bulduğumuz  $\sigma_{kr}$  doğrudur.

Çelik sünek bir malzemedir ve sünek malzemelerin bası ve çekideki akma gerilmesi eşittir:  $\sigma_{b-akma} = 250 \text{MPa}$

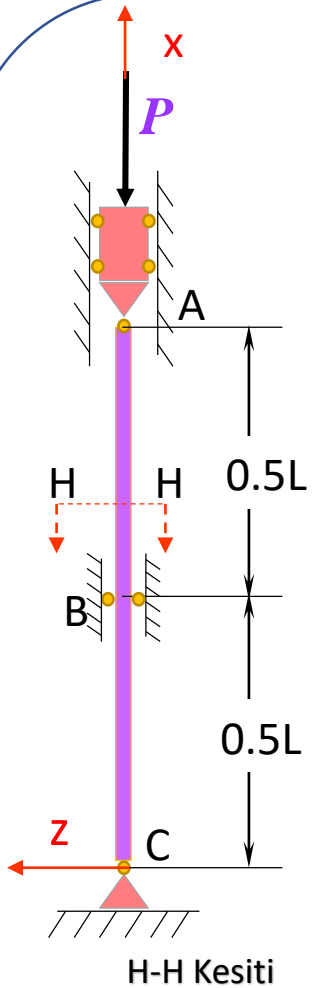
$\sigma_{kr} < \sigma_{b-akma}$  olduğundan önce burkulma oluşacağını söyleyebiliriz.

1.3 ) Burkulma yükü : 
$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 106 \cdot \pi \cdot (75^2 - 70^2) = 241431.4 \text{N} \cong 241.4 \text{kN} = P_{max}$$

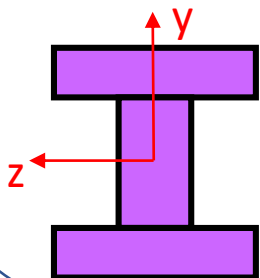
Veya yükler açısından kıyaslama yaparsak:  $\rightarrow P_{kr} < P_{b-max} \rightarrow P_{max} = P_{kr} \cong 241.4 \text{kN}$

## ÖRNEK 6.5

Şekilde görülen AC çelik çubuğu B noktasından, y ekseninde dönebilen sürtünmesiz tekerleklerle desteklenerek, P yüküne maruz bırakılmıştır. A ve C de ise küresel mafsallar mevcuttur. Sistemin burkulma emniyet katsayısını  $ek=2.5$  olarak emniyetle taşınabilecek P kuvvetini hesaplayınız.



H-H Kesiti



$$A = 7.8 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$I_z = 57 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\lambda_p = 105$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{akma} = 300 \text{ MPa}$$

## Çözüm:

x-z düzleminde (y eksenini etrafında) burkulma:

Sadece A ve C küresel mafsalları düşünüldüğünde kolon tipi 2 dir. (bknz: şekil 6.14, tablo 6.1)

B mesneti de bu düzlemde şekil değiştirmeye etki eder, (z yönünde deplasmanı engeller.) Bu sebeple burkulma modu bu düzlemde  $n = 2$  dir. (bknz: şekil 6.6.b)

Etkin uzunluk (tablo .6.1den)

$$L_e = L = 10 \times 10^3 \text{ mm}$$

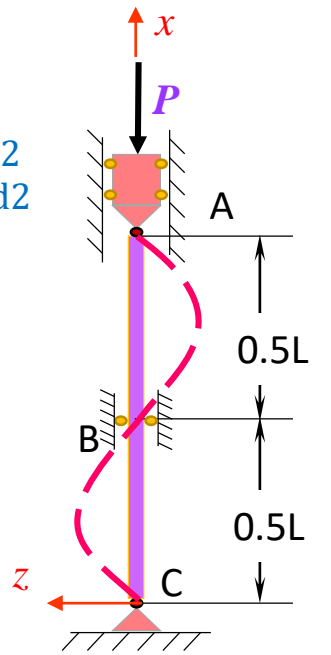
Atalet yarıçapı (Denk. 6.9dan)

$$i = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^6}{7.8 \times 10^3}} = 50.64 \text{ mm}$$

$n=2$  modundaki emniyetli burkulma yükü (Denk. 6.2 'den):

$$P_{kr-y-em} = \frac{n^2 \pi^2 E I_y}{L_e^2 \cdot ek} = \frac{2^2 \pi^2 (210 \times 10^3)(20 \times 10^6)}{10000^2 \times 2.5} \cong 663237 \text{ N}$$

Tip 2  
mod2



Narinlik oranı (Denk. 6.8den)

$$\lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{10000}{50.64} = 197.47$$

$\lambda > \lambda_p \rightarrow$  Euler kullanılır.

**x-y** düzleminde (z eksenini etrafında) burkulma:

*B mesnetinin şekline dikkat edilirse bu düzlemde şekil değiştirmeye etki etmez. (y yönünde deplasmana izin verir, sanki bu düzlemde B mesneti yok kabul edilebilir.)  
Bu sebeple burkulma modu bu düzlemde  $n = 1$  dir.*

$$L_e = L = 10 \times 10^3 \text{ mm} ,$$

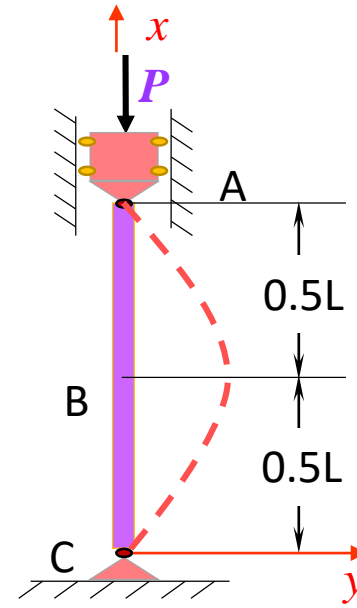
$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{57 \times 10^6}{7.8 \times 10^3}} = 85.48 \text{ mm} \rightarrow \lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{10000}{85.48} \cong 117$$

Emniyetli burkulma yükü (Denk. 6.2 'den):

$$P_{kr-z-em} = \frac{n^2 \pi^2 E I_z}{L_e^2 \cdot ek} = \frac{1^2 \pi^2 210 \times 10^3 \times 57 \times 10^6}{10000^2 \times 2.5} \cong 472557 \text{ N}$$

Emniyetli bası yükü:

$$P_{b-em} = \frac{\sigma_{akma} A}{ek} = \frac{(300)(7.8 \times 10^3)}{2.5} = 936000 \text{ N}$$



Tip 2

Mod 1

$\rightarrow \lambda > \lambda_p \rightarrow$  Euler kullanılır.

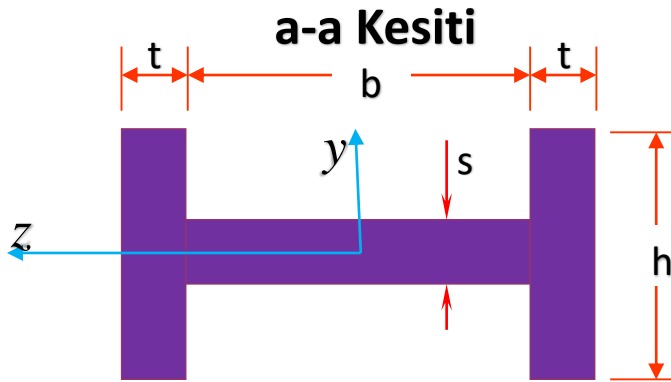
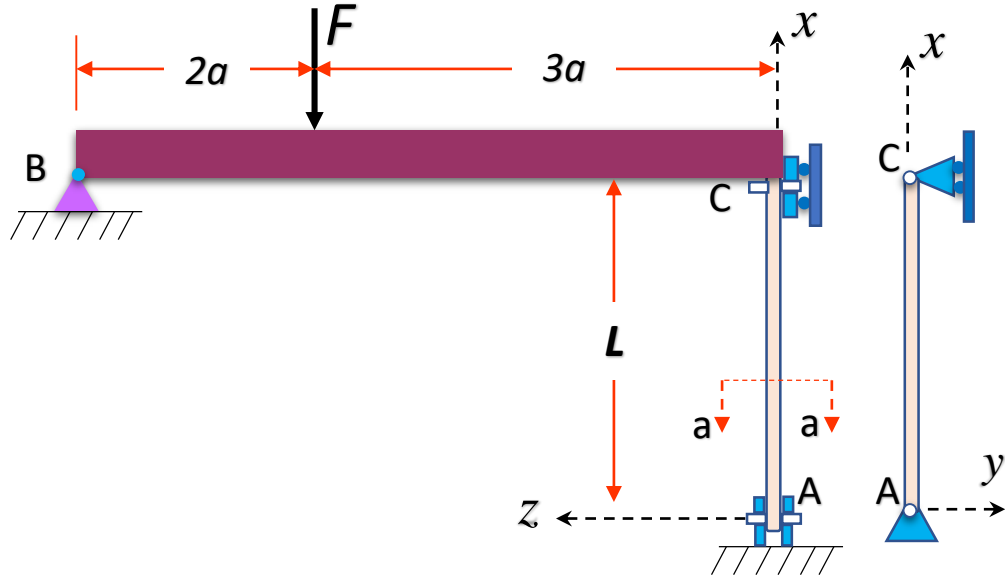
$$P_{kr-y-em} = 663237 \text{ N} \text{ bulunmuştur.}$$

$\rightarrow P_{kr-z-em} < P_{kr-y-em} < P_{b-em}$  olduğu için önce z eksenini etrafında (x-y düzleminde) burkulma oluşur.

Çubuğun taşıyabileceği emniyetli yük

$$\rightarrow P_{max} = P_{kr-z-em} = 472557 \text{ N}$$

## ÖRNEK 6.6



B ucundan sabit düzlem mafsala bağlı olan BC kirişi, C ucundan bir AC düşey kolonu ile desteklenmiştir ve kirişe F düşey kuvveti uygulanmıştır. AC kolonunun emniyetini bası ve burkulma açısından kontrol ediniz ve burkulma emniyet katsayısını belirleyiniz.

(Tüm bağlantılar düzlem mafsallı özelliği göstermektedir. B mafsalı x-z, A ve C mafsalları ise x-y düzleminindedir.)

Verilenler:

$$F = 250 \text{ kN}, \quad E = 210 \text{ GPa}, \quad L = 1.5 \text{ m}, \quad a = 0.5 \text{ m},$$

$$b = 60 \text{ mm}, \quad h = 80 \text{ mm}, \quad s = 8 \text{ mm}, \quad t = 6 \text{ mm}$$

$$(bası \text{ emniyeti}) : \sigma_{bem} = -100 \text{ MPa}$$

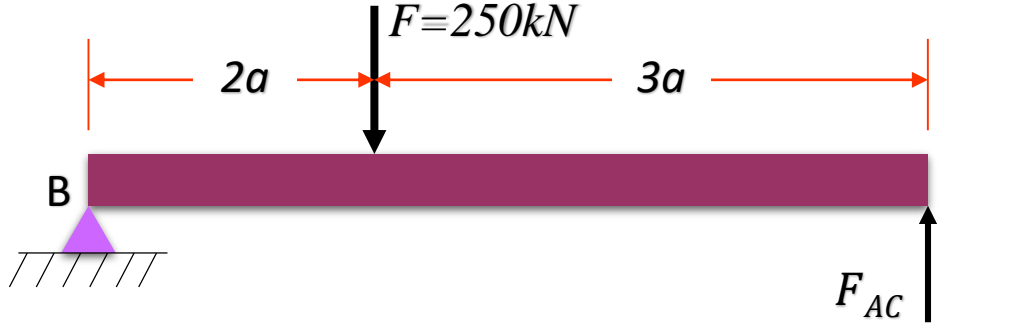
$$\text{orantı sınırı: } \sigma_p = 190 \text{ MPa},$$

$$\lambda < \lambda_p \text{ olursa } \sigma_{kr} = 310 - 1.14\lambda \text{ (MPa)}$$

**Çözüm..>>**

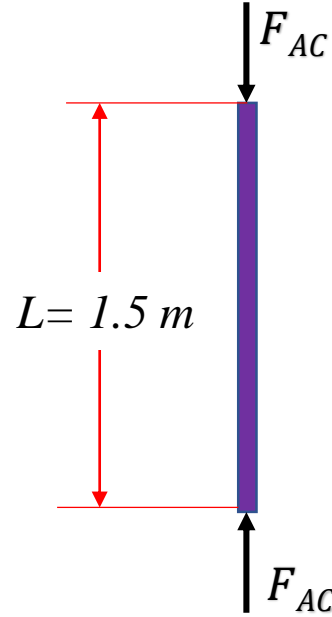
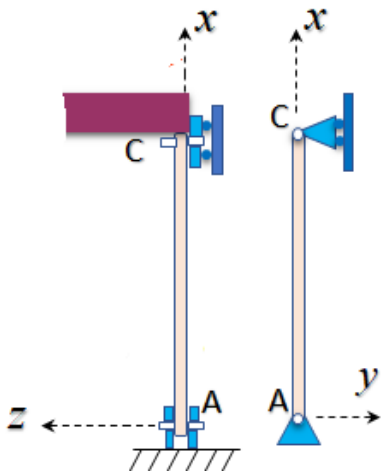
**Çözüm: 6.6**

**Statik analizden**, AC çubuğuna gelen aksenal bası kuvvetini hesaplayalım:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 2a F - 5a F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = \frac{2}{5} F = \frac{2}{5} 250 = 100 \text{ kN}$$



6.11 maddesindeki yol haritasını takip edelim:

**1. Adım - AC kolonu için Burkulma Yüğü tespiti****1.1) Kolon hangi tipe girer? Etkin uzunluk nedir?****x-y düzleminde inceleme**

Sorudaki şekil incelenirse:

**üst uç:** kayar düzlem mafsali,

**alt uç:** sabit düzlem mafsali gibi davranır.

Bu mafsallar z eksenini etrafında dönmeye izin verirler.

Bu sebeple bu düzlem için kolon Tip 2'ye girer. (bkz: konu 6.7)

tablo 6.1 den bu tip için etkin uzunluk  $L_{e-z} = L = 1.5 \text{ m}$  dir

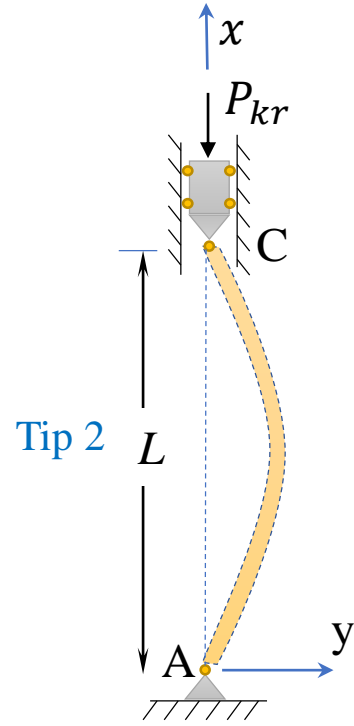
**x-z düzleminde inceleme**

Üst ve alt bağlantı y eksenini etrafında dönmeye izin vermez (ankastre). Üst uç x yönünde harekete izin verir alt üst sabittir.

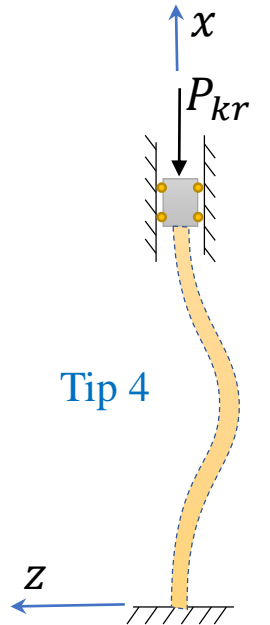
Bu sebeple bu düzlemde kolon Tip 4'e girer.

tablo 6.1 den bu tip için

etkin uzunluk  $L_{e-y} = 0.5L = 0.75 \text{ m}$  dir



Tip 2

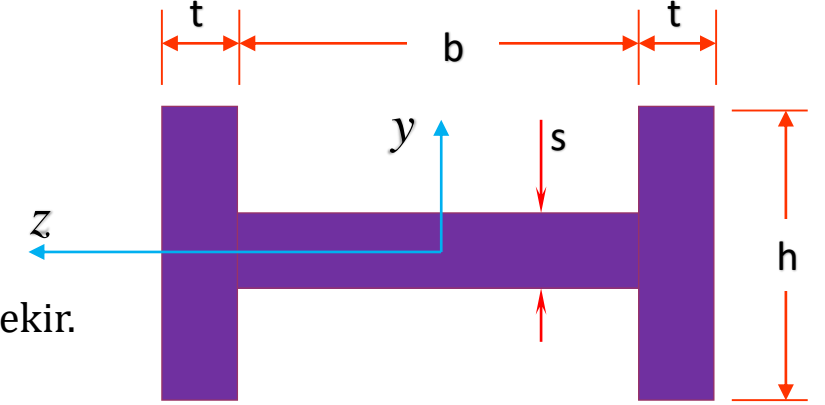


Tip 4

**1.2.)Burkulma açısından euler veya tetmajer formüllerinden hangisini kullanacağız?**

$$b= 60 \text{ mm} , s= 8 \text{ mm} , h= 80 \text{ mm} , t= 6 \text{ mm}$$

1.Alternatifi kullanırsak:  $\lambda$  ve  $\lambda_p$  narinlik oranlarını tespit etmemiz ve karşılaştırmamız gerekir.



(6.11 denkleminde)  
Orantı sınırındaki narinlik oranı:  $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210 \times 10^3 \text{ MPa}}{190 \text{ MPa}}} = 104.44$

Farklı burkulma tipleri olduğundan narinlik oranları her iki düzlem içinde belirmemiz gerekir.

Kesit Alanı:  $A = bs + 2ht = 1.44 \times 10^3 \text{ mm}^2$

$$I_z = \frac{bs^3}{12} + 2 \frac{th^3}{12} = 0.514 \times 10^6 \text{ mm}^4 \rightarrow i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{0.514 \times 10^6}{1.44 \times 10^3}} = 18.89 \text{ mm} \rightarrow \lambda_z = \frac{L_{e-z}}{i_z} = \frac{L}{i_z} = \frac{1500}{18.89} \rightarrow \lambda_z \cong 79.4$$

$$I_y = \frac{sb^3}{12} + 2 \left[ \frac{ht^3}{12} + ht \left( \frac{b}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 \right] \cong 1.192 \times 10^6 \text{ mm}^4 \rightarrow i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1.192 \times 10^6}{1.44 \times 10^3}} = 28.77 \text{ mm} \rightarrow \lambda_y = \frac{L_{e-y}}{i_y} = \frac{0.5L}{i_y} = \frac{(0.5)1500}{28.77} \rightarrow \lambda_y \cong 26$$

$\lambda_z > \lambda_y$  olduğundan ilk burkulma z eksenini etrafında (x-y düzleminde) oluşur.

$\lambda_z < \lambda_p$  olduğu için Tetmajer formülü kullanılır:  $\sigma_{kr} = 310 - 1.14\lambda_z = 310 - 1.14 \times 79.4 = 219.48$

Tetmajer bölgesi için sağlama:  $\rightarrow \sigma_{kr} > \sigma_p$  olmalı  $\rightarrow 219.48 > 190$  sağlanıyor.

**2.Alternatif** ile Euler veya Tetmajer'in hangisinin kullanılacağını tespit etmeye çalışalım:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_e^2 A} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^3 \times 0.514 \times 10^6}{1500^2 \times 1.44 \times 10^3} = 328.8 \text{ MPa} > \sigma_p$$

olduğundan Euler kullanılamaz, O halde Tetmajeri kullanmamız gerekir

Kritik burkulma yükü:  $P_{kr} = \sigma_{kr}A = 219.48 \times 1.44 \times 10^3 \cong 316 \times 10^3 N = 316 kN$

Burkulma Kontrolü: Kolona düşen yük  $F_{AC} = 100 kN$  bulunmuştu  $\longrightarrow F_{AC} < P_{kr} \longrightarrow$  O halde burkulma olmaz.

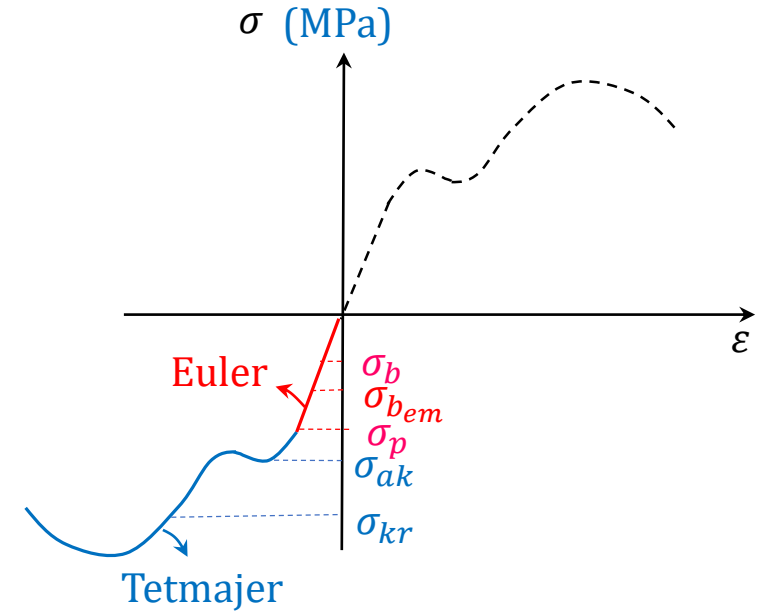
Burkulma için emniyet katsayısı :  $ek = \frac{P_{kr}}{F_{AC}} = \frac{316}{100} = 3.16$

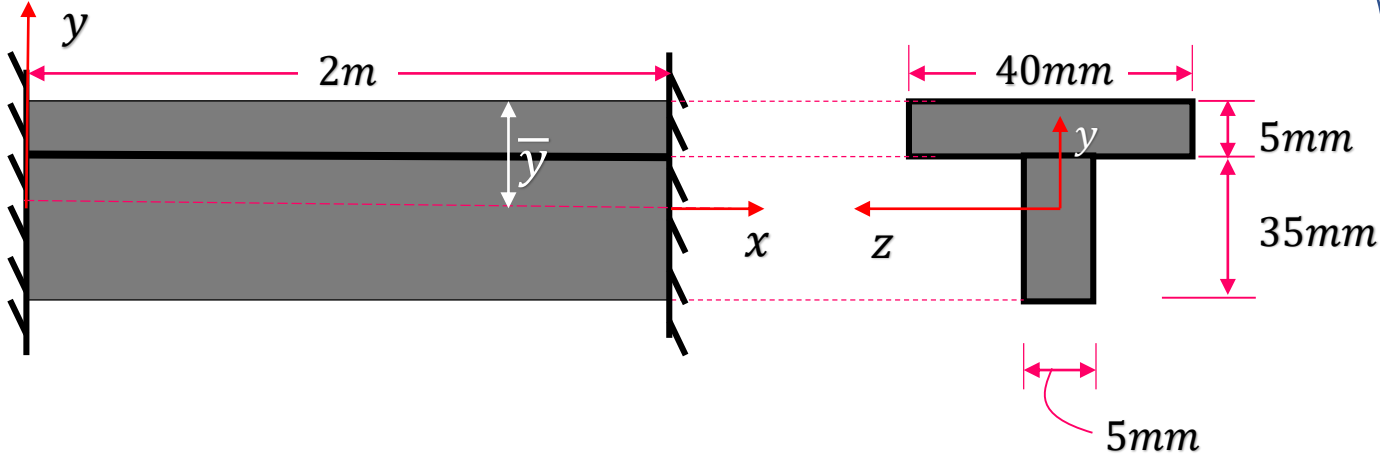
Burkulma olmaz ama Bası emniyeti aşılmış olabilir mi?

Mevcut gerilme :  $|\sigma_b| = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{100 \times 10^3}{1.44 \times 10^3} = 69.4 MPa$

Bası emniyet gerilmesi:  $|\sigma_{bem}| = 100 MPa$  verilmişti

$|\sigma_b| < |\sigma_{bem}|$  Bası açısından da EMNİYETLİ



**Örnek 6.8**

Şekilde görülen iki ucu ankastre T kesitli çubuk için Euler bölgesinde burkulma emniyet katsayısının 2 olması istendiğine göre çubuğun ne kadar ısıtılabileceğini (sıcaklığının ne kadar arttırılabileceğini) hesaplayınız.

$$\alpha = 11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}, \quad E = 210 \text{ GPa}, \quad \lambda_p = 105$$

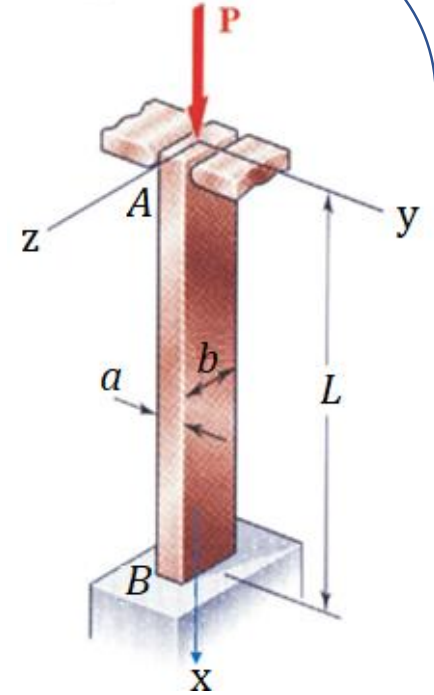
$$\text{Cevap: } \Delta T = 32.3 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

**Örnek 6.9**

Dikdörtgen kesitli L uzunluğunda alüminyum çubuk B de ankastre olarak mesnetlenmiştir. Çubuğun A bağlantısı z ve y etrafında dönmeye ve z yönünde ötelenmeye izin verir, fakat y yönünde ötelenmeyi engeller. Buna göre;

Her iki düzlemde (x-y ve x-z düzlemlerinde) burkulma yüklerinin eşit olması için a/b oranı ne olmalıdır?

$$\text{Cevap: } 0.35$$





# 7. Eğri Eksenli Çubukların Eğilmesi

(Örnekle Konu Anlatımı)



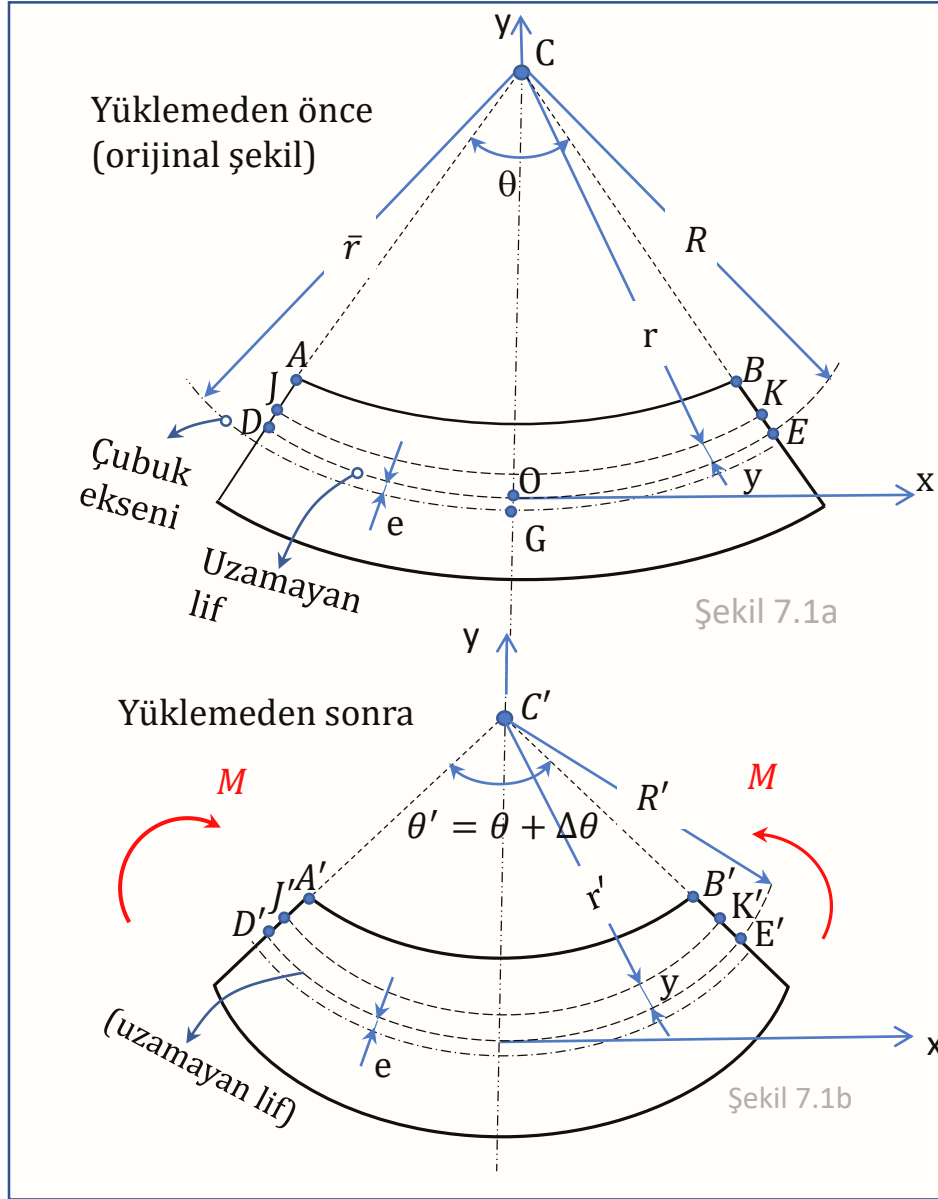
Endüstride ve günlük hayatımızda çok sık karşılaştığımız parçalardan önemli bir tipi de eğrisel eksenli elemanlar ve çubuklardır.

Farklı amaçlarla kullanılan bu elemanlar eğilme yüklemesine maruz kalmaktadır.

**Bu bölümde amacımız,** eğrisel eksenli bu tip elemanlarda, eğilme yüklemesi sonucu ortaya çıkan gerilmeleri ve şekil değiştirmeleri formülüze etmektir.

*(Daha önce Mukavemet 1 - 4ncü konuda doğrusal eksenli çubuklar için kullandığımızı yaklaşımın benzerini eğrisel eksenli çubuklar için yapacağız.)*





Gerinme (birim uzama veya kısalma):  $\epsilon_x$

$\epsilon_x$  i bulup  $\rightarrow$  Hooke bağıntısından :  $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \rightarrow \sigma_x$  i elde edeceğiz...>>

$\epsilon_x$  in bulunması

Uzamayan lif için:  $\left. \begin{array}{l} \overline{DE} = R\theta \\ \overline{D'E'} = R'\theta' \end{array} \right\} \overline{DE} = \overline{D'E'} \rightarrow R'\theta' = R\theta$

JK lifindeki toplam kısalma miktarı:

$$\delta = \overline{J'K'} - \overline{JK} = r'\theta' - r\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} r = R - y, \quad r' = R' - y \\ \delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta \\ \Rightarrow \delta = R'\theta' - y\theta' - R\theta + y\theta \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \delta = -y \cdot \theta' + y \cdot \theta = -y(\theta' - \theta)$$

$$\theta' = \theta + \Delta\theta \Rightarrow \theta' - \theta = \Delta\theta$$

$$\delta = -y \cdot \Delta\theta$$

(7.1)

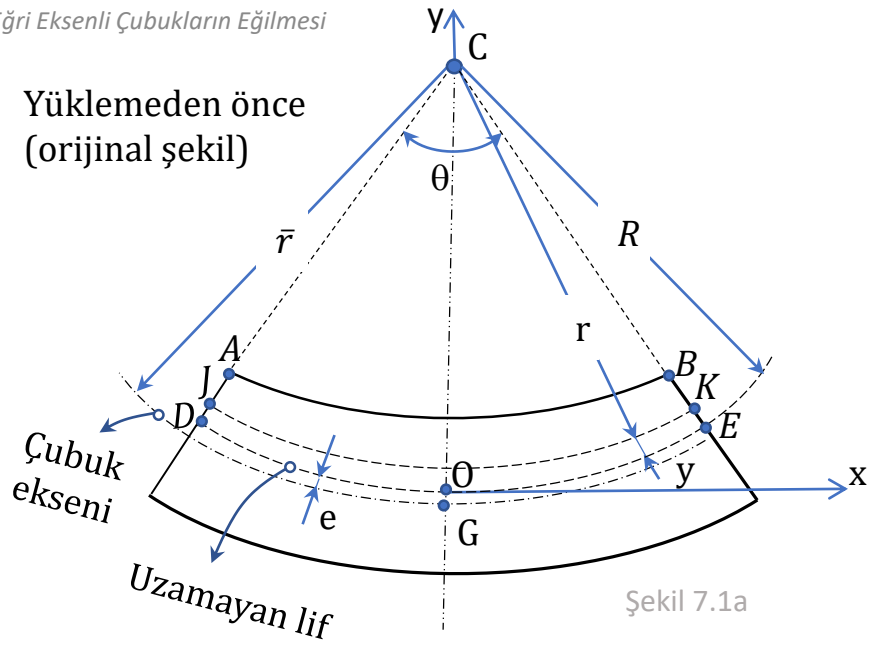
JK lifindeki gerinme (strain) miktarı:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{\delta}{\overline{JK}} = \frac{-y \cdot \Delta\theta}{r \cdot \theta}$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = -\frac{y \cdot \Delta\theta}{(R - y) \cdot \theta}$$

(7.2)

Yüklemeden önce  
(orijinal şekil)



Şekil 7.1a

Hooke bağıntısı:  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$

Denklem 7.2'yi Hooke bağıntısında yerine koyarsak:

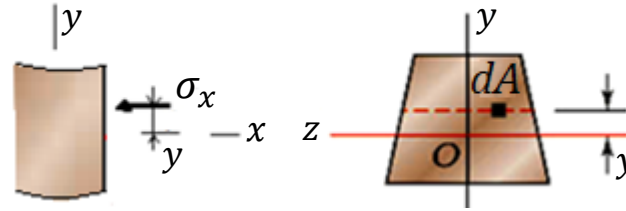
$$\sigma_x = E \left( -\frac{y \cdot \Delta\theta}{(R - y) \cdot \theta} \right) \Rightarrow \sigma_x = -E \cdot \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R - y}$$

$$\left. \begin{array}{l} R - r = y \\ R - y = r \end{array} \right\} \sigma_x = -\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R - r}{r} \quad (7.3)$$

Ancak bu son denklemde R ve  $\Delta\theta$  bilinmemektedir. Bunları bulmak için işlemlere devam ediyoruz:

### Kesitteki İç Normal Kuvvet = 0

Herhangi bir dış normal kuvvet olmadığı için, iç Normal Kuvvet de sıfır olmalıdır.



Şekil 7.2

Normal iç Kuvvet:

$$\int \sigma_x \cdot dA = 0 \Rightarrow \int \left( -\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R - r}{r} \right) \cdot dA = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \int \frac{R - r}{r} \cdot dA = 0$$

( $E \neq 0, \Delta\theta \neq 0$  ve  $\theta \neq \infty$  olacağı için)

İntegralin dışı sıfır olamaz. O halde:..>>

$$\int \frac{R - r}{r} \cdot dA = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

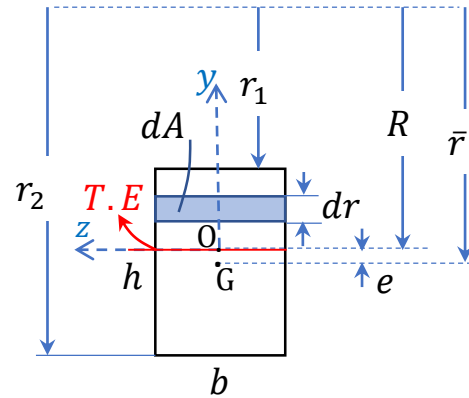
$$\int \frac{R - r}{r} \cdot dA = \int \frac{R}{r} \cdot dA - \int dA = 0 \Rightarrow R \cdot \int \frac{dA}{r} = A \Rightarrow \boxed{R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}} \quad (7.4)$$

Tarafsız ekseninden geçen eğrisel eksenin  
(veya uzamayan lifin) eğrilik yarıçapı

Örneğin Kesit dikdörtgen olursa:

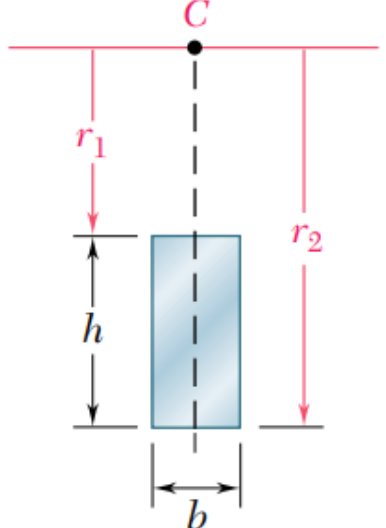
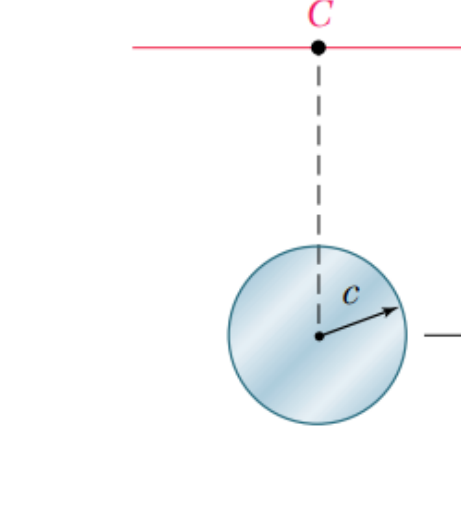
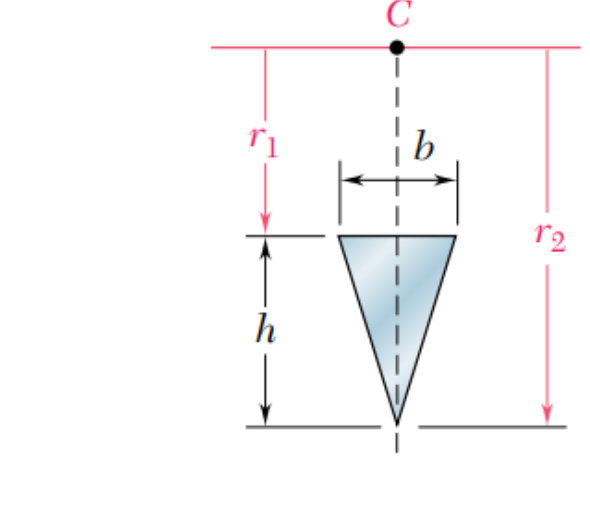
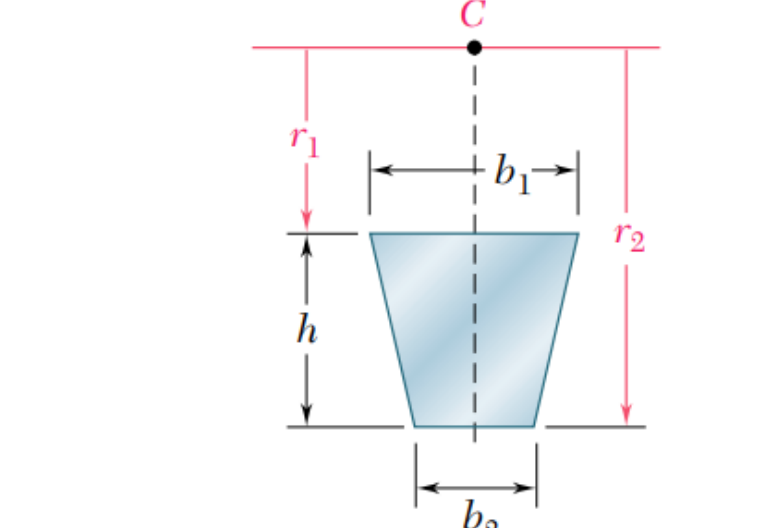
$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{b \cdot h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b \cdot dr}{r}} = \frac{h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}} \Rightarrow R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (7.5)$$

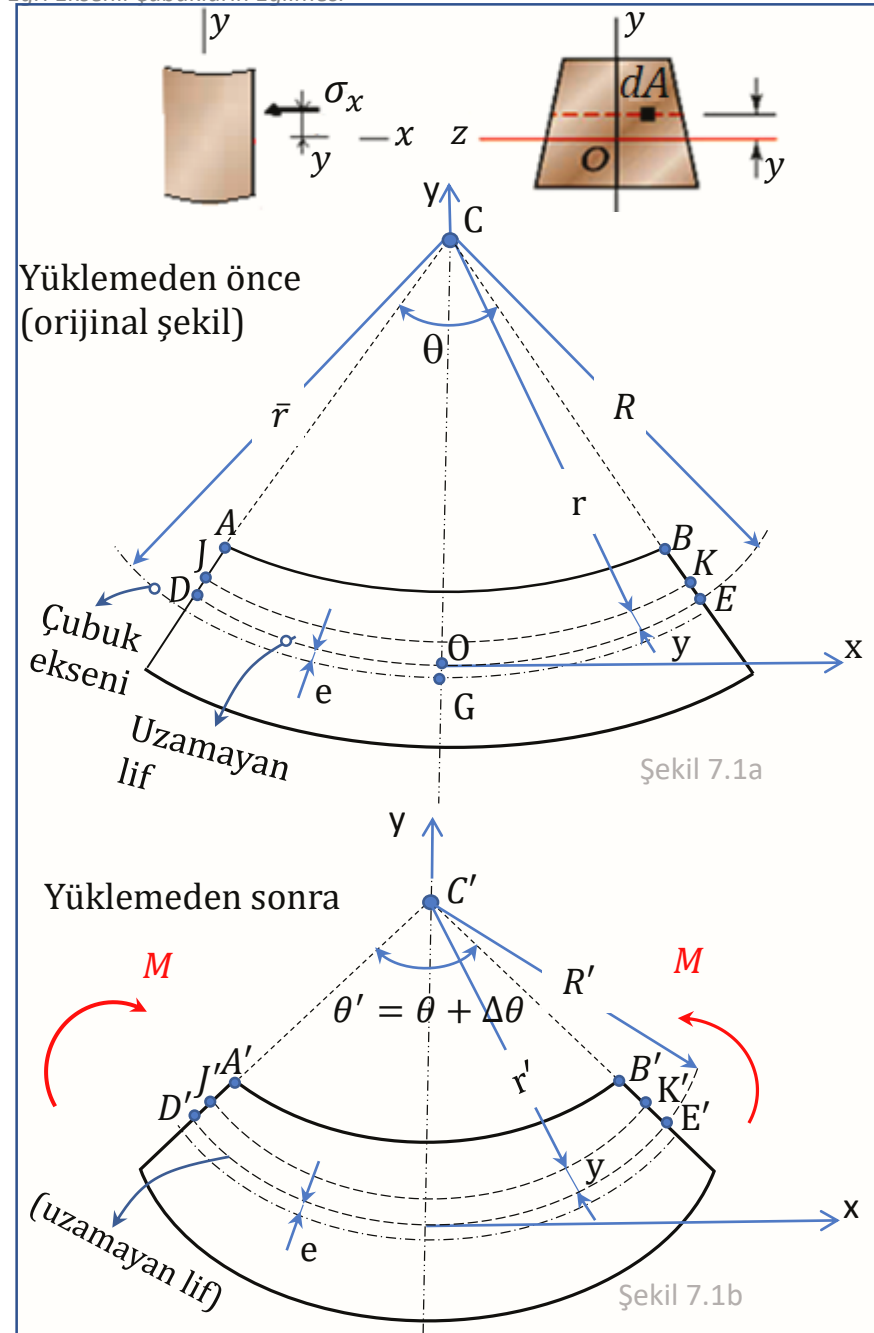
$$\text{Ağırlık merkezinin yeri (statikten bildiğimiz formül):} \quad \bar{r} = \frac{\int r \cdot dA}{A} \quad (7.6)$$



Şekil 7.3

**Tablo 7.1** : Bazı Kesitler için R formülleri:

			
<p>Rectangle</p> $R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	<p>Circle</p> $R = \frac{1}{2} (\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})$	<p>Triangle</p> $R = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1}$	<p>Trapezoid</p> $R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1r_2 - b_2r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$
(7.5)	(7.7a)	(7.7b)	(7.7c)



## Kesitteki İç Eğime Momenti : M

$$\int y \cdot \underbrace{\sigma_x}_{\text{(dif. kuvvet)}} \cdot dA = M \rightarrow \text{(denk 7.3 yi yerine koyarsak:)} \Rightarrow \int -y \cdot \left( -\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R-r}{r} \right) \cdot dA = M$$

(moment kolu)

$$y = R - r \Rightarrow \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \int \frac{(R-r)^2}{r} \cdot dA = M \Rightarrow \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \int \frac{R^2 - 2Rr + r^2}{r} \cdot dA = M$$

$$\Rightarrow \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \left[ R^2 \int \frac{dA}{r} - 2R \int dA + \int r \cdot dA \right] = M$$

Denk. 7.4

Ağırlık merkezi denklemleri:

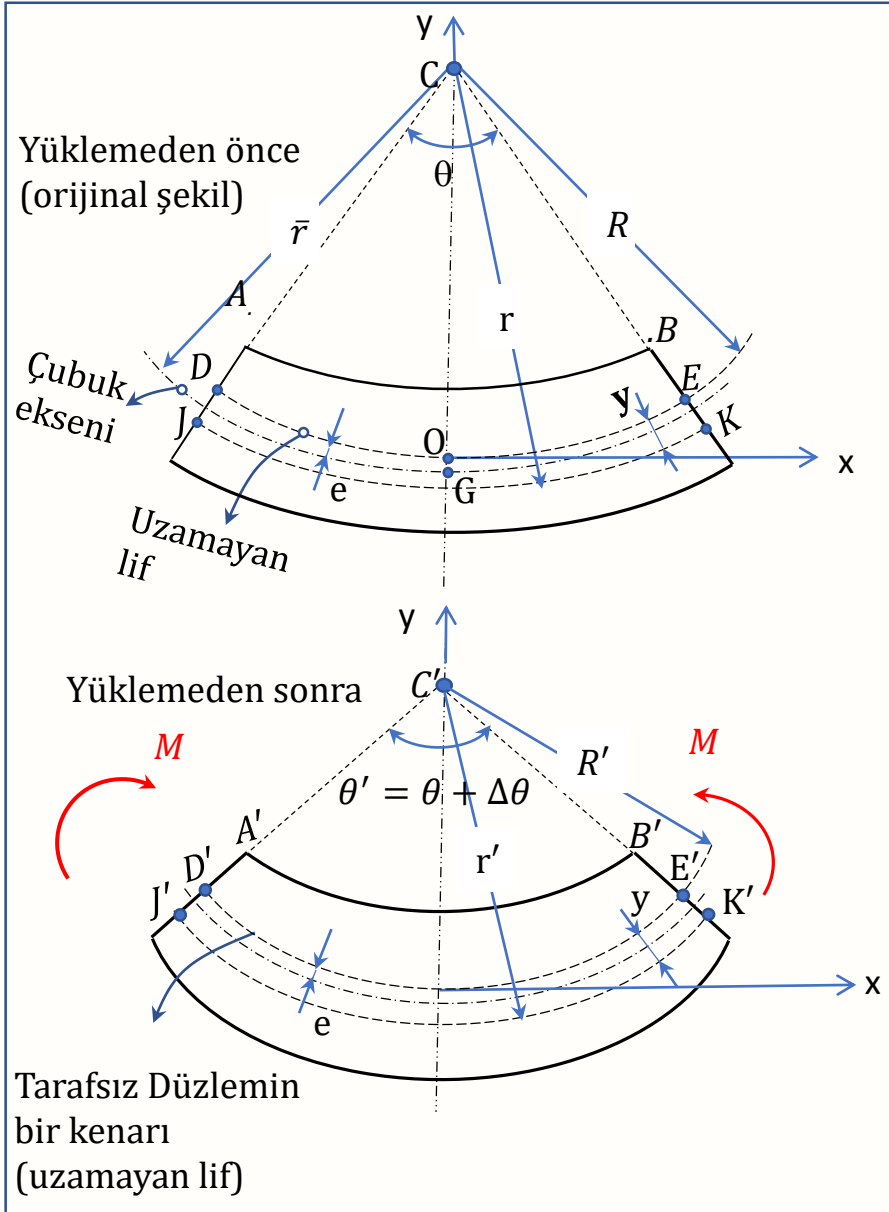
$$\bar{r} = \frac{\int r \cdot dA}{A} \Rightarrow \int r \cdot dA = \bar{r} \cdot A ; R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \Rightarrow \int \frac{dA}{r} = \frac{A}{R} ; \int dA = A$$

$$\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \left[ R^2 \cdot \frac{A}{R} - 2R \cdot A + \bar{r} \cdot A \right] = M \Rightarrow \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} (-RA + \bar{r}A) = M$$

$$\Rightarrow \frac{E\Delta\theta}{\theta} \cdot A(\bar{r} - R) = M \Rightarrow \frac{E\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)}$$

$$\left. \begin{array}{l} E > 0 \\ \Delta\theta > 0 \\ \theta > 0 \end{array} \right\} \text{ olduğundan } \frac{E\Delta\theta}{\theta} > 0 \text{ ve dolayısıyla } \rightarrow \frac{M}{A(\bar{r} - R)} > 0 \text{ olur.}$$

$$\text{O halde: } \bar{r} > R \rightarrow \bar{r} - R = e \Rightarrow \frac{E\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A \cdot e} \quad (7.8)$$



### Herhangi bir noktadaki Normal Gerilme:

Son bulduğumuz  
eşitliği tekrar yazalım:

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A \cdot e}$$

Denklem (7.3) ü hatırlarsak:  $\sigma_x = -\frac{E\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R-r}{r}$

$$\sigma_x = \frac{M(r-R)}{A \cdot e \cdot r} \quad (7.9)$$

(Burada herhangi bir JK lifinin, DE uzamayan lifinin daha altında ve daha uzun olduğunu düşündük)

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{A \cdot e \cdot (R-y)} \quad (7.10)$$

- (7.9) ve (7.10) nolu denklemlerden birisiyle bir noktadaki gerilme hesaplanabilir.
- Noktanın koordinatı r veya y dir ve bilinen değerlerdir.
- e ve R değerleri ise problem içinde ayrıca hesaplanmalıdır.

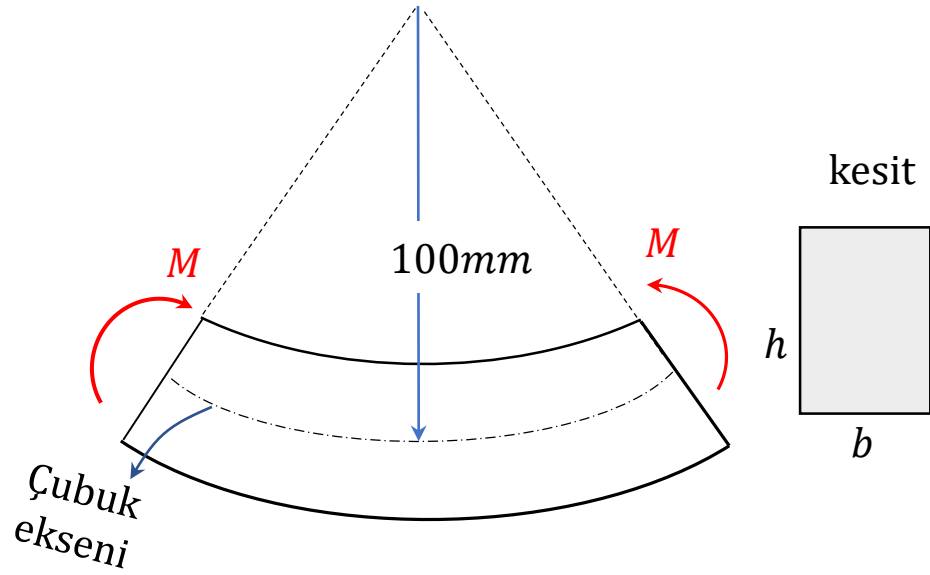
### Şekil değiştirmiş durumda Eğrilik Yarıçapı (R') Hesabı:

Uzamayan lif:  $\overline{DE} = \overline{D'E'} \rightarrow R \cdot \theta = R' \cdot \theta' , \theta' = \theta + \Delta\theta$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\theta'}{\theta} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\theta + \Delta\theta}{\theta} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\Delta\theta}{\theta} \right)$$

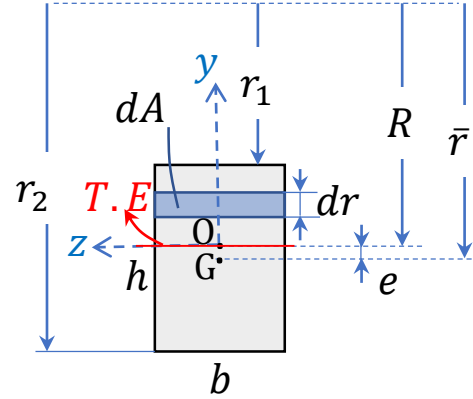
$$\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A \cdot e} \text{ bulmuştuk} \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A \cdot e \cdot E}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{M}{A \cdot e \cdot E} \right) \quad (7.11)$$

**Örnek 7.1**

Dikdörtgen kesitli, eğri eksenli çubuğa  $M = 500\text{Nm}$  lik bir eğilme momenti uygulanırsa, çubukta oluşan maksimum çeki ve bası gerilmelerini hesaplayınız. ( $b=50\text{mm}$ ,  $h=25\text{mm}$ )

Şiddetçe en büyük gerilmeler tarafsız eksenden en uzak noktalardadır.

**Çözüm:**

(7.9) Nolu denklemi kullanarak  $\sigma_x$  normal gerilmelerini hesaplayacağız:  $\sigma_x = \frac{M(r - R)}{A \cdot e \cdot r}$

Bu denklemde bilinmeyenler R ve e değerleridir. Bunları sırayla hesaplayalım:

$$(7.5) \text{ denkleminde: } \rightarrow R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$r_1 = \bar{r} - \frac{h}{2} = 100 - \frac{25}{2} \Rightarrow r_1 = 87.5\text{mm}$$

$$r_2 = \bar{r} + \frac{h}{2} = 100 + \frac{25}{2} \Rightarrow r_2 = 112.5\text{mm}$$

$$R = \frac{25}{\ln \frac{112.5}{87.5}}$$

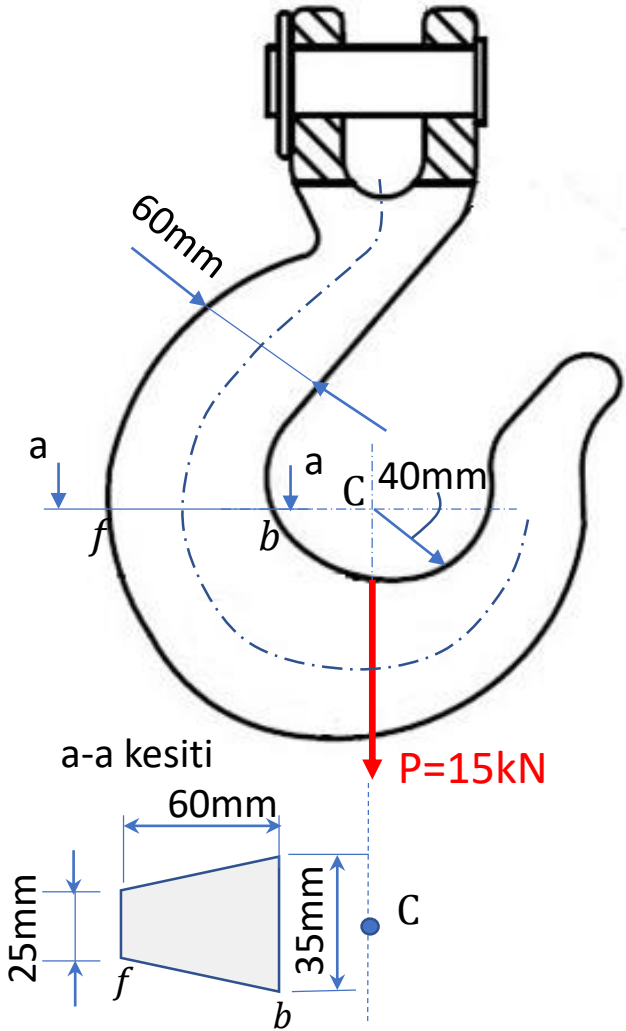
$$\rightarrow R = 99.477\text{mm}$$

$$e = \bar{r} - R = 100 - 99.477 \Rightarrow e = 0.523\text{mm}$$

$$\sigma_{x-\min} = \frac{M(r_1 - R)}{A \cdot e \cdot r_1} = \frac{500 \times 10^3 \times (87.5 - 99.477)}{(50 \times 25) \times (0.523) \times 87.5} = -104.69\text{MPa}$$

$$\sigma_{x-\max} = \frac{M(r_2 - R)}{A \cdot e \cdot r_2} = \frac{500 \times 10^3 \times (112.5 - 99.477)}{(50 \times 25) \times (0.523) \times 112.5} = 88.53\text{MPa}$$

**Örnek 7.2** Şekildeki kreyn kancasında a-a kesitinde oluşan maksimum çeki gerilmesini hesaplayınız.



**Çözüm:** Kancanın a-a kesiminin alt kısmının statik dengesini düşünelim (ayırma prensibi)  
f-b kesitindeki iç çeki kuvveti ve iç eğilme momentini sırayla uygulayabiliriz (süperpozisyon prensibi)

$$\sigma_{max} = \sigma_b = \sigma_{b1} + \sigma_{b2}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_b = \frac{P}{A} + \frac{M(r_b - R)}{A \cdot e \cdot r_b}$$

(Denk.7.4)

**M momentinin işaretine karar verelim:**

Bunun için sadece M etkisinin olduğu üstteki 2 nolu şekli düşüneceğiz.

Moment döndürme yönüne göre b noktasında çeki gerilmesi oluşur.

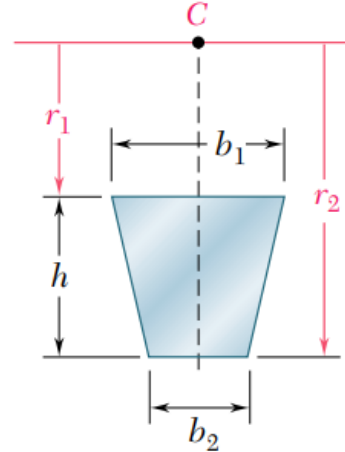
Soldaki şekilden  $r_b < R$  olduğu görülür.  $M < 0$  (negatif işaretli) alınmalıdır ki:  $\sigma_{b2} > 0$  çıksın.

Momentin şiddeti:  $M = -P \cdot \bar{r} = -15 \times 68.33 \rightarrow M = -1024.95 \text{ kNm}$

Şimdi gerilme formülündeki bilinmeyenler olan R ve e değerlerini hesaplamalıyız...>

Tablo 7.1 deki trapez kesit formülü

Bu örnek için değerler:



$$R = \frac{\frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (b_1 + b_2)}{(b_1 \cdot r_2 - b_2 \cdot r_1) \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} - h \cdot (b_1 - b_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 60^2 \cdot (35 + 25)}{(35 \times 100 - 25 \times 40) \cdot \ln \frac{100}{40} - 60 \cdot (35 - 25)}$$

$$b_1 = 35 \text{ mm}$$

$$b_2 = 25 \text{ mm}$$

$$r_1 = 40 \text{ mm}$$

$$r_2 = 100 \text{ mm}$$

$$h = 60 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow R = 63.88 \text{ mm}$$

Trapezoid

$$A_1 = \frac{1}{2} \times 60 \times 5 = 150 \text{ mm}^2 = A_2$$

$$A_3 = 25 \times 60 = 1500 \text{ mm}^2$$

$$\bar{r}_1 = 40 + 60 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{r}_1 = 60 \text{ mm} = \bar{r}_2$$

$$\bar{r}_3 = 40 + \frac{60}{2} \Rightarrow \bar{r}_3 = 70 \text{ mm}$$

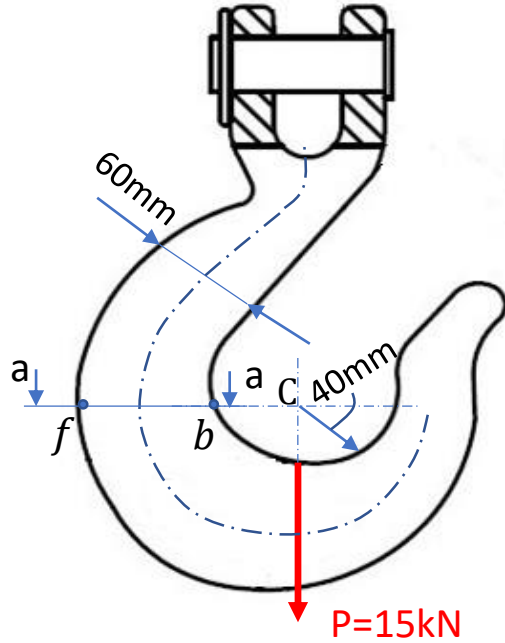
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1800 \text{ mm}^2$$

$$\text{Ağırlık Merkezi: } \bar{r} = \frac{A_1 \cdot \bar{r}_1 + A_2 \cdot \bar{r}_2 + A_3 \cdot \bar{r}_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

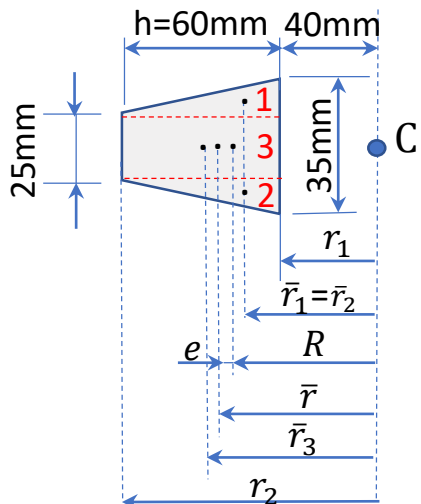
$$\bar{r} = \frac{150 \times 60 + 150 \times 60 + 1500 \times 70}{150 + 150 + 1500} \Rightarrow \bar{r} = 68.33 \text{ mm}$$

$$e = \bar{r} - R = 68.33 - 63.88 \Rightarrow e = 4.45 \text{ mm}$$

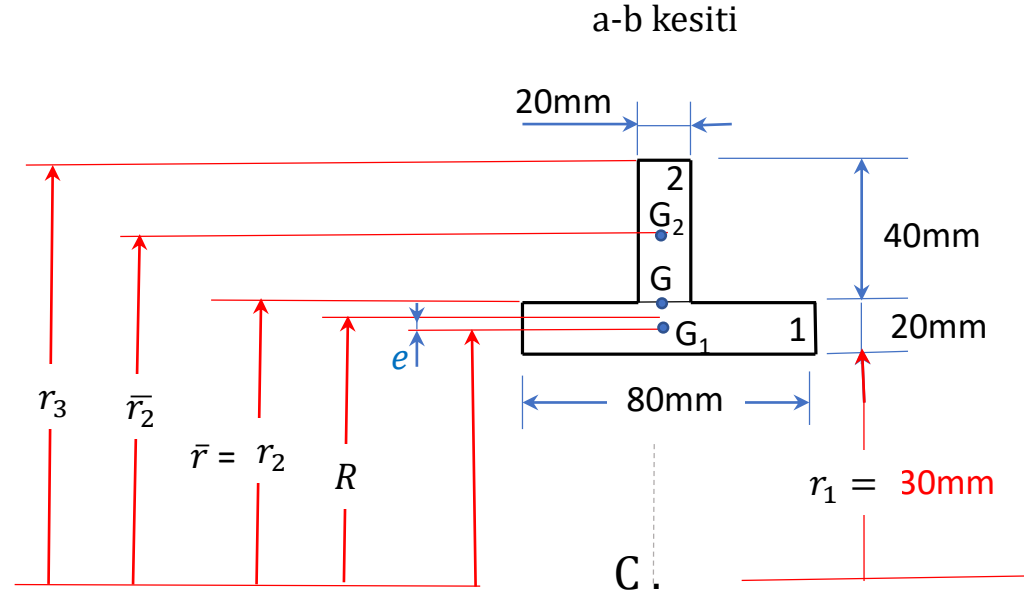
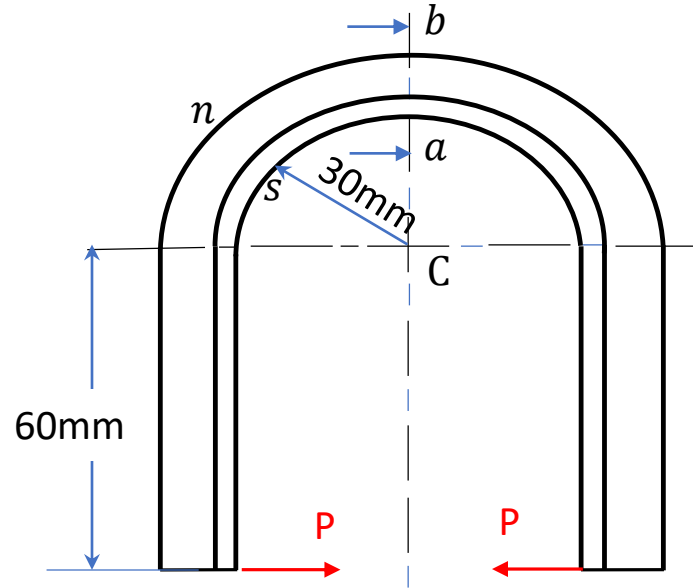
$$\sigma_{max} = \sigma_b = \frac{P}{A} + \frac{M(r_b - R)}{A \cdot e \cdot r_b} = \frac{15 \cdot 10^3}{1800} + \frac{-1024.95 \times 10^3 \times (40 - 63.88)}{1800 \times 4.45 \times 40} \rightarrow \sigma_{max} = 84.72 \text{ MPa}$$



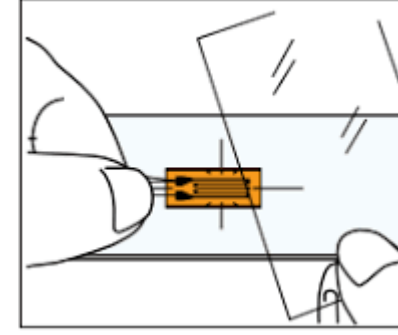
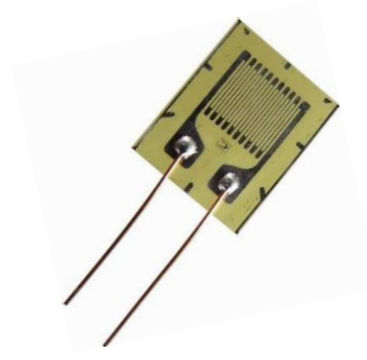
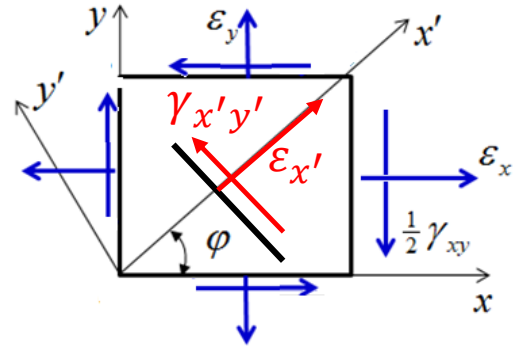
a-a kesiti



**Örnek Soru 7.3:** Şekildeki T kesitli makine parçasının emniyetli bası mukavemeti 50MPa olduğuna göre, uygulanabilecek en büyük P kuvvetinin değerini hesaplayınız.



**Cevap:** 8548.25N



# 8. Düzlemde Gerilme Dönüşümleri

ve

## Straingage Ölçümleri ile

# Deneysel Gerilme Tespitleri

## 8.1 Deneysel Ölçümlerin Önemi:

- Mühendislik hayatımız boyunca yaptığımız veya yapacağımız teorik hesaplamalarda, bilgisayar destekli analizlerde veya benzeri çalışmalarda, sonuçlara etki eden ve önceden öngöremediğimiz bazı faktörlerin veya muhtemel sayısal hataların oluşma riskleri daima vardır.
- Bu sebeple kaliteli bir mühendis, sadece teorik hesaplamalarla veya analiz programlarıyla bulduğu sonuçlara tek başına güvenmemeli,
- elde ettiği sonuçların en azından bazılarını farklı yöntemlerle de desteklemeye çalışmalıdır.
- Nitekim akademik makalelerin yayınlandığı kaliteli bilimsel dergilerde analiz sonuçlarının nasıl desteklendiği daima sorgulanan bir durum olup, sadece analiz sonuçlarını içeren çalışmalar kabul görmemektedir.
- Bu farklı destekleme yöntemleri içerisinde en çok bilineni ve güvenilir olanı deneysel ölçümlerdir.
- Bu sebeplerle, deneysel ölçümleri mühendislik hayatımızın vazgeçilmezi konumunda düşünmemiz ve bu alanda kendimizi geliştirme gayreti içine girmemiz son derece gereklidir. Deneysel ölçümleri yapabilen ve diğer çalışmalarını bu açıdan destekleyen bir mühendisin ar-ge, inovasyon faaliyetlerinde aranan ve tercih edilen kaliteli bir mühendis olacağına da şüphe yoktur.



## 8.2 Bu bölümde Amacımız:

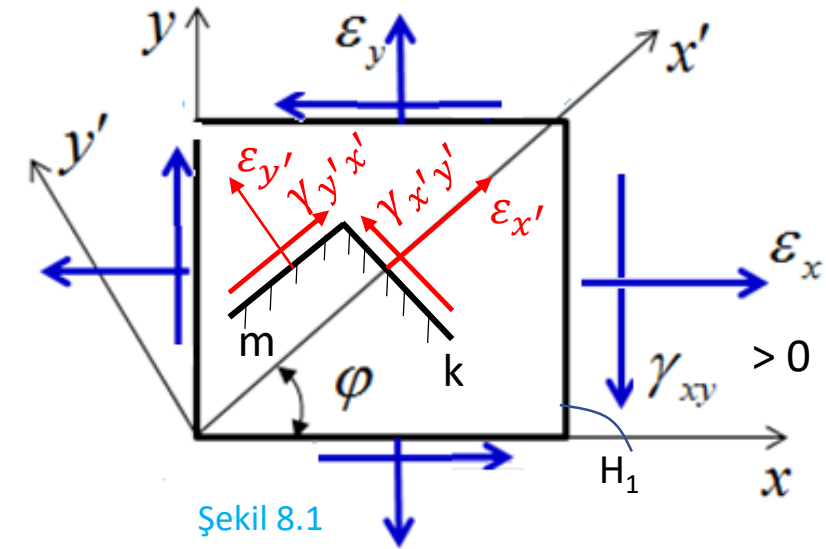
Straingage (okunuşu: sitirengayç) ismi verilen birim uzama ( $\epsilon$ ) ölçerler yardımıyla, deneysel gerinme (birim şekil değiştirme) ve gerilme tespitlerinin nasıl yapıldığını açıklamaktır. Fakat bundan önce düzlemde gerinme dönüşlerinin teorisini iyi anlamak gerekir...>>

### 8.3 Düzlemde Gerinme (Birim Şekil Değişirme) Dönüşümleri

Mukavemet 1-6a konusunda anlatılan Düzlemde Gerilme Dönüşüm Formüllerinde,

$\sigma_x$  yerine  $\rightarrow \varepsilon_x$ ,  $\sigma_y$  yerine  $\rightarrow \varepsilon_y$ ,  $\tau_{xy}$  yerine  $\rightarrow \frac{\gamma_{xy}}{2}$  yazılarak,

Yani bir noktadaki x-y eksen takımına göre şekil değiştirmeler ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$ ) belli iken normal +x eksenine  $\varphi$  ve  $\varphi+90^\circ$  açı yapan düzlemlerdeki şekil değiştirmeler aşağıdaki gerinme dönüşüm bağıntılarıyla elde edilir:



Şekil 8.1

$\varphi$  cinsinden:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \quad (8.1a)$$

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \sin^2 \varphi + \varepsilon_y \cos^2 \varphi - \gamma_{xy} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \quad (8.1b)$$

$$\gamma_{x'y'} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \gamma_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (8.1c)$$

veya

$2\varphi$  cinsinden:

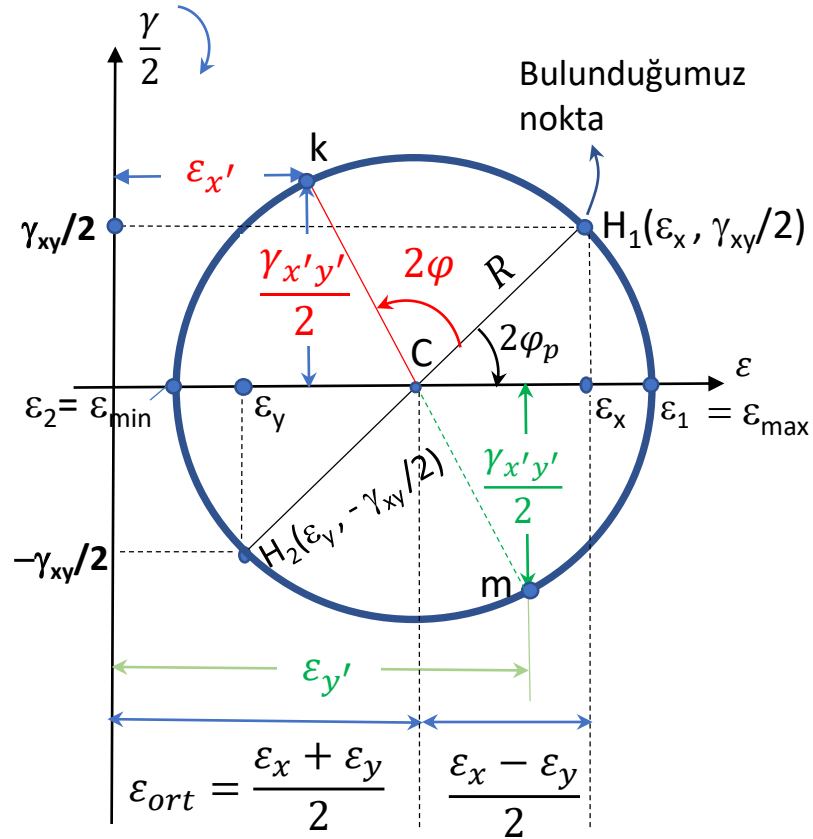
$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi \quad (8.2a)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi \quad (8.2b)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\varphi \quad (8.2c)$$

## 8.4 Düzlemde Gerinmeler için Mohr Çemberi

Bir noktada farklı  $\varphi$  açılara sahip sonsuz sayıda düzlem vardır. Tüm düzlemlerdeki gerinmeleri gösteren geometrik bir ifade olan Mohr Çemberi aşağıdaki şekilde çizilebilir. (Muk 1-6a konusunda gerilmeler için anlatılan mohr çemberine benzer adımlarla çizildiğine dikkat ediniz.)



### Mohr Çemberi Çizim Sırası:

- 1-  $H_1 (\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$  noktası belirlenir.
- 2-  $H_2 (\epsilon_y, -\gamma_{xy}/2)$  noktası belirlenir.
- 3-  $H_1$ - $H_2$  birleştirilir.
- 4- C merkezli çember çizilir.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (8.3)$$

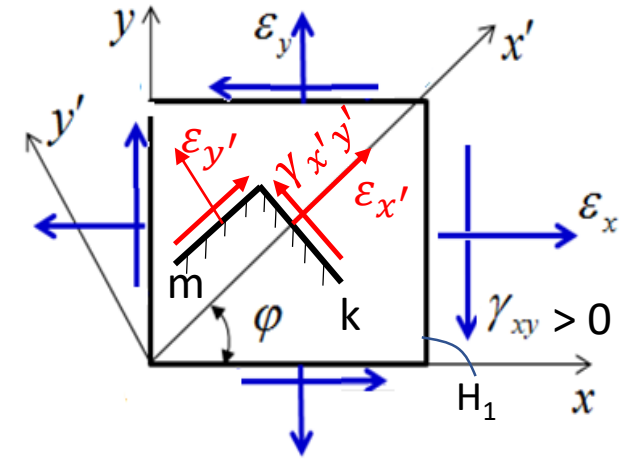
$$\text{Asal Gerinmeler: } \epsilon_{1,2} = \epsilon_{ort} \pm R \quad (8.4)$$

$$\rightarrow \epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (8.5)$$

$$\tan 2\varphi_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (8.6)$$

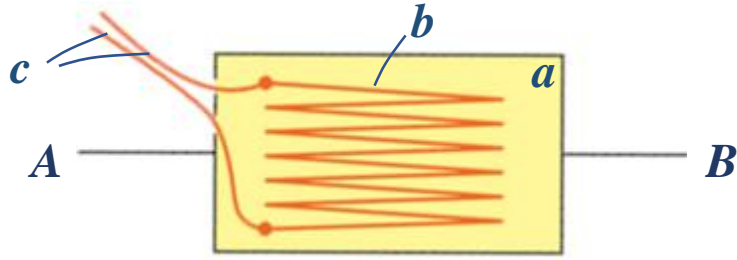
Normali  $+x$  eksenine  $\varphi$  açısı yapan  $k$  düzlemindeki gerinme bileşenleri  $(\epsilon_{x'}, \gamma_{x'y'})$  ni bulmak için, Mohr çemberi üzerinde bulunduğumuz nokta olan  $H_1$  den, gerçekteki ile aynı yönde fakat  $2\varphi$  kadar döneriz ve çember üzerindeki  $k$  noktasına geliriz. Bu noktanın koordinatları bize aradığımız gerinme bileşenlerini verir.

En sağdaki  $H_1$  düzlemindeki  $\gamma_{xy}$  aşağı yönde ise, Mohr çemberinde pozitif, 8.1, 8.2 dönüşüm denklemlerinde ise negatif alınır.



## 8.5 Strain-gage (Gerinme Ölçer)

$\varepsilon$  birim uzama ölçümünde kullanılan en yaygın yöntem, bir iletken telin elektrik direncinin, uzamayla değişimine dayanan **strain-gage tekniği**dir. Şekilde bir **strain-gage** şematik olarak görülmektedir.



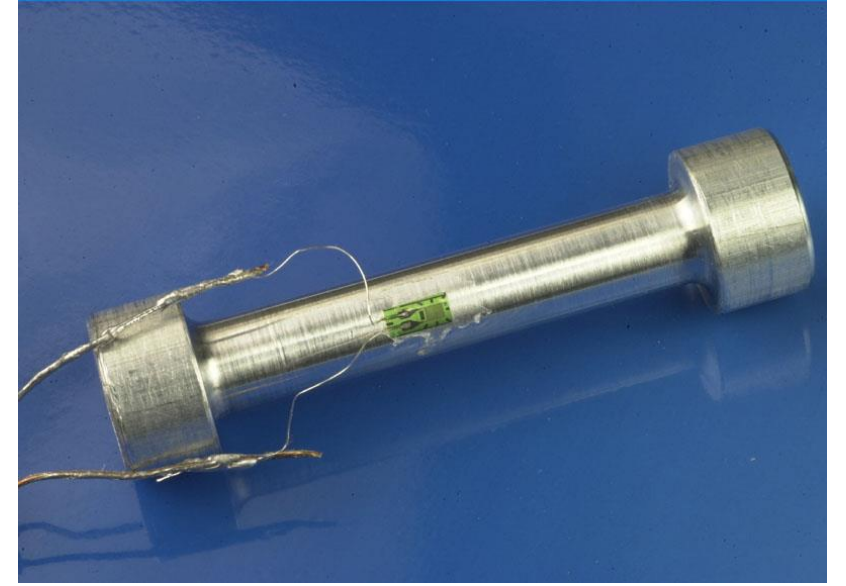
Şematik Strain-gage –Gerinim-ölçer

### Strain-gage kısımları:

*a* : taşıyıcı (yalıtkan) folyo

*b* : iletken tel

*c* : bağlantı uçları



- Sonuç olarak strain-gage lerin uzaması ile üzerindeki iletkenin elektrik direnci arasında bir ilişki söz konusudur.
- Bu ilişkiden yola çıkarak, strain-gage lerin yerleştirme doğrultusunda oluşan gerinme (birim uzama) değeri deneysel olarak tespit edilir ve Hooke bağıntılarıyla gerilme değerlerine geçilebilir.
- Genelde strain-gage ler cismin yüzeyine yapıştırılır ve yüzeyde düzlem gerilme sözkonusudur.
- Bir yüzeydeki tüm gerilme bileşenlerini bulmak için genel anlamda en az 3 strain-gage kullanılır.
- Strain-gage sadece gerinme dediğimiz birim uzamaları ( $\varepsilon$ ) ölçer; ancak  $\gamma$  değerlerini ölçemez.  $\gamma$  gerinme dönüşüm bağıntılarından hesaplanır.
- Strain-gage lerle elastik sınırlar içerisindeki  $\varepsilon$  değerleri ölçülebilir.

Şimdi bu anlatılanları farklı örnekler üzerinden pekiştirelim...>>

**Örnek 8.1**

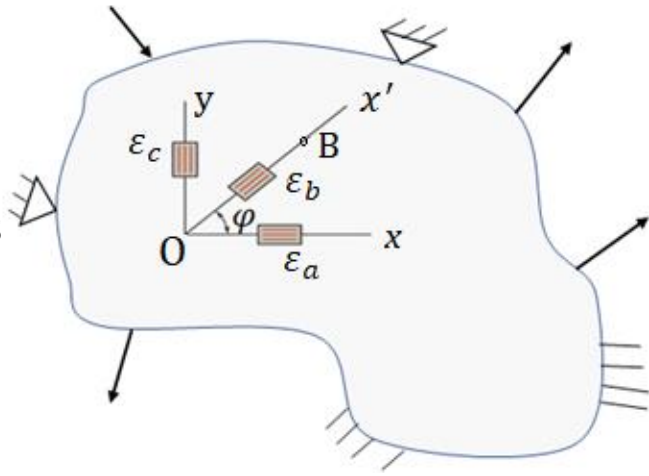
$$\varepsilon_a = 10 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_b = 10.6 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_c = 2 \times 10^{-5}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$



Çeşitli bölgelerinden farklı bağlantılara sahip ince bir levhanın dış yüzeyindeki herhangi bir O noktasına 3 lü bir straingage rozeti yapıştırılmış ve daha sonra farklı bölgelerinden dış yükler uygulanmıştır. Yükleme sonucu cisim statik dengede kalmaya devam etmiştir. Straingage lerden den ölçülen değerler üstte gösterilmiştir.

a-b strangage leri arasındaki açı  $\varphi = 30^\circ$  olduğuna göre, O noktasındaki;

a-) Gerinmelere ait Mohr çemberini çizerek asal gerinmeleri ve düzlemlerini bulunuz.

b-)normali +x eksenine 45°açı yapan düzlemdeki gerinme bileşenlerini,

c-) Gerilme bileşenlerini, asal gerilmeleri ve düzlemlerini bulunuz.

**Çözüm:**

a-) Straingage ler yerleştirme doğrultularındaki birim uzamaları ölçerler.

Buna göre:  $\varepsilon_a = \varepsilon_x = 10 \times 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_c = \varepsilon_y = 2 \times 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_b = \varepsilon_{x'} = 10.6 \times 10^{-5}$

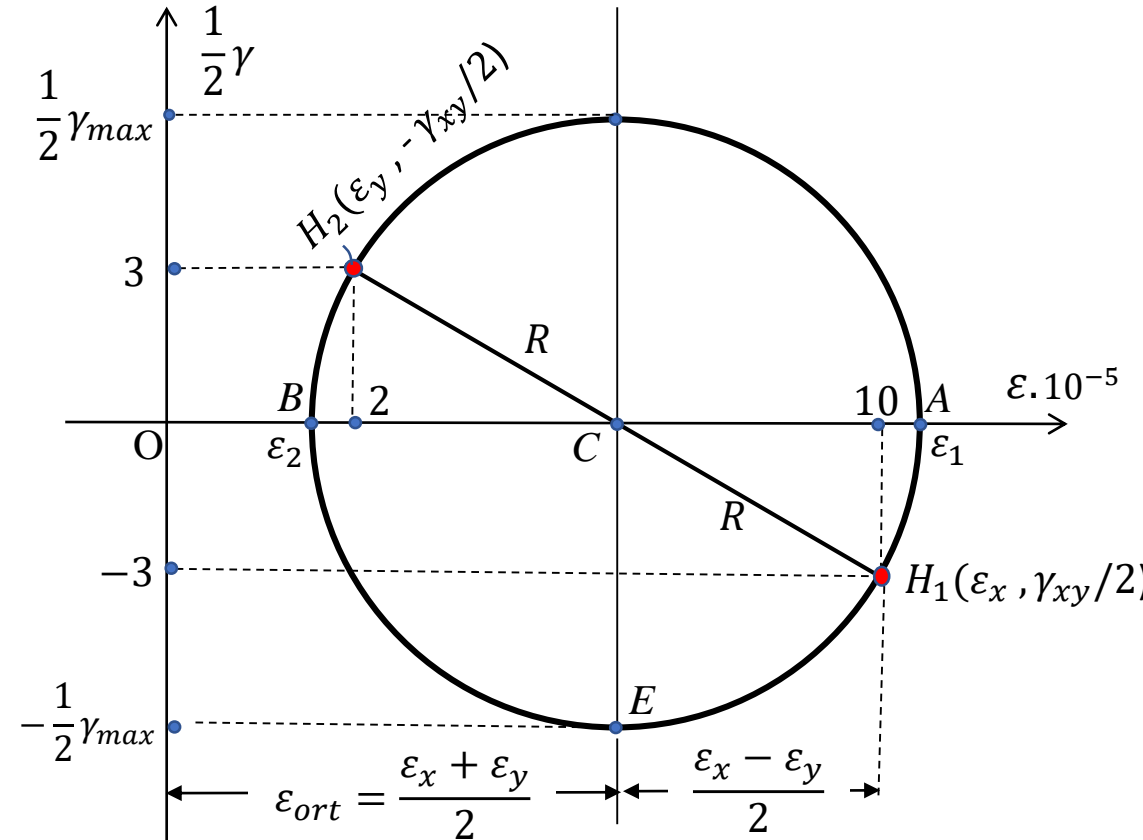
OB doğrultusu yani  $x'$  ekseninin +x eksenine yaptığı açı:  $\varphi = 30^\circ$

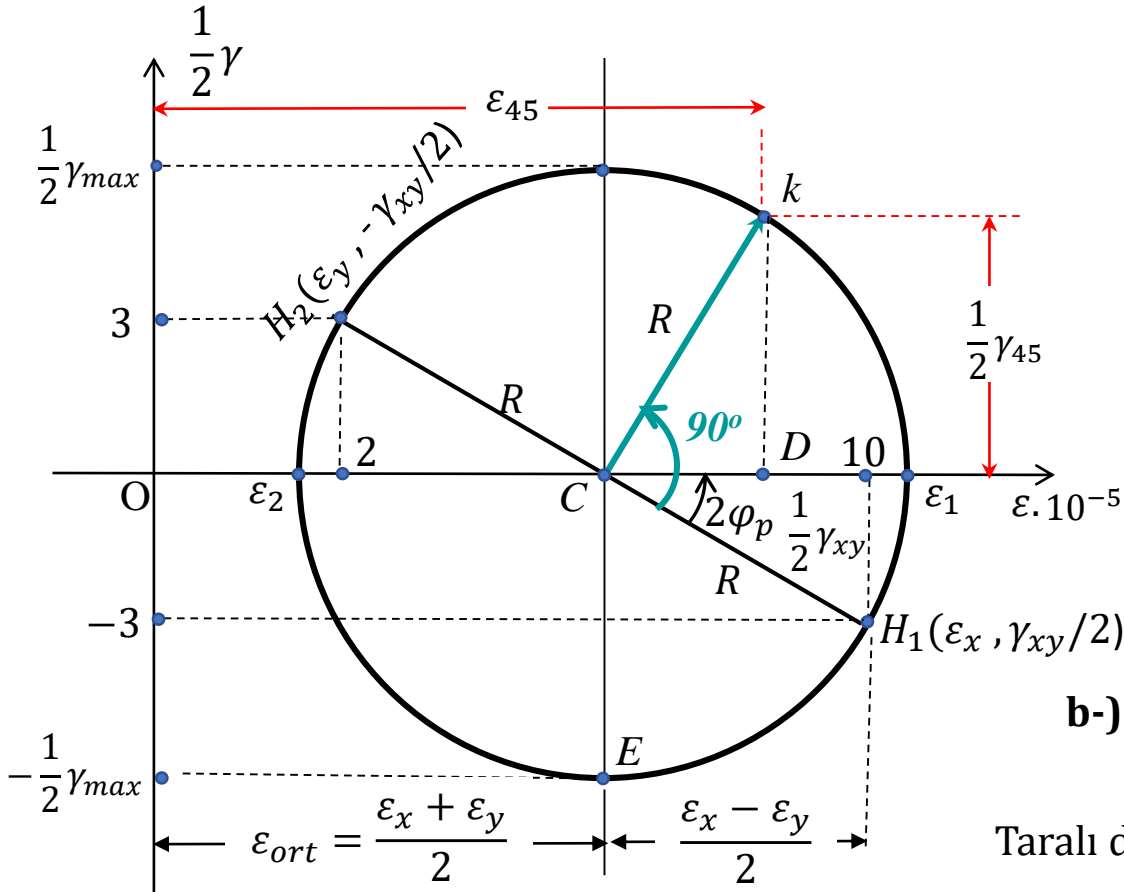
8.1 a denkleminden:  $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \cos \varphi \cdot \sin \varphi$

$$10.6 \times 10^{-5} = 10 \times 10^{-5} \cos^2 30^\circ + 2 \times 10^{-5} \sin^2 30^\circ + \gamma_{xy} \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ \rightarrow \gamma_{xy} = 6 \times 10^{-5}$$

$\gamma_{xy}$  denklemlerde pozitif bulunduğu için...>> Mohr çemberinde;  $\rightarrow \gamma_{xy} = -6 \times 10^{-5}$  alınır.

8.4 maddesinde anlatılan adımlardan mohr çemberi yandaki gibi çizilir:





$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} 10^{-5} \rightarrow R = 5(10^{-5})$$

$$\varepsilon_{ort} = \frac{10 + 2}{2} 10^{-5} = 6(10^{-5})$$

Asal gerinmeler: 8.4 denkleminde:  $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{ort} \pm R = (6 \pm 5)(10^{-5})$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = 11 \times 10^{-5} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{min} = 1 \times 10^{-5}$$

$$\tan 2\varphi_p = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{6}{10 - 2} \rightarrow \varphi_p = 18.4^\circ$$

**b-)** +x eksenine 45° açı yapan düzlemdeki gerinme bileşenlerini bulacağız:

### Mohr Çemberinden

Taralı düzlemin mohr çemberindeki yeri k noktasıdır.

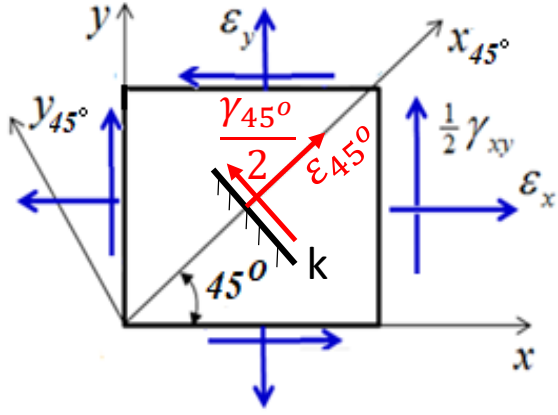
(Bulduğumuz nokta olan H<sub>1</sub> den aynı yönde 2 x 45° = 90° dönülerek k noktasına gelinir.)

k noktasının koordinatları taralı düzlemdeki gerinme bileşenlerini  $(\varepsilon_{45^\circ}; \frac{\gamma_{45^\circ}}{2})$  verecektir.

$$\varepsilon_{45^\circ} = \overline{OC} + \overline{CD} = \varepsilon_{ort} + \underbrace{R \cos(90^\circ - 2\varphi_p)}_{\text{CkD dik üçgeninden}} = 6(10^{-5}) + 5(10^{-5}) \cos(90^\circ - 2 \times 18.4^\circ) \rightarrow \varepsilon_{45^\circ} = 9 \times 10^{-5}$$

CkD dik üçgeninden

$$\frac{\gamma_{45^\circ}}{2} = R \sin(90^\circ - 2\varphi_p) = 5(10^{-5}) \sin(90^\circ - 2 \times 18.4^\circ) \rightarrow \gamma_{45^\circ} = 8 \times 10^{-5}$$



### Veya Denklemlerden

8.1.a denklemden (bu durumda  $\varphi = 45^\circ$  alınır) :  $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \cos \varphi \cdot \sin \varphi$

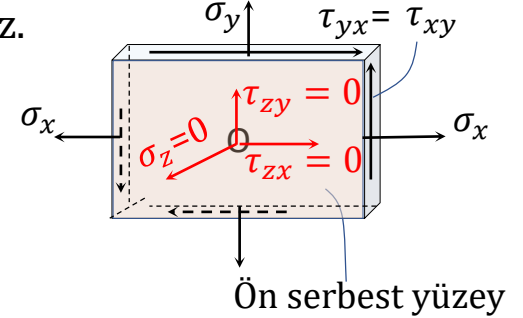
$$\varepsilon_{45^\circ} = 10 \times 10^{-5} \cos^2 45^\circ + 2 \times 10^{-5} \sin^2 45^\circ + 6 \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ \rightarrow \varepsilon_{45^\circ} = 9 \times 10^{-5}$$

8.1.b denklemden :  $\gamma_{x'y'} = \gamma_{45^\circ} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \gamma_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$

$$\gamma_{45^\circ} = [-2(10 - 2) \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ + 6(\cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ)](10^{-5}) \rightarrow \gamma_{45^\circ} = -8 \times 10^{-5} \quad \text{(mohr çemberinden bulduğumuz değer zıt işaretlisi)}$$

**c-)** Genel bir kural: Bir cismin kuvvet uygulanmamış serbest yüzelerindeki noktalarda gerilme oluşmaz.

*Bir yüzey noktasında 2 tane kayma gerilmesi, 1 tane normal gerilme olmak üzere toplam 3 gerilme bileşeni vardır. 3lü strainage rozeti, levhanın x-y düzlemine paralel olan dış serbest yüzeyine yapıştırıldığı için bu yüzeyde gerilme bileşenleri sıfırdır. ( $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ).*



Bu durumda Hooke bağıntılarından mevcut gerilmeleri şu hesaplayabiliriz:

Mukavemet I – 3.9a,c,d denklemlerinden

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Gerilmeler çekilirse:

$$\sigma_x = E \frac{\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E \frac{\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy}$$

Deneysel ölçümler yerine koyulursa:

$$= 200(10^3) \frac{10 + 0.3(2)}{1 - 0.3^2} 10^{-5} \rightarrow \sigma_x = 23.29 \text{ MPa}$$

$$= 200(10^3) \frac{2 + 0.3(10)}{1 - 0.3^2} 10^{-5} \rightarrow \sigma_y = 10.99 \text{ MPa}$$

$$= \frac{200(10^3)}{2(1 + 0.3)} 6(10^{-5}) \rightarrow \tau_{xy} = 4.61 \text{ MPa}$$

Asal Gerilmeler: Muk.1 - 6.9 gerilme dönüşüm denklemlerinden:

$$\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{23.29 + 10.99}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{23.29 - 10.99}{2}\right)^2 + 4.61^2}$$

$\sigma_{\max} = 24.83 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{\min} = 9.45 \text{ MPa}$

Asal gerilme düzlemleri: Muk.1 - 6.10 denkleminde

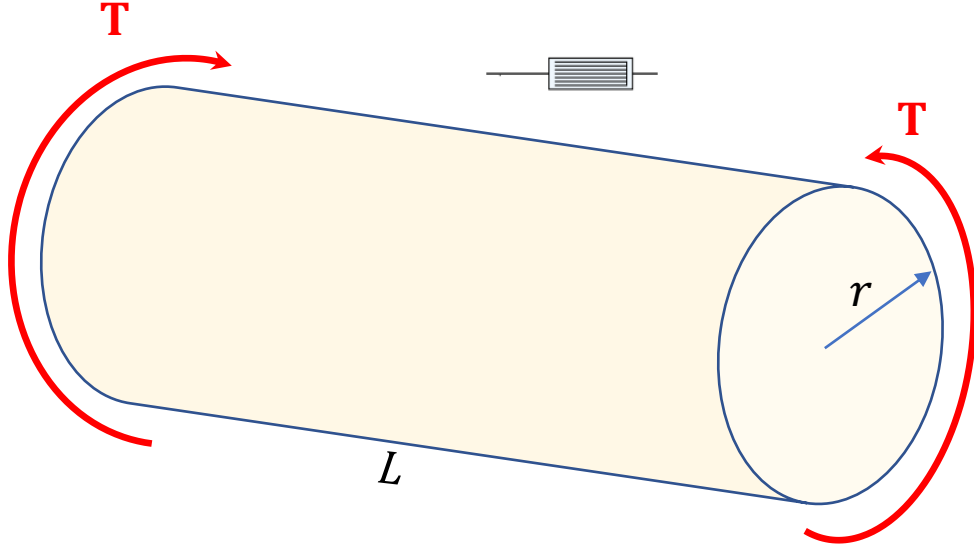
$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{4.61}{23.29 - 10.99} \rightarrow \theta_p = 18.43^\circ$$

Veya Asal gerilmeler Hooke Bağlılarından da bulunabilirdi. Şöyle ki:

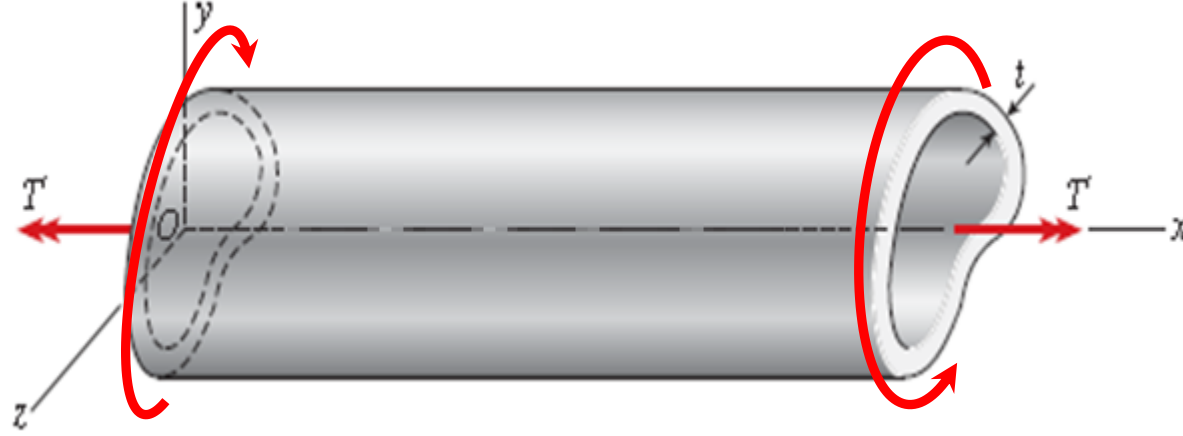
$$\sigma_{\max} = E \frac{\varepsilon_{\max} + \nu \varepsilon_{\min}}{1 - \nu^2} = 200(10^3) \frac{11 + 0.3(1)}{1 - 0.3^2} 10^{-5} \rightarrow \sigma_{\max} = 24.83 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma_{\min} = E \frac{\varepsilon_{\min} + \nu \varepsilon_{\max}}{1 - \nu^2} = 200(10^3) \frac{1 + 0.3(11)}{1 - 0.3^2} 10^{-5} \rightarrow \sigma_{\min} = 9.45 \text{ MPa},$$

**Örnek 8.2:** Tek straingage kullanarak  $r$  yarıçaplı içi dolu bir mildeki  $T$  burulma momentini nasıl tespit edersiniz? Açıklayınız.  
Malzeme özelliklerinden  $E$  ve  $\nu$  bilindiğini kabul ediniz.



**Cevap:** 
$$T = E \frac{\pi r^3}{2(1 + \nu)} \epsilon_{45^\circ}$$



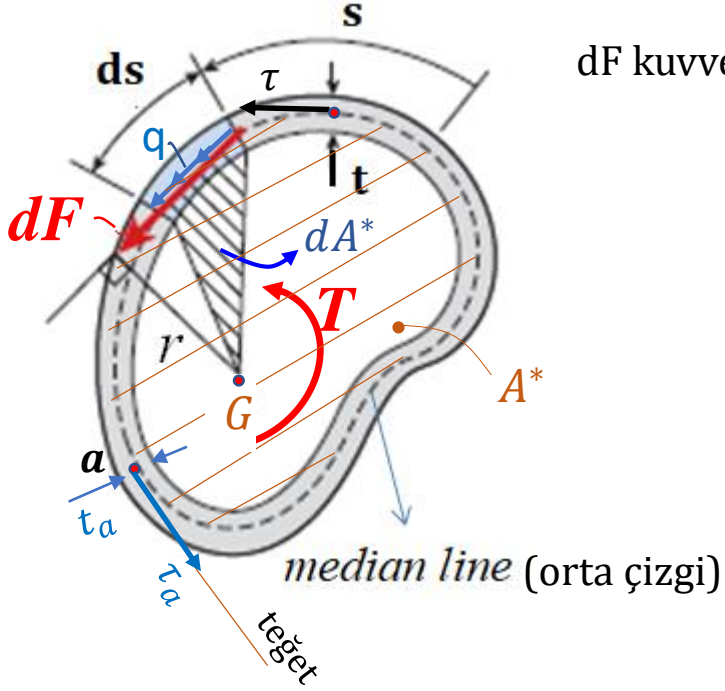
# 9. İNCE CİDARLI KAPALI TÜPLERİN BURULMASI



Kesitte birim uzunluğa düşen iç kuvvet  $q$  ise  
 $ds$  diferansiyel uzunluğuna düşen kuvvet :

$$dF = qds$$

$dF$  kuvvetinin  $G$  ağırlık merkezine göre momenti:  $dT = r dF = r(qds)$



( $L_m$  : orta çizginin toplam uzunluğu)

$A^*$  : Orta çizgi içinde kalan toplam alandır.

Kesitteki toplam moment:

$$T = \int dT = q \int_0^{L_m} r ds$$

Taralı dif. Alan:  $dA^* = \frac{1}{2} r ds \rightarrow r ds = 2dA^*$

$$\int_0^{L_m} r ds = \int 2dA^* = 2A^*$$

$$\rightarrow T = q(2A^*)$$

$$\rightarrow q = \frac{T}{2A^*}$$

(9.2)

9.2 denklemindeki  $q$  değerini 9.1 denkleminde yerine koyarsak:

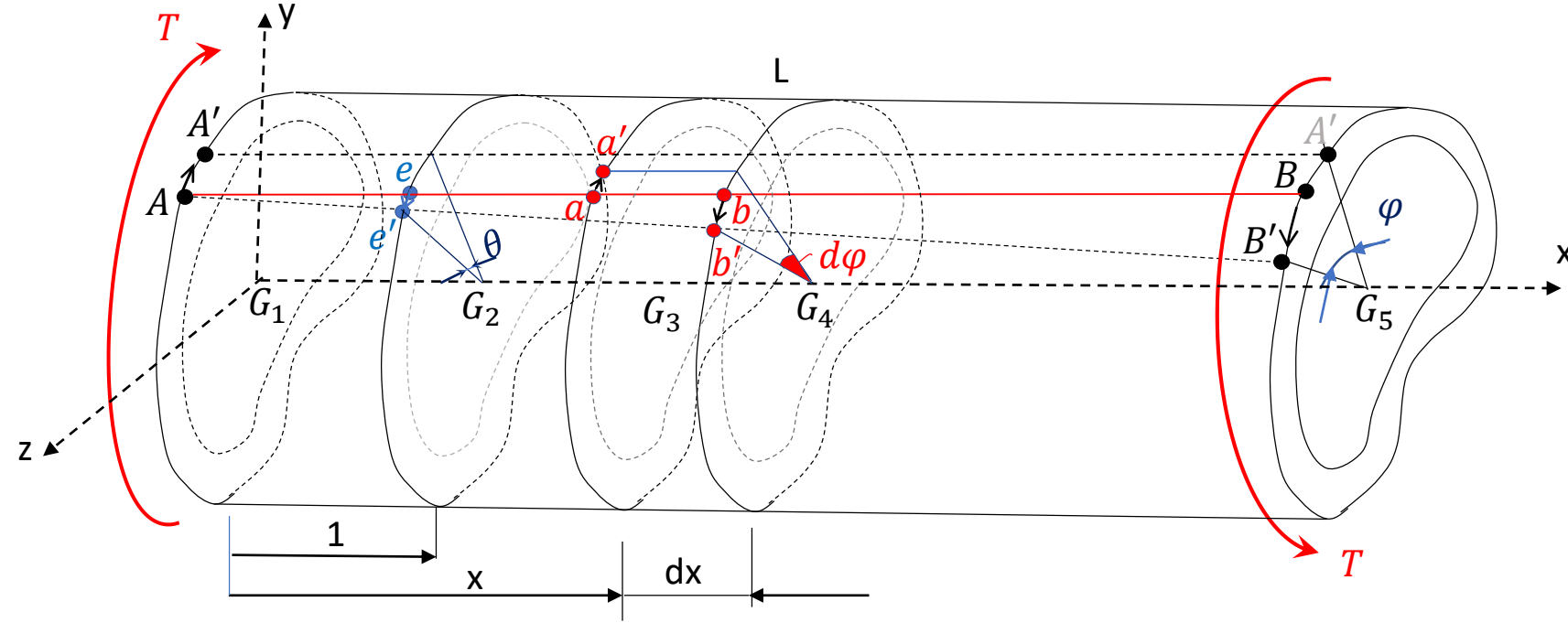
$$t \text{ kalınlığındaki } bir \text{ noktasındaki gerilme: } \rightarrow \tau = \frac{T}{2A^*t}$$

(9.3)

$$\text{Örn: } a \text{ noktasındaki gerilme: } \tau_a = \frac{T}{2A^*t_a}$$

## 9.2 Tüplerde Burulma Açısı Hesabı

Her iki ucundan T burulma momentlerine maruz bir kapalı tüpte, mil eksenine paralel olan çizgi üzerinde bulunan A ve B noktalarının şekil değiştirmeden sonraki konumları A' ve B' dür. Sol G<sub>1</sub> kesitinin sağ G<sub>5</sub> kesitine göre dönme miktarı  $\varphi$  burulma açısı ile ifade edilir. Dikkat edilirse  $\varphi$  açısı: A' noktasının G<sub>5</sub> kesitinden izdüşümü ile B' arasındaki merkez açıdır. Farklı iki kesitin birbirlerine göre burulma açıları aynı mantıkla bulunur.



$\theta$  :birim burulma açısı. 1 birim uzaklıktaki G<sub>2</sub> kesitinin başlangıç kesiti G<sub>1</sub> 'e göre dönme miktarıdır.

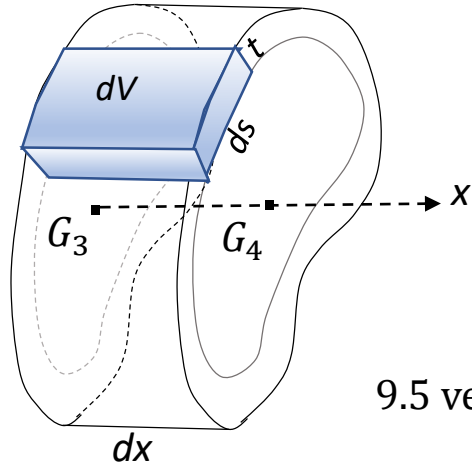
$d\varphi$  :diferansiyel burulma açısı. dx uzunluğundaki parçanın uç kesitlerinin birbirlerine göre dönme miktarıdır. (Şekilde G<sub>4</sub> kesitinin G<sub>3</sub> 'e göre dönme miktarıdır.

Dikkat edilirse kesitlerin üzerindeki noktaların şekil değiştirmiş son konumları (e', b', B' noktaları )aynı doğrusal çizgi üzerinde yer alır. Bu ise  $\varphi$  burulma açısının x'e göre doğrusal olarak arttığını gösterir.

$x=0$  da  $\varphi = 0$  ,  $x= l$  için  $\varphi = \theta$  olduğuna göre ve doğrusal bir artış söz konusu olduğuna göre:  $\varphi = \theta \cdot x$  (9.4)

$d\varphi = \theta dx$  olduğundan, 5.18.a denkleminde  $T$  torkunun yaptığı diferansiyel şekil değiştirme işi:  $dU_d = \frac{1}{2} T d\varphi = \frac{1}{2} T \theta dx$  (9.5)

Sadece  $\tau$  gerilmesi olduğu için (5.12.a denkleminde) enerji yoğunluğu:  $a_i = \frac{\tau^2}{2G}$  (9.6)



5.14 denklemini aslında tüpün bütünü için yazılır. Bu denklemini yandaki  $dx$  uzunluğundaki dif. parçaya uygularsak şekil değiştirme enerjisi de diferansiyel büyüklükte olur. Şöyle ki:

$$dU_i = \int_V a_i dV = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (9.7)$$

5nci konudan biliyoruz ki, dış kuvvetlerin işi elastik şekil değiştirme enerjisi olarak depolanır. Bu kuralı  $dx$  uzunluğundaki diferansiyel parça için uygularsak:

9.5 ve 9.7 denklemlerini eşitleriz. .. >>  $dU_d = dU_i$

$$\frac{T\theta}{2} dx = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV$$

(9.3) denklemini:

$$\tau = \frac{T}{2A^*t}$$

$$dV = t \cdot ds \cdot dx,$$

$$\rightarrow \frac{T\theta}{2} dx = \frac{1}{2G} \int_s \frac{T^2}{4A^{*2}t^2} t \cdot ds \cdot dx \rightarrow \frac{T\theta}{2} dx = \frac{T^2 dx}{8GA^{*2}} \oint \frac{ds}{t}$$

Buradan birim dönme (burulma) açısı :

$$\theta = \frac{T}{4A^{*2}G} \oint \frac{ds}{t} \quad (9.8)$$

Toplam dönme açısı  $\varphi$  :

(9.4 denkleminden):  $\varphi = \theta \cdot L$  (9.9)

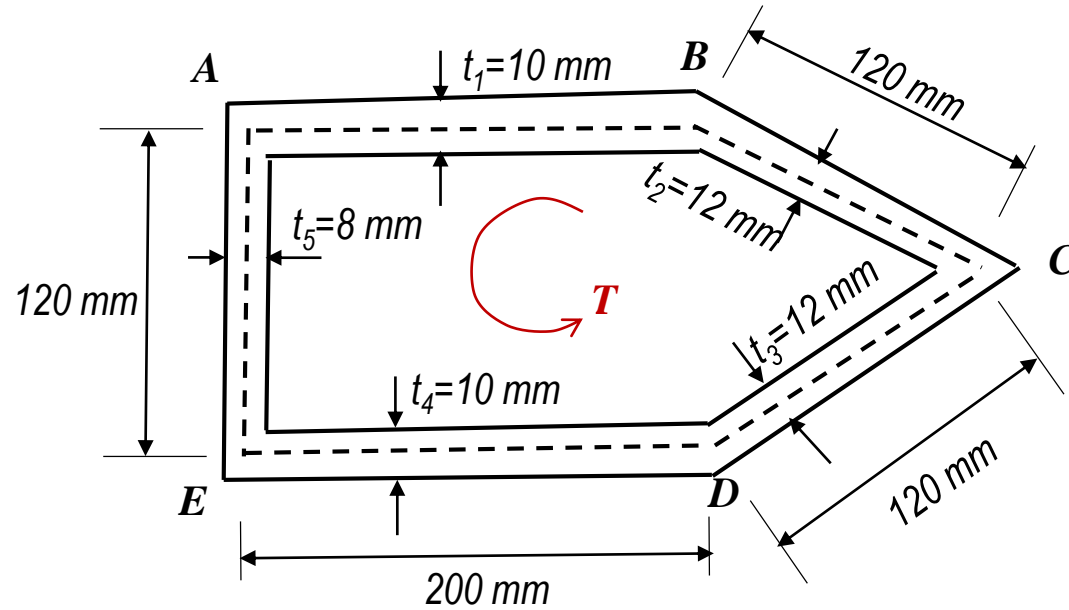
$$\varphi = \frac{TL}{4A^{*2}G} \oint \frac{ds}{t} \quad (9.10)$$

Şimdi bir örnekle konuyu iyice anlayalım...>>

## Örnek 9.1

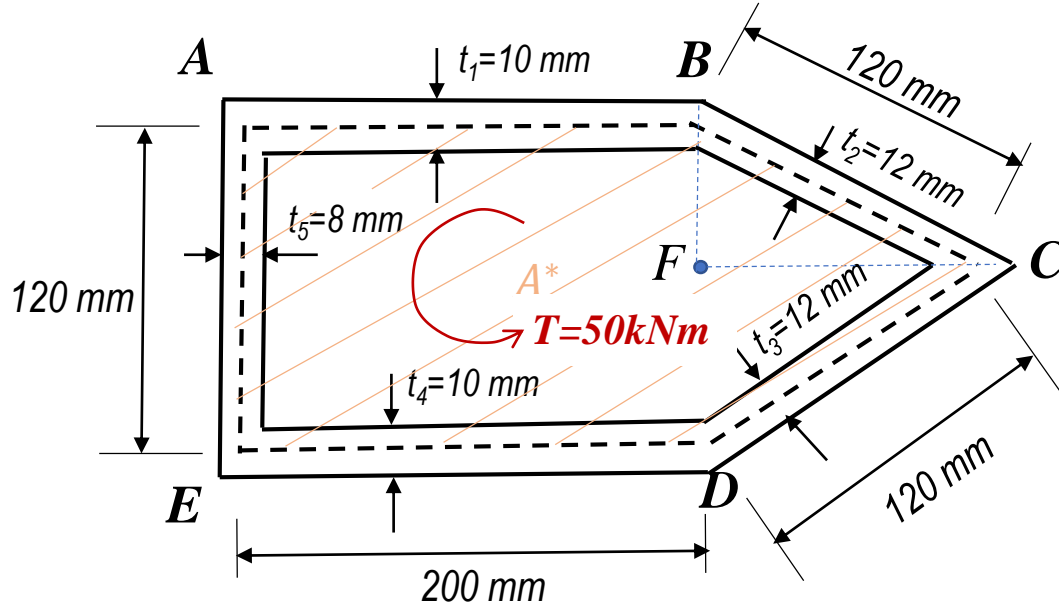
Kesit ölçüleri şekilde verilen tüp,  $T=50 \text{ kNm}$  büyüklüğündeki bir burulma momentine maruz bırakılıyor. Tüpün Boyu 0.2m olduğuna göre :

- Kesitte meydana gelen en büyük kayma gerilmesini ve yerini bulunuz.
- Kesitteki kayma akısını hesaplayınız.
- Birim ve toplam dönme açılarını hesaplayınız ( $G=70 \text{ GPa}$ )



a) Maksimum kayma gerilmesi hesabı:

9.8 denkleminde:  $\tau = \frac{T}{2A^*t} \rightarrow \tau_{max} = \frac{T}{2A^*t_{min}}$  ,  $t_{min} = t_5 = 8 \text{ mm}$



$$\overline{FC}^2 = 120^2 - 60^2 \rightarrow \overline{FC} \cong 104 \text{ mm}$$

Orta çizgi içinde kalan alan:

$$A^* = (120 \times 200) + \frac{1}{2}(120 \times 104) = 30.24 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{50 \times 10^6 \text{ Nmm}}{2(30.24 \times 10^3 \text{ mm}^2)(8 \text{ mm})} \rightarrow \tau_{max} = 103.34 \text{ MPa}$$

(en ince bölge olan AE kısmında oluşur)

b) Kayma Akısı: 9.2 denkleminde:  $q = \frac{T}{2A^*} = \frac{50 \times 10^6}{2(30.24 \times 10^3)} = 826.72 \text{ N/mm}$

veya kayma akısı q sabit olduğundan: Denklem 9.1 den  $q = \tau \cdot t \rightarrow q = \tau_{max} \cdot t_{min} = 103.34 \times 8 = 826.72 \text{ N/mm}$

c) Birim dönme (burulma) açısı

9.8 denkleminde: 
$$\theta = \frac{T}{4A^*{}^2G} \oint \frac{ds}{t}$$

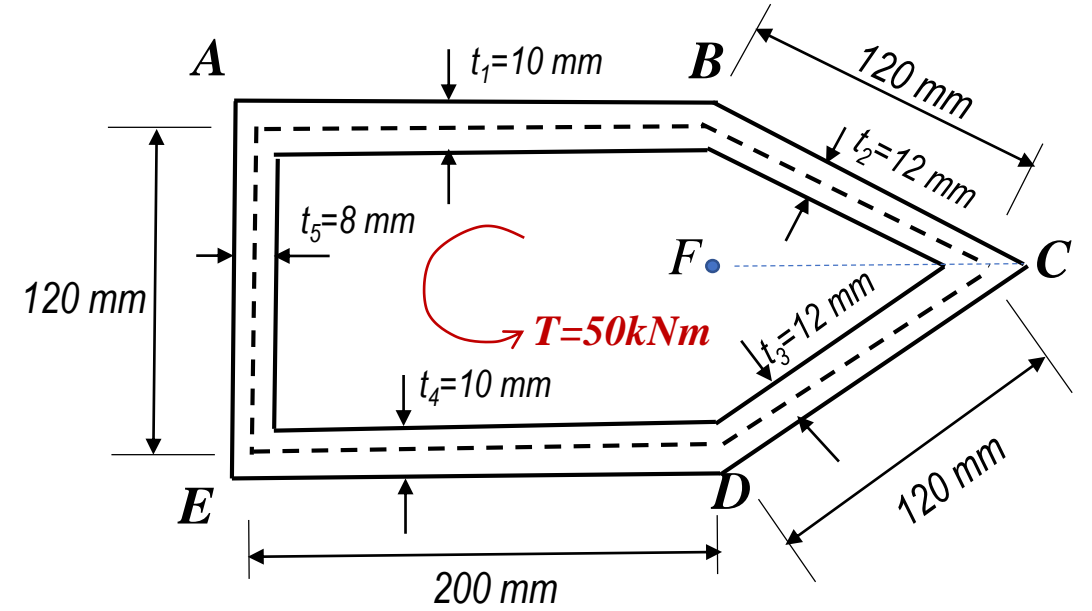
$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{t_1} \int_A^B ds + \frac{1}{t_2} \int_B^C ds + \frac{1}{t_3} \int_C^D ds + \frac{1}{t_4} \int_D^E ds + \frac{1}{t_5} \int_E^A ds$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{10} 200 + \frac{1}{12} 120 + \frac{1}{12} 120 + \frac{1}{10} 200 + \frac{1}{8} 120 = 75$$

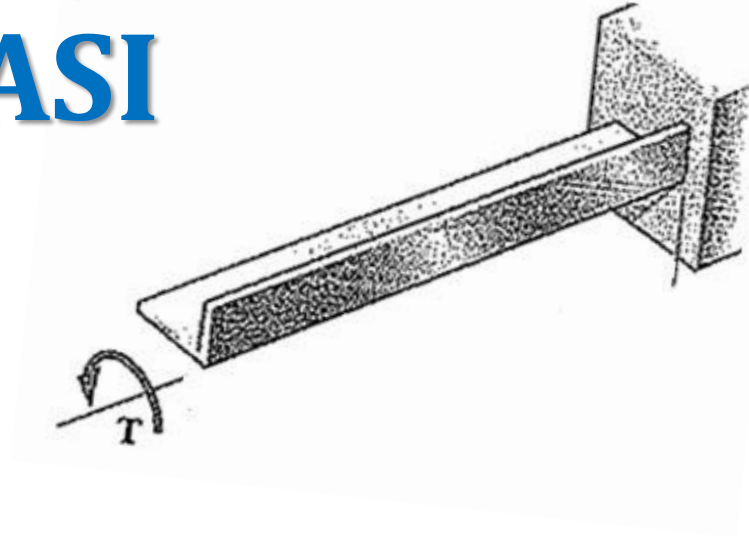
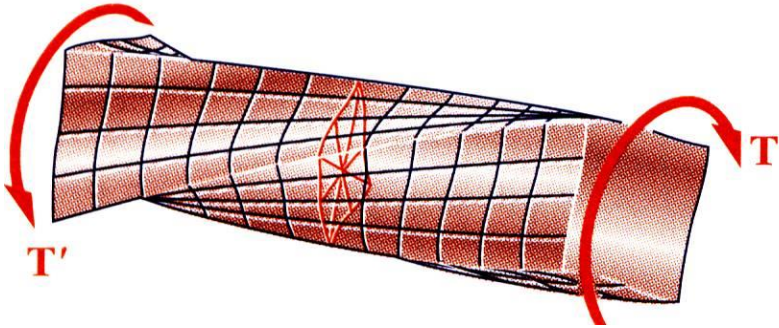
$$\theta = \frac{50 \times 10^6 \text{ Nmm}}{4 \times (30.24 \times 10^3 \text{ mm}^2)^2 \times (70 \times 10^3 \text{ MPa})} 75$$

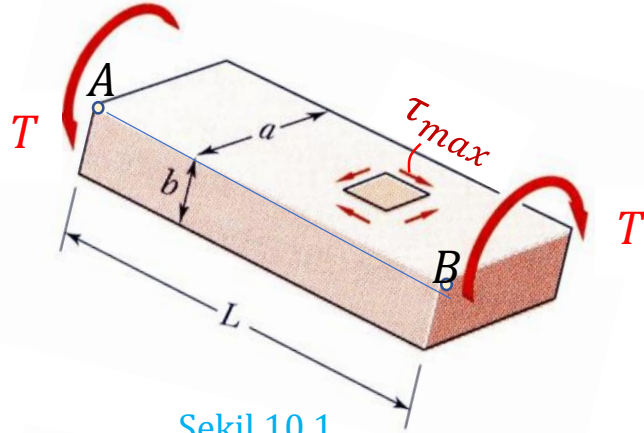
$$\theta = 1.465 \times 10^{-5} \text{ rd/mm} \quad \rightarrow \quad \theta = 1.465 \times 10^{-5} \times \frac{180}{\pi} = 83.94 \times 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{mm}$$

9.9 denkleminde..>> Toplam dönme açısı:  $\varphi = \theta \cdot L = 83.94 \times 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{mm} \times 200 \text{ mm} \cong 0.168^\circ$

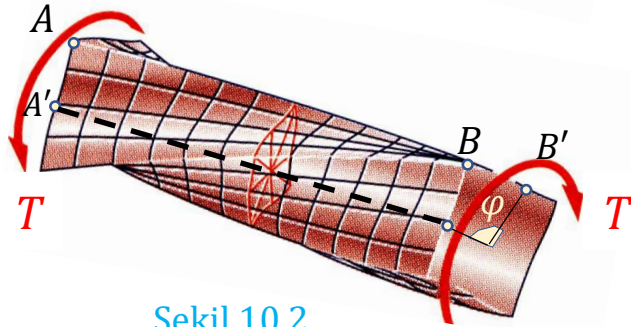


# 10. DİKDÖRTGEN VEYA İNCE PROFİL KESİTLİ ÇUBUKLARIN BURULMASI

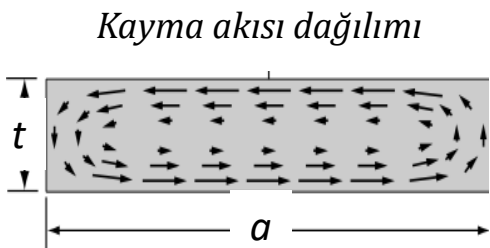




Şekil 10.1

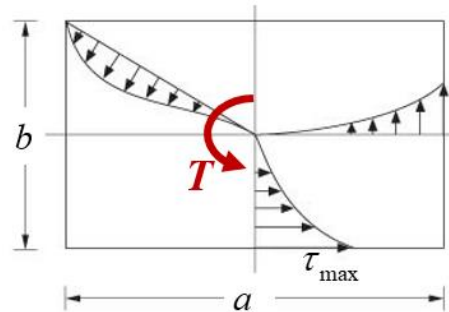


Şekil 10.2



Şekil 10.3

$a$ : uzun kenar,  $b$ : kısa kenar  
Kesitteki gerilme dağılımı



Şekil 10.4

## 10.1 Dikdörtgen Kesitli Çubukların Burulması

Dikdörtgen kesitli çubukların burulmaları, dairesel kesitli millerden farklı ve karmaşık olduğundan, Elastisite Teorisi veya membran analojisi ile çözümleri yapılmaktadır.

Dairesel olmayan millerin düzlemsel kesitleri düzlemsel kalmaz ve gerilme ve gerinim dağılımı doğrusal olarak değişmez

Şekil 10.4 de görüldüğü gibi, **uzun kenarda maksimum, kısa kenarda minimum** gerilmeler meydana gelmekte ve **köşelerde ise gerilmeler «sıfır»** olmaktadır

Elde edilen çözüm sonuçları, kesit kenar oranlarına bağlı olarak, aşağıda verilmektedir.

Tablo 10.1 Coefficients for Rectangular Bars in Torsion

$a/b$	$c_1$	$c_2$
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
$\infty$	0.333	0.333

$$\text{Polar Atalet Momenti : } J = c_2 ab^3 \quad (10.1)$$

$$\text{Birim Burulma Açısı : } \theta = \frac{T}{GJ} \quad (10.2)$$

$$\text{Toplam Burulma (dönme) Açısı : } \varphi = \theta L = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} \quad (10.3)$$

$$\text{Maksimum Kayma Gerilmesi: } \tau_{max} = \frac{c_2 T}{c_1 J} b \quad (10.4)$$

(uzun kenarın ortasında ve en dışta oluşur)

**Örnek 10.1:** Şekildeki prizmatik çubuk  $T=250 \text{ Nm}$  büyüklüğündeki bir burulma momentine maruz bırakılıyor.

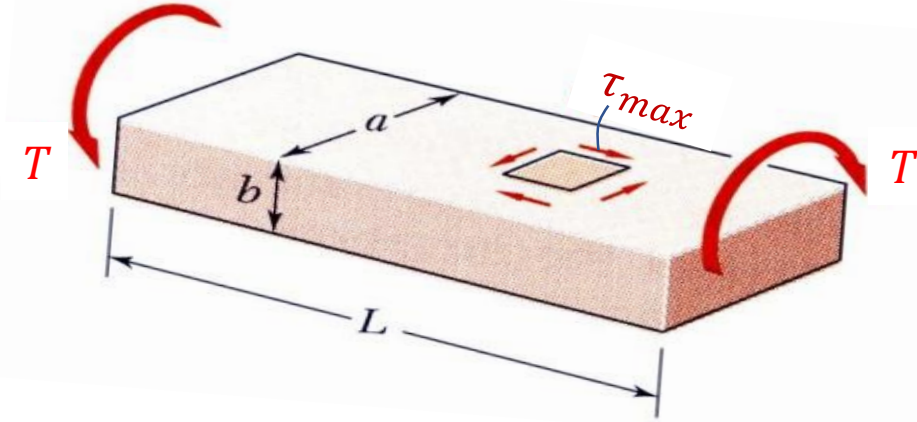
Çubuğun kayma modülü  $G=65 \text{ GPa}$ ,

Kaymadaki akma gerilmesi  $\tau_{ak}=100 \text{ MPa}$  ve emniyet katsayısı  $n=2$  olduğuna göre:

(a) Çubuğun emniyetli olup-olmadığını irdeleyiniz.

(b) Dönme (burulma) açısını hesaplayınız.

$$a = 50 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}, L = 1.2 \text{ m}$$



**Çözüm:** Tablo 10.1 'den:  $\frac{a}{b} = \frac{50}{20} = 2.5 \rightarrow c_1 = 0.258, c_2 = 0.249$

Denklem 10.1 den, Polar atalet momenti:  $J = c_2 ab^3 = (0.249)(50 \text{ mm})(20 \text{ mm})^3 = 99.6 \times 10^3 \text{ mm}^4$

**a)** Denklem 10.4 den, maksimum kayma gerilmesi:

$$\tau_{max} = \frac{c_2 T}{c_1 J} b = \frac{0,249 \times 250 \times 10^3 \text{ Nmm}}{(0.258)(99.6 \times 10^3) \text{ mm}^4} \times 20 \text{ mm} = 48.45 \text{ MPa}$$

$$\tau_{em} = \frac{\tau_{ak}}{n} = \frac{100 \text{ MPa}}{2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} < \tau_{em} \quad \text{Emniyetlidir.}$$

**b)** Denklem 10.3 den, toplam burulma (dönme) açısı:

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{(250 \times 10^3 \text{ Nmm})(1.2 \times 10^3 \text{ mm})}{(65 \times 10^3 \text{ MPa})(99.6 \times 10^3 \text{ mm}^4)}$$

$$\varphi = 0.0463 \text{ rd} \quad ; \quad \varphi = 0.0463 \frac{180}{\pi} = 2.655^\circ$$

## 10.2 İnce Profil Kesitli Çubukların Burulması

Bu tür çubuklarda, kesit birden fazla ince dikdörtgenin birleşimiyle oluşur.

Bir önceki konuda tek dikdörtgen kesit için geçerli olan Tablo 1 ve denklemler, profil kesiti oluşturan her bir dikdörtgen için kullanılır.

Polar atalet momenti her bir dikdörtgenin atalet momentlerinin toplamıdır:

$$J = \sum_{i=1}^n c_{2i} a_i b_i^3$$

Kesitteki Maksimum kayma gerilmesi en ince dikdörtgenin dış kısmında ortaya çıkar:

$$\tau_{max} = \frac{c_2 T}{c_1 J} b_{min}$$

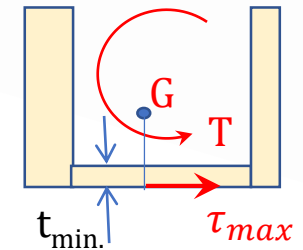
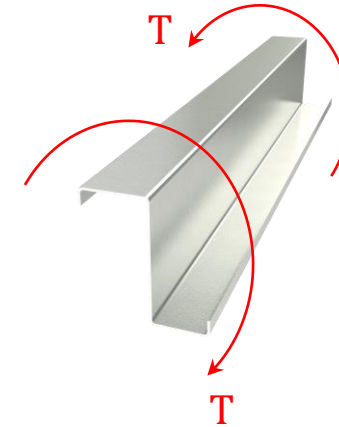
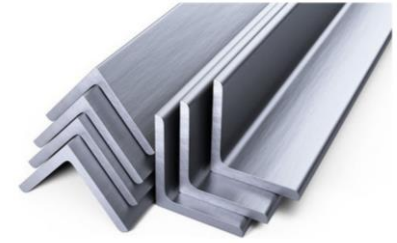
Tüm Çubuğa ait Birim Burulma Açısı :

$$\theta = \frac{T}{GJ}$$

Tüm çubuğa ait Toplam Burulma Açısı :

$$\varphi = \theta L = \frac{TL}{c_2 a b^3 G}$$

Formüller simetrik veya simetrik olmayan tüm ince profiller için geçerlidir.



**Örnek 10.2:** Şekildeki «L» kesitli çubuk  $T=50 \text{ Nm}$

büyükliğündeki bir burulma momentine maruz bırakılıyor.

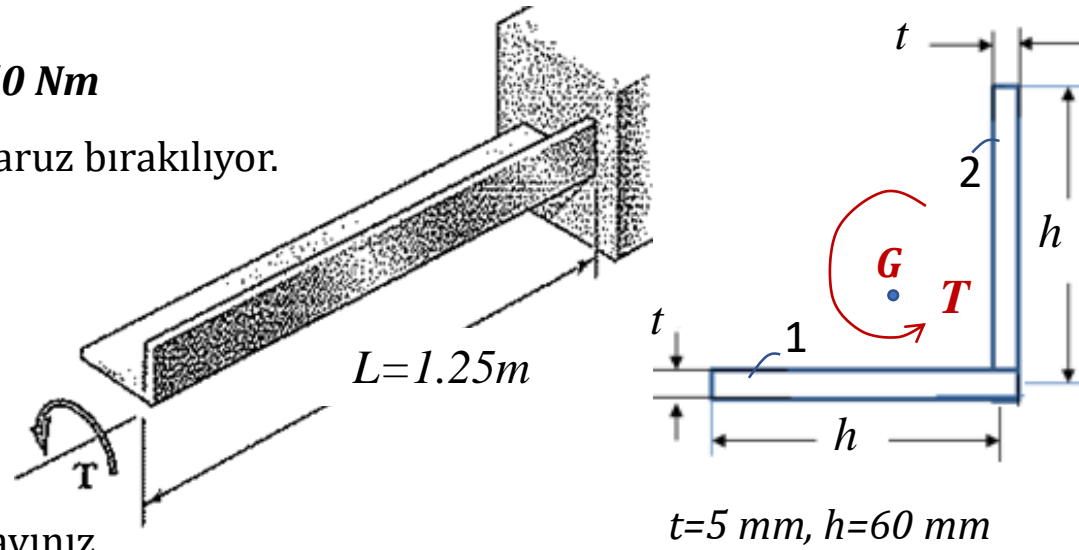
Çubuğun kayma modülü  $G=65 \text{ GPa}$ ,

kaymadaki akma gerilmesi  $\tau_{ak} = 90 \text{ MPa}$  ve

emniyet katsayısı  $n=2$  olduğuna göre;

**(a)** Çubuğun emniyetini kontrol ediniz.

**(b)** Toplam burulma (dönme) açısını hesaplayınız.



**Çözüm:** Kesit iki farklı (yatay ve dikey) dikdörtgenden oluşuyor. Herbir dikdörtgenin uzun kenarı  $a=h=60 \text{ mm}$ , kısa kenarı:  $b=t=5 \text{ mm}$

Herbir dikdörtgen için:  $a/b = 12$ . Tablo 10.1'de...a/b nin 10 dan büyük tüm değerleri için  $c_1 = c_2 = 1/3 = 0.333 = c_{1-1} = c_{1-2} = c_{2-1} = c_{2-2}$

$$\mathbf{a)} \quad J = \sum_{i=1}^2 c_{2-i} a_i b_i^3 = c_{2-1} a_1 b_1^3 + c_{2-2} a_2 b_2^3 = \frac{1}{3} (ht^3) + \frac{1}{3} (ht^3) = \frac{2}{3} ht^3 = \frac{2}{3} 60 \times 5^3 \rightarrow J = 5000 \text{ mm}^4$$

$$(10.4 \text{ denkleminde}): \tau_{max} = \frac{c_2 T}{c_1 J} b = \frac{(0.333) \times 50 \times 10^3 \text{ Nmm}}{(0.333)(5000) \text{ mm}^4} 5 \text{ mm} = 50 \text{ MPa} ; \tau_{em} = \frac{\tau_{ak}}{n} = \frac{90 \text{ MPa}}{2} = 45 \text{ MPa} \rightarrow \tau_{max} > \tau_{em} \text{ (Emniyetsiz)}$$

$$\mathbf{b)} \quad (10.3 \text{ denkleminde}): \varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{50 \times 10^3 \text{ Nmm} \times 1250 \text{ mm}}{65 \times 10^3 \times 5000 \text{ mm}^4} \rightarrow \varphi = 0.192 \text{ rd} \rightarrow \varphi = 0.192 \times \frac{180}{\pi} = 11.02^\circ$$



# 11. YORULMA (fatigue)

Tekrarlı yüklemeler sonucu oluşan hasarlar  
(Ömür Hesapları ve Boyutlandırma)



Şekil 11.1.a

### 11.1- Yorulma Nedir?

- Bir seferliğine kolayca kaldırabildiğimiz bir paketi art arda kaldırmak istersek, ancak belli bir tekrar sayısına kadar kaldırabiliriz. Çünkü bu tekrarlı işlem bizi yorar.
- İşte katı cisimler de tekrarlı yüklere karşı benzer bir davranış gösterir.
- Katı cisimler statik olarak uygulanan bir yüke dayanabilseler dahi, aynı yükü tekrarlı olarak (arka arkaya) uygularsak belli bir tekrara kadar dayanabilirler ve sonra hasara uğrarlar.
- İşte bu olaya yorulma denir.

### 11.2- Bu Konuda Amaçlarımız:

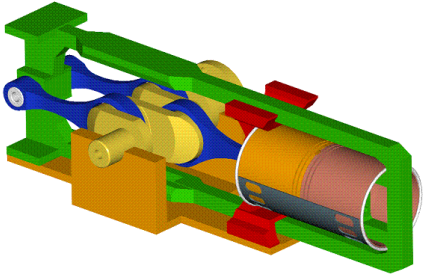
- İlk Amacımız tekrarlı yüklemelere maruz bir cismin herhangi bir noktasında zamana bağlı bir gerilme değişimi sözkonusu iken bu noktanın kaç tekrara kadar dayanabileceğini yani ömrünü hesaplamaktır.
- Veya başka bir ifade ile bu noktada ilk çatlak (hasar) oluşumu için tekrar sayısını hesaplamaktır.
- Ayrıca katı sistemlerde tasarım kriteri olarak alınan **sonsuz ömür** kavramının ne olduğu izah edilecektir.



Şekil 11.1.b

### 11.3- Konunun Önemi:

Sanayide veya günlük hayatımızda kullandığımız birçok makineler, mekanizmalar ve bunların içerisindeki hareketli tüm katı parçalar, tekrarlı yüklere maruz kalmakta ve bazılarında zaman içerisinde hasarlar oluşmaktadır. Bu parçaların sadece statik durumda iken gerilme hesapları ve boyutlandırılmalarının yapılması yanıltıcı olabilir. Aynı zamanda ömür hesaplarının ve yorulma açısından emniyetli boyut tespitlerinin yapılması son derece önem arz etmektedir.



Şekil 11.1.c

**11.4- Yorulma Hesaplarında kullanılan Önemli Tanımlamalar :**

Yorulma hesaplarında normal gerilmeler  $S$  sembolü ile gösterilmiştir. Şekil 11.2.a daki gibi iki ucu mafsallı BC kirişinin orta noktasına zamanla değişken bir  $F(t)$  kuvveti uyguluyoruz.  $F$  kuvvetinin zamana göre değişimi şekil 11.2.b de gösterilmiştir.  $F$  kuvveti etkisi ile kirişte eğilme yüklemesi meydana gelecektir.

Muk.1- 4ncü konudan biliyoruz ki, kirişin herhangi bir  $D$  kesitindeki (herhangi bir anda) normal gerilme dağılımı Şekil 11.3.b deki gibi olur (Kiriş kesitini simetrik olarak düşünüyoruz ki, bu durumda basit eğilme oluşacaktır.)  $D$  kesitindeki bir  $d$  noktasındaki gerilme ise 11.1 denkleminde bulunur.

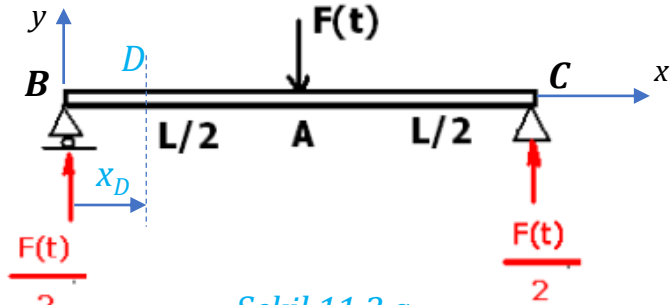
$F(t)$  zamanla değiştiğinden  $S$  gerilmesi de zamanla değişken olacaktır. Yükleme tipine göre  $F-t$  ve  $S-t$  diyagramları benzer veya farklı formda olabilir.

11.1 nolu  $S(t)$  gerilme denklemi 1nci dereceden (doğrusal) bir denklem olduğundan bu örnek için  $S-t$  diyagramınının,  $F-t$  diyagramına benzer olacağı açıktır.

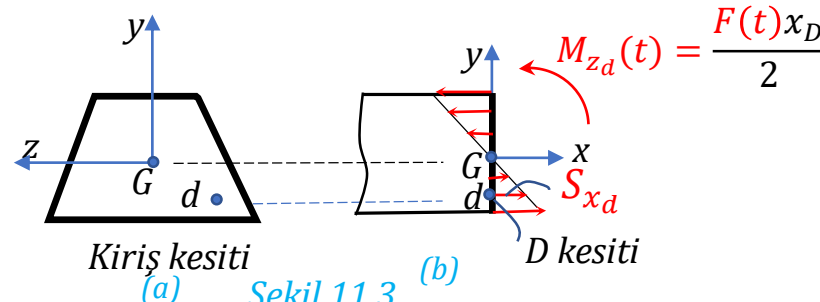
Şekil 11.4 de  $S-t$  diyagramında farklı gerilme tanımlarını inceleyiniz. Bu diyagramın herhangi bir  $d$  noktası için çizildiğini unutmayınız.

Ayrıca kirişin farklı kesitlerinde ve farklı noktalarında şekil olarak aynı fakat sınır değerleri farklı  $S-t$  diyagramları oluşacağını fark ediniz.

Kirişte belli bir tekrardan sonra ilk çatlak oluşur ki, bu maksimum gerilmenin oluşacağı noktalarda (bu örnek için  $A$  kesitinin en dış noktalarında) meydana gelir.



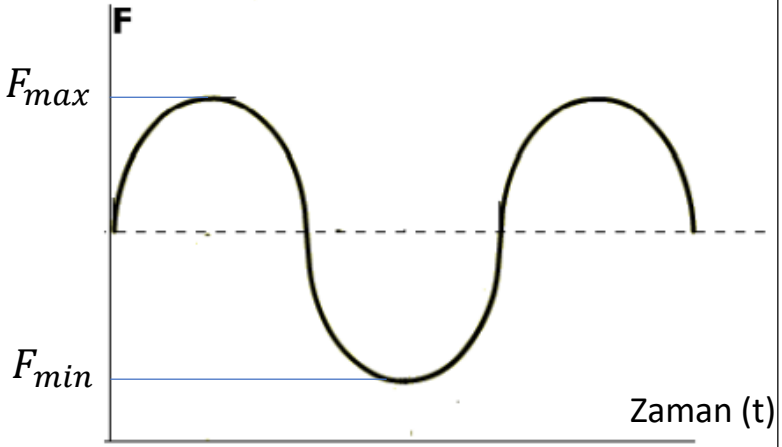
Şekil 11.2.a



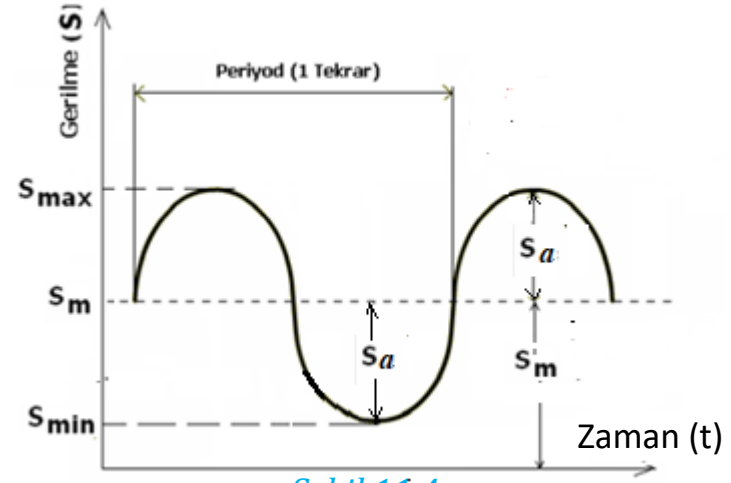
Şekil 11.3

$$\rightarrow S_{x_d}(t) = S(t) = -\frac{M_{z_d}(t)}{I_z} y_d$$

$$\rightarrow S(t) = -\frac{F(t)x_D}{2I_z} y_d \quad (11.1)$$



Şekil 11.2.b



Şekil 11.4

Maksimum gerilme:  $S_{max} = S_m + S_a \quad (11.2)$

Minimum gerilme:  $S_{min} = S_m - S_a \quad (11.3)$

Ortalama Gerilme :  
(mean stress)  $S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} \quad (11.4)$

Gerilme Genliği :  
(alternating stress)  $S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} \quad (11.5)$

Şimdi ilk cevabını aradığımız soru şudur: Tekrarlı yüklemeye maruz bir noktada kaç tekrar sonucunda çatlak oluşur? Yani bu noktanın yorulma ömrü nedir?..>>

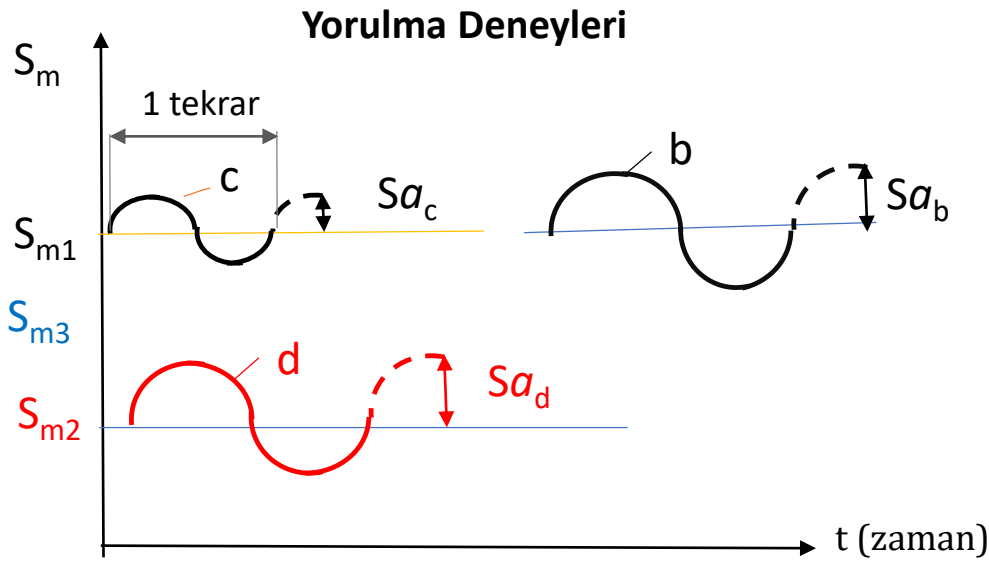
### 11.5- Ömür hesabı için gerekli malzeme özellikleri

Bir noktada kaç tekrar sonucu çatlak oluşacağını hesaplayabilmek için malzemeye ait yorulma karakteristik eğrilerinin (S-N diyagramlarının) öncelikle bilinmesi gerekir. Bu eğriler ise deneysel olarak elde edilir. Şöyle ki: Aynı malzemeden imal edilen numuneler tekrarlı yüklemeye maruz bırakılır.

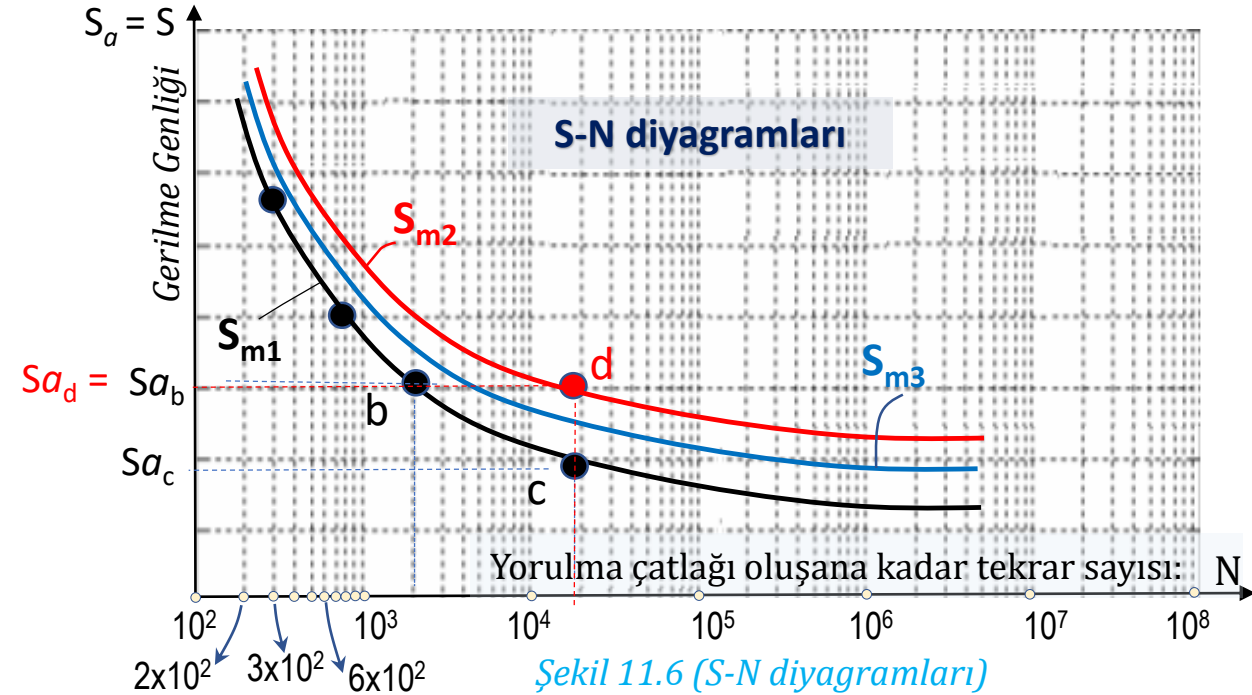
Herbir numunenin  $S_m$  ortalama gerilmesi veya  $S_a$  gerilme genliği farklıdır. Şekil 11.5 de 3 farklı tekrarlı yüklemeye testleri (b,c,d testleri) gösterilmiştir.

Bu testlerin her birisi numunede hasar (çatlak) oluşana kadar devam eder. Çatlak oluştuğunda erişilen tekrar sayıları (N) herbir test için tespit edilir.

Logaritmik diyagramda yatay eksene N, dikey eksene  $S_a$  gerilme genlikleri koyulmak üzere herbir teste karşılık gelen noktalar işaretlenir ve aynı  $S_m$  ortalama gerilmesine sahip noktalar bir eğri ile birleştirilir. Bu eğrilerin tümüne S-N diyagramları denir. S-N diyagramlarının elde edilebilmesi için çok sayıda test yapılması gerektiği açıktır.



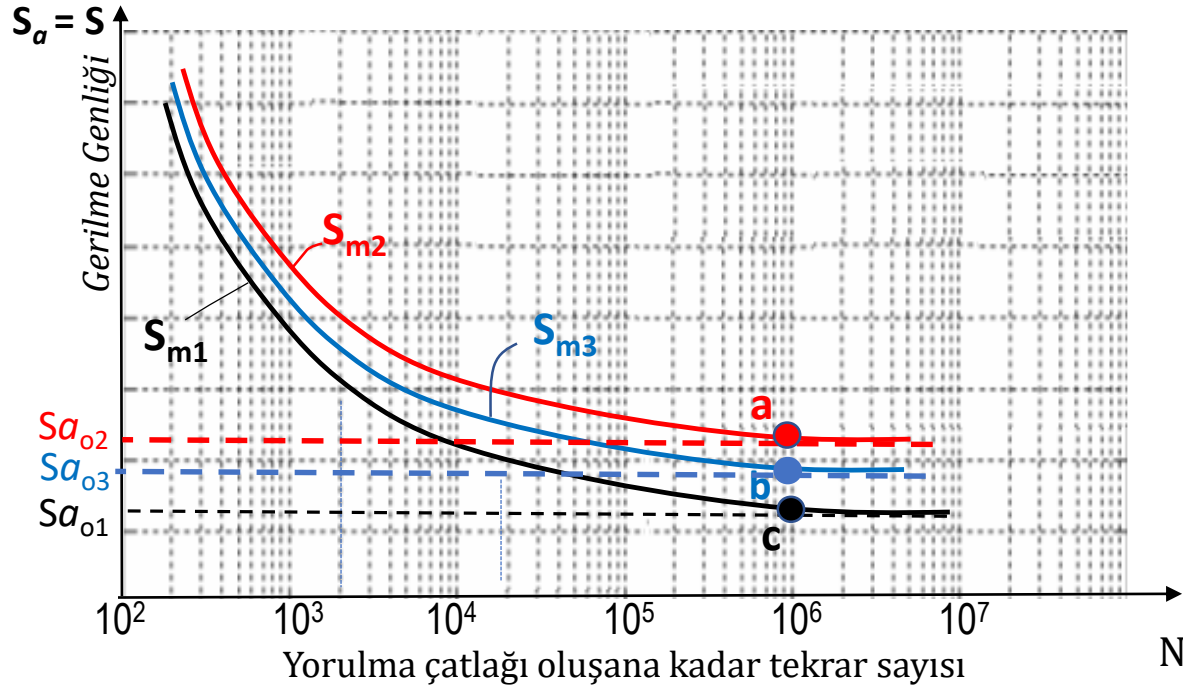
Şekil 11.5 (Yorulma Deneyleri)



Şekil 11.6 (S-N diyagramları)

Şu noktaları üstteki diyagramlardan anlamaya çalışınız:

- Aynı ortalama gerilme ( $S_m$ ) değeri için gerilme genliği  $S_a$  artarsa malzeme yorulması daha az tekrar sayısında gerçekleşir.
- Aynı  $S_a$  değeri için  $S_m$  azalır ise malzeme daha fazla tekrar sayısında yorulur.
- N ekseninde değerler arasında çok fark olduğu için logaritmik skala kullanılır. Bu skaladaki aralıkların eşit olmadığına dikkat ediniz.
- **Sonsuz Ömür Kavramı:** S - N eğrisi  $10^6$  çevrimden sonra genellikle yatay (apsis) eksene asimptotik bir durum gösterir, yani bu tekrar sayısında eğrinin yatay eksene paralel olduğu kabul edilebilir. Bu ise sonsuz ömür anlamına gelmektedir. Bu kavram bir sonraki sayfada daha detaylı izah edilmiştir.

**11.6- Sonsuz Ömür Kavramı:**

Şekil 11.7

- Şekil 11.7 deki S-N diyagramlarına dikkat edilirse  $N = 10^6$  tekrardan sonra, grafikteki tüm eğrilerin yatay eksene paralel devam ettiği ve bu noktalardaki (a,b,c noktalarındaki) teğetlerle çakıştığı kabul edilebilir.
- Teğetin yatay olduğu bu noktalardaki gerilme genlikleri özel olarak  $S_{a_o}$  sembolüyle gösterilir ki bunların her birisine «gerilme genliği sınır değeri» diyebiliriz.
- Bir  $S_{a_o}$  değerine karşılık gelen  $N$  değeri sadece  $10^6$  değil;  $10^6$  dan büyük olan ve teorik olarak sonsuza kadar devam eden tüm değerlerdir (çünkü eğri o bölgede yatay olarak devam etmektedir.)
- Bu ise şu anlama gelir:  $S_{a_o}$  (veya daha düşük) gerilme genliklerinde sonsuz tekrara dayanım söz konusudur ki buna sonsuz ömür denir. (Örneğin  $S_{m1}$  eğrisinde genlik  $S_{a_{o1}}$  iken  $N$  değeri  $10^6$ ,  $10^7$  ve daha büyük tüm değerlerdir ve  $c$  noktası sonsuz ömür sınırındır.) Katı cismin üzerindeki yorulması incelenen nokta sonsuz ömre sahipse o noktada hiçbir zaman yorulma çatlak oluşmaz ve tekrarlı yükleme sonsuza kadar o noktada devam edebilir.
- Özet olarak:  $(10^6 ; S_{a_o})$  koordinatlarına sahip yukarıda gösterilen a, b, c gibi noktalar ve bu noktalardan geçen yatay teğetler sonsuz ömür sınırlarıdır. Bu örnekteki malzeme için sonsuz ömür sınırlarındaki minimum tekrar sayısı  $10^6$  dır. Fakat malzeme cinsine göre bu değer farklı olabilir.



- Önceki sayfadaki düzenek örnekleri malzeme karakteristik yorulma eğrilerini bulmaya yönelik olduğundan çubuk şeklinde deney numuneleri kullanılır.
- Bazı düzeneklerde ise doğrudan son ürünler test edilmekte, ürünün istenen ömüre sahip olup olmadığı doğrudan ölçülmektedir. İşletmeler açısından oldukça faydalı olan ürün yorulma testleri sayesinde ayrıca teorik hesaplamalara gerek kalmasa da, ar-ge faaliyetleri ve ürün geliştirme süreçleri için bilgisayar ortamında yorulma analizlerinin yapılmasının günümüz teknolojisinin vazgeçilmezi konumunda olduğu da unutulmamalıdır.
- Aşağıda ürün yorulma testlerine ait 2 örnek gösterilmiştir.



*Şekil 11.9.a (Ayakkabı yorulma test düzeneği)*



*Şekil 11.9.b (Jant yorulma test düzeneği)*

## 11.8 Ömür Hesaplarında Önemli Noktaları tekrar edelim:

1- Deney düzeneğinin tasarımı sebebiyle yükleme tipleri farklılık gösterebilir ve dolayısıyla dış yük – zaman; gerilme-zaman grafikleri de birbirlerine benzer veya farklı formda olabilir.

2- **Püf Noktası:** Yapılan ömür hesabı noktasaldır ve önemli olan o noktadaki gerilme- zaman değişimini doğru tespit etmektir. Çünkü hesaplamalarda bu gerilmeler işleme girecektir.

3- Bir cismin yorulma ömrü, en kritik noktasının yorulma ömrünü belirlemekle mümkündür. Çünkü ilk çatlak oluşumu bu noktada meydana gelir.

4- Yorulma olması için dış yük değişken, sistem sabit olabilir.  
(Örnek: Yollardaki su tasfiye ızgarası)

5- Ancak bazen dış yükler sabit, sistem hareketli olur, bir nokta sürekli konum değiştirir ve üzerindeki gerilmeler zamanla değişeceğinden yorulmaya maruz kalır. (Örnek: Jant)

6- Yorulma hesaplarından önce maksimum ve minimum yüklerin oluşturacağı gerilmeler statik yükleme durumu için ayrı ayrı hesaplanmalıdır.



Şekil 11.10

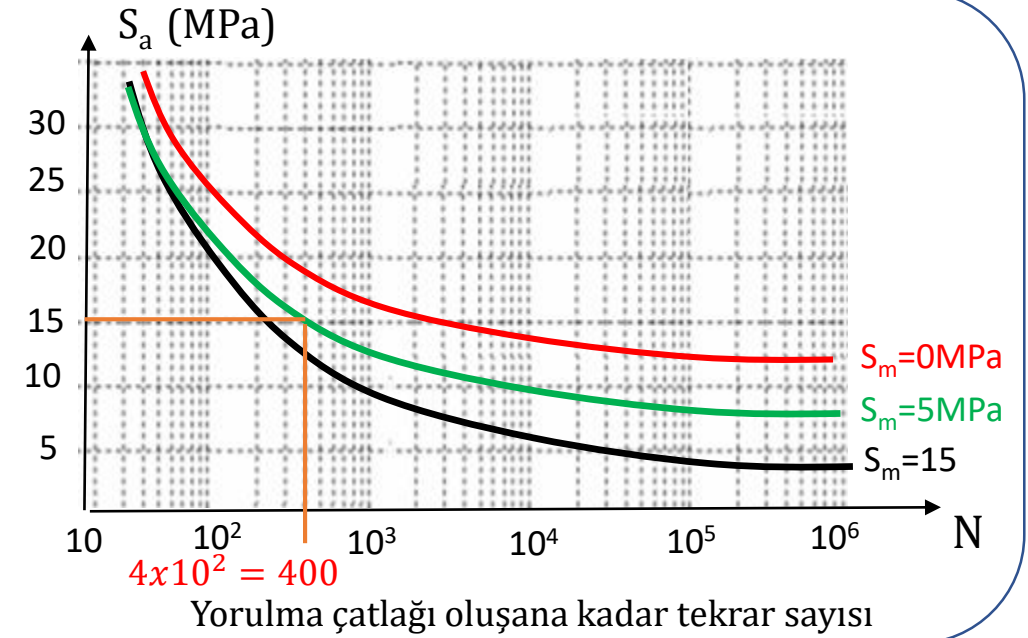
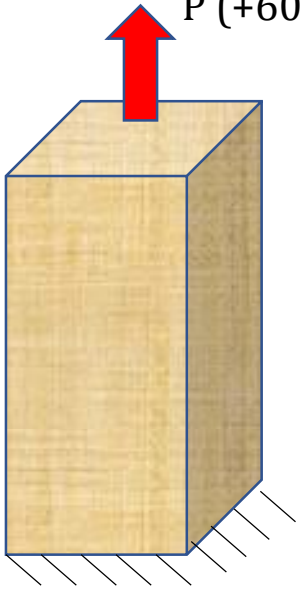


Şekil 11.11

P (+60kN;-30kN)

**Örnek 11.1**

6cm x 5cm kesitinde, alt kısmından ankastre bir tahta bloğa P aksenal kuvveti 60kN ile -30kN arasında değişecek şekilde tekrarlı olarak uygulanıyor. Malzemenin S-N diyagramı yandaki gibi ise, tahta blok bu tekrarlı yüke kaç tekrara kadar dayanabilir? (yani yorulma ömrü nedir?)



**Çözüm:** Çeki veya bası yüklemesi olduğu için bloğun tüm noktalarında her t anında aynı şiddette gerilmeler çıkar, teorik olarak tüm noktaların hepsi kritik noktadır ve gerilmeler  $S=P/A$  formülüyle hesaplanır.

$$\text{Maksimum gerilme: } S_{max} = \frac{P_{max}}{A} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{60 \times 50 \text{ mm}} = 20 \text{ MPa} \quad , \quad \text{Minimum gerilme: } S_{min} = \frac{P_{min}}{A} = \frac{-30 \times 10^3 \text{ N}}{60 \times 50 \text{ mm}} = -10 \text{ MPa}$$

$$\text{Ortalama gerilme: (mean stress)} \quad S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ MPa}$$

$$\text{Gerilme genliği: (alternating stress)} \quad S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{20 - (-10)}{2} = 15 \text{ MPa}$$

S-N diyagramından  $S_m=5 \text{ MPa}$  lık eğri üzerinde  $S_a=15 \text{ MPa}$  a karşılık gelen N değeri 400 dür.

Yani bu blok bu tekrarlı yüke 400 tekrara kadar dayanabilir. (Yorulma ömrü 400 tekrardır denir.)



## Örnek 11.2



Topuklu bir bayan ayakkabısının dayanım kriteri:

«1 metreyi 2 adımda yürüyen 70kg lık bir bayan, 2 yıl boyunca günde ortalama 2km yürüdüğünde ayakkabının topuk kısmında herhangi bir hasar oluşmamalıdır» şeklinde belirlenmiştir.

Ayakkabının topuk kısmını, silindirik şekilde ve çapı  $d=7.5\text{mm}$ , yüksekliği  $h = 5\text{cm}$  olarak kabul edebiliriz. Adım atarken dikkat edilirse vücut yükünün tümü tek ayakkabıya geldiği görülür ki, bu sırada diğer ayak havadadır.

Tek ayağa gelen tüm vücut yükünün yarısını topuğun taşıdığı kabul edilebilir. (Diğer yarısını ise ayakkabının ön kısmı taşır.)

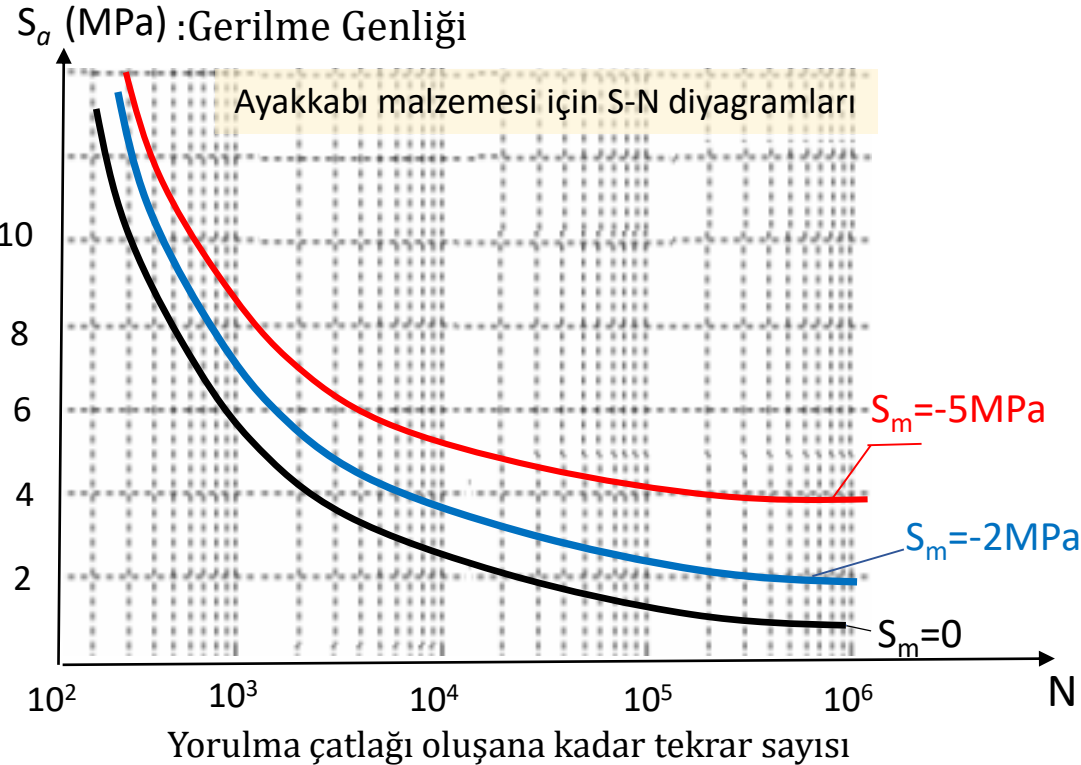
Ayakkabı malzemesinin basıdaki kırılma gerilmesi  $S_{\text{bası-kırılma}} = -40\text{MPa}$

ve S-N diyagramları yandaki şekilde gibidir. Buna göre;

a-) özellikleri verilen tahta malzemenin topuk için

kullanılması uygun mudur?

b-) Değilse ne gibi bir tedbir düşünürsünüz? ( $g = 10\text{kgm/s}^2$ )

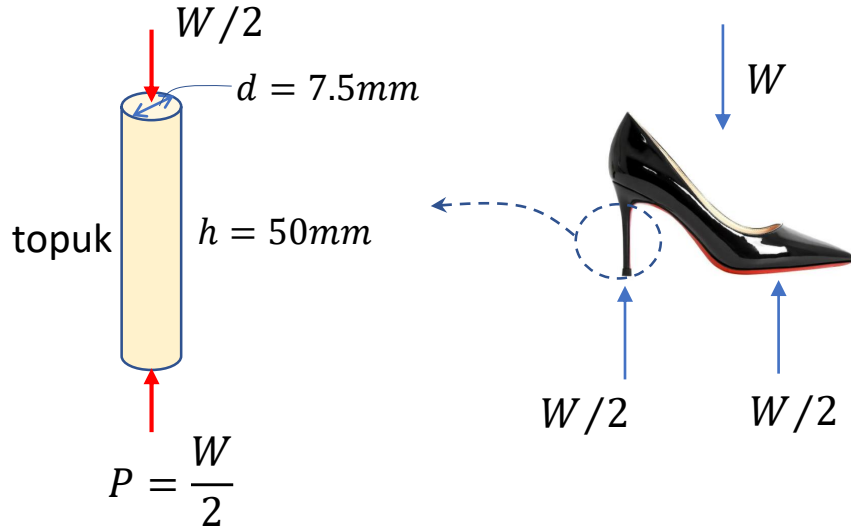


**Çözüm:** Öncelikle bir ayakkabının 2 senede ne kadar tekrarlı yüke maruz kalacağını orantı kurarak hesaplayacağız:

Bir ayakkabı  $\longrightarrow$  1metrede  $\times$  1 kere yere basıyor.  
 Günde 2000m  $\longrightarrow$  (2)x(365)x(2000)metrede  $\times$  n kere yere basar

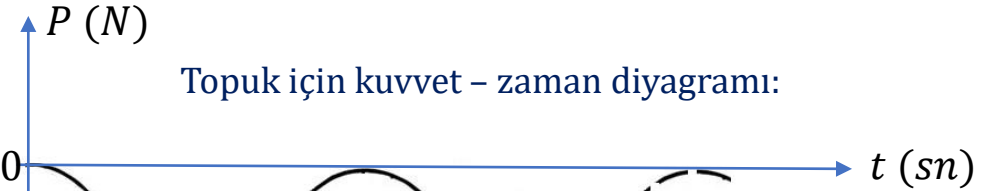
$$n = 2 \times 365 \times 2000 = 1460000 \text{ kez}$$

Bir adımda (bir tekrarda), yere tam basıldığında bir ayakkabıya tüm vücut ağırlığı gelir. Fakat tüm vücut ağırlığının yarısı topuk kısmına düşer (diğer yarısı ayakkabının ön kısmı tarafından taşınır)

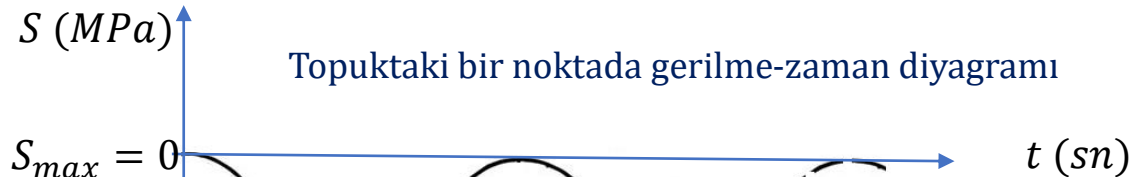


Ayakkabı havaya kalktığı anda kuvvet sıfırdır

Ayakkabı yere tam bastığı anda kuvvet negatif (bası) olarak en yüksek değerindedir.



$$P_{min} = -\frac{W}{2} = -\frac{70 \times 10}{2} = -350\text{N}$$



$$\frac{P_{min}}{A} = \frac{-350}{\frac{\pi(7.5)^2}{4}} = S_{min} = -7.92$$

Statik halde (tek ayak üzerinde beklerken veya ilk adımda) hasar oluşur mu?

$$|S_{min}| < |S_{baki-kırılma}|$$

$$|-7.92| < |-40|$$

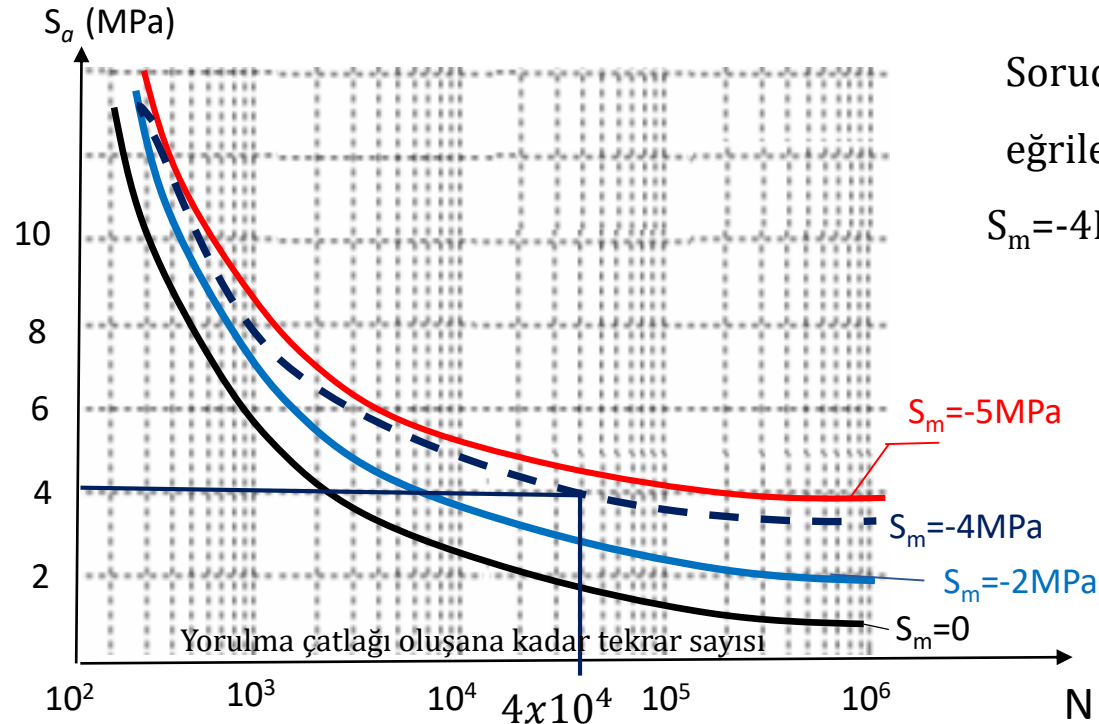
hasar oluşmaz.

Yürürken oluşan ortalama gerilme (mean stress):

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{0 - 7.92}{2} = -3.96MPa \cong -4MPa$$

Yürürken oluşan gerilme genliği (alternating stress):

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{0 - (-7.92)}{2} = 3.96MPa \cong 4MPa$$



Soruda S-N diyagramlarında  $S_m = -4MPa$  lık eğri verilmemiştir. Fakat mevcut eğrilerden faydalanarak bu eğri de ortalama olarak yandaki şekilde çizilir.  $S_m = -4MPa$  lık eğri üzerinde  $S_a = 4MPa$ 'a karşılık gelen  $N = 4 \times 10^4 = 40000$  tekrar

Yani ayakkabının topuğu 40000 tekrara kadar bu yüke dayanır.

Fakat istenen tekrar sayısı  $n = 1460000$  ve  $n > N$  olduğundan

Bu malzemenin bu boyutlarda topuk malzemesi olarak kullanılması uygun değildir.

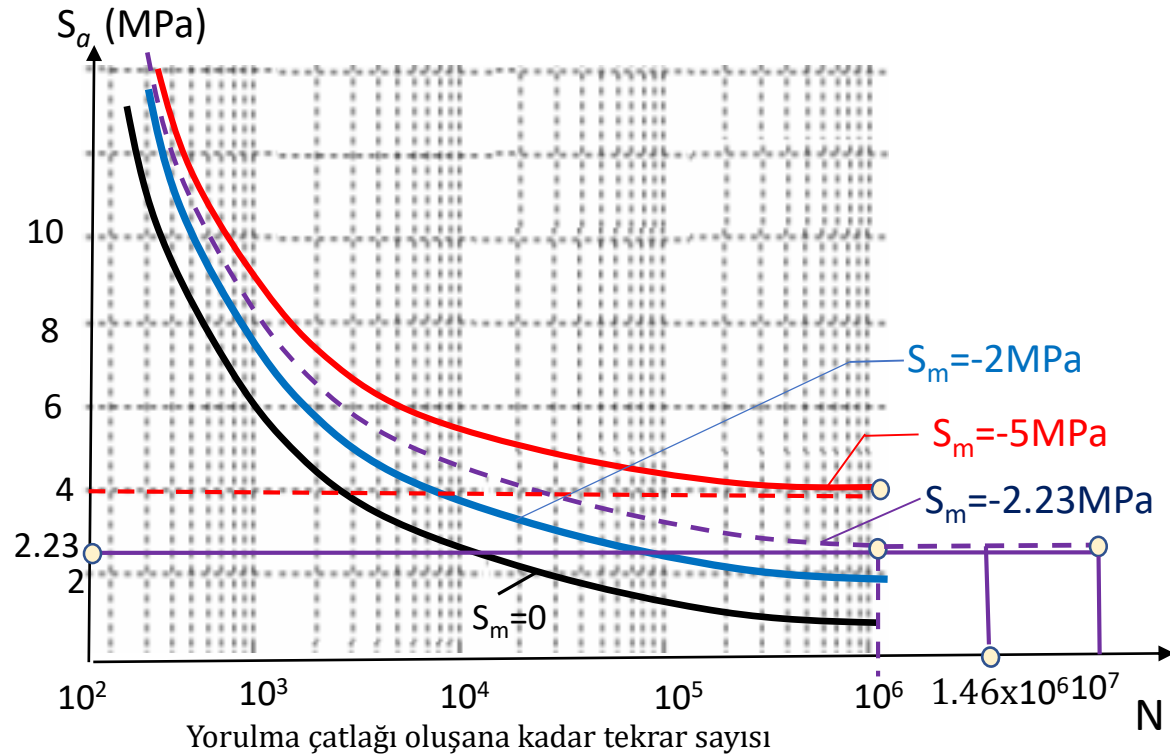
Nasıl bir tedbirle aynı malzemeyi kullanabiliriz..>>

**b-) Tedbir 1 :** Topuğun çapını  $d = 10mm$ .. alırsak aynı hesaplama şekliyle

$$S_{max} = \frac{P_{max}}{A} = 0, \quad S_{min} = \frac{P_{min}}{A} = \frac{-350}{\frac{\pi(10)^2}{4}} = -4.46MPa$$

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{0 - (-4.46)}{2} = 2.23 MPa$$

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{0 - 4.46}{2} = -2.23MPa$$



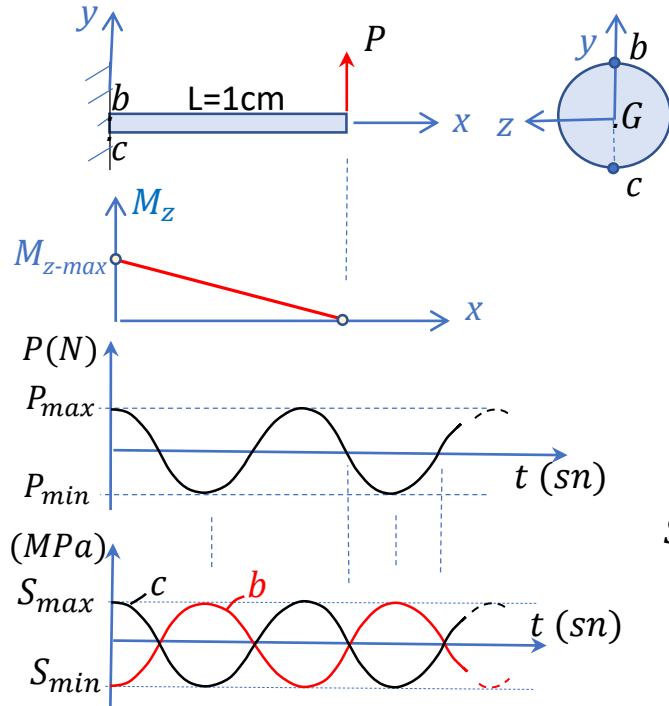
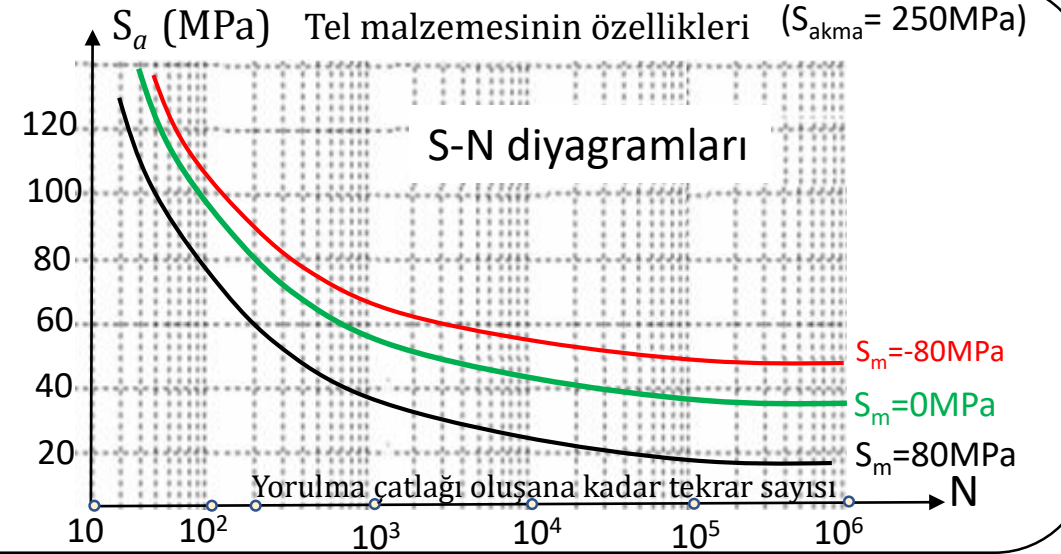
- S-N diyagramlarında  $S_m = -2.23MPa$  lık eğri verilmemiştir. Fakat mevcut eğrilerden faydalanarak bu eğri de ortalama olarak şekildeki gibi çizilmiştir.
- $S_m = -2.23MPa$  lık eğri üzerinde  $S_a = 2.23MPa$ 'a karşılık gelen N değeri:
- $N = 10^6 = 1$  milyon tekrar olarak grafikten ölçülmüştür. Bu ise sonsuz ömür anlamına gelir. (Bu noktadan sonra eğrilerin yatay olarak devam ettiğini fark edin. *Detay için konu 11.6 yı inceleyiniz.*)
- O halde topuk  $n = 1460000$  tekrara da dayanacaktır.
- Bu sebeplerle Tedbir 1 doğrudur diyebiliriz.
- Bununla birlikte bu tedbirde ayakkabının orijinalliğini bozacak ve istenen estetikliğinin kaybolmasına sebep olacak şekilde d çapının da büyütülmemesi gerekliliği ayrı bir sınırlama olarak karşımıza çıkmaktadır.
- Eğer  $S_m = -2.23MPa$  ve  $S_a < 2.23MPa$  olsaydı teğetin altında kalınacak, sonsuz ömür yine sağlanacak ve daha emniyetli durum söz konusu olacaktı.

*Soru 1: Ayakkabı topuğu için daha farklı tedbirler neler olabilir? Düşününüz ve bu tedbirlerinde doğruluğunu sayısal hesaplarla ispatlayınız.*

*Soru 2: Ayakkabı topuğu için bir başka risk burkulmadır. Tedbir 1'e göre yeniden tasarlanmış topukta burkulma açısından bir problem oluşup oluşmayacağını hesaplarla belirleyiniz.*

**Örnek 11.3**

Sol ucu bir duvara ankastre olan  $r=2\text{mm}$  yarıçaplı metalik bir tele diğer ucundan pense vasıtasıyla  $P=50\text{N}$  luk kuvvet yukarı-aşağı tekrarlı olarak uygulanıyor. Bu durumda kaç tekrar sonunda telde ilk çatlak oluşturulabilir. (Pensenin çenelerindeki ezilme ve kesme etkisi, telin duvardan çıkma olasılığı ihmal edilecektir.)



**Çözüm:** Tel eğilme yüklemesine maruz kalır. En kritik kesit ankastre kesit ve en kritik noktalar b ve c noktaları olup, bu noktalarda bir t anında gerilmeler eşit fakat zıt işaretli olur. Gerilme-zaman diyagramları simetriktir. b veya c'den birisini incelememiz yeterlidir. b 'yi incelersek:

$$P_{max} = 50\text{N} \rightarrow S_{x_b-min} = -\frac{M_{z-max}}{I_z} \cdot y_b = -\frac{P_{max} \cdot L}{\frac{\pi \cdot r^4}{4}} \cdot r = -\frac{50 \times 10}{\frac{\pi \cdot 2^4}{4}} \cdot 2 \rightarrow S_{x_b-min} = -79.6\text{MPa} = S_{min}$$

$$P_{min} = -50\text{N} \rightarrow S_{x_b-max} = -\frac{M_{z-min}}{I_z} \cdot y_b = -\frac{P_{min} \cdot L}{\frac{\pi \cdot r^4}{4}} \cdot r = -\frac{-50 \times 10}{\frac{\pi \cdot 2^4}{4}} \cdot 2 \rightarrow S_{x_b-max} = 79.6\text{MPa} = S_{max}$$

$$(ortalama gerilme - mean stress) \quad S_{m-b} = \frac{S_{x_b-max} + S_{x_b-min}}{2} = \frac{79.6 - 79.6}{2} = 0 = S_m ; \quad (gerilme genliği - alternating stress) \quad S_{a-b} = \frac{S_{x_b-max} - S_{x_b-min}}{2} = \frac{79.6 - (-79.6)}{2} = 79.6\text{MPa} = S_a$$

$S_m=0$  eğrisinde,  $S_a = 79.6\text{MPa}$  lık genliğe karşılık gelen tekrar sayısının yaklaşık  $N = 2 \times 10^2 = 200$  dür. Bunu kendiniz grafikten görmeye çalışınız. O halde 200 tekrar sonunda çatlak oluşur. Pense üst konumdayken bir tekrar sonra yine üst konuma gelir.

## 11.9 Tekrarlı Yüklere Ara Verilmesinin Etkisi

- Biz, bir yığılı yükü kendi bedensel gücümüzle bir yerden başka bir yere taşıırken, zaman zaman ara verip dinleniriz, kendimizi toparlarız ve sonra çalışmaya devam edebiliriz.
- Katı cisimler içinde böyle bir durumun söz konusu olduğunu söyleyebiliriz.
- Zira yorulma testleri zaman zaman durdurulduğunda, düzgün deney parçalarında bir toparlanma görülmüş ve ara verilmeden yapılan testlere göre daha uzun ömürler elde edilmiştir.
- Bununla birlikte endüstriyel bir ürünün veya parçanın üzerindeki tekrarlı yüke ne zaman ve ne kadar süreyle ara verileceği genelde bir standarda bağlı değildir ve kullanıcıya göre değişebilmektedir.
- Biz mühendisler ise hesaplamalarımızda daima en kritik durumu göze almamız gerekir.
- Dolayısıyla ara verilmeden sürekli testlerden elde edilmiş S-N diyagramlarının ve diğer yorulma verilerinin kullanılması en kritik durumu incelemek anlamına geleceğinden daha doğru bir yaklaşım olacaktır.
- Şunu da unutmamız gerekir ki, tekrarlı yüke ara verilmesi bizim hesaplarımızdakinden daha güvenli durumların oluşmasına sebep olacak, dayanım açısından bizlere bir avantaj teşkil edecek ve hesaplarımızı riske etmeyecektir.



Şekil 11.12

## 11.10 Yorulma Kriterleri ve Boyutlandırma

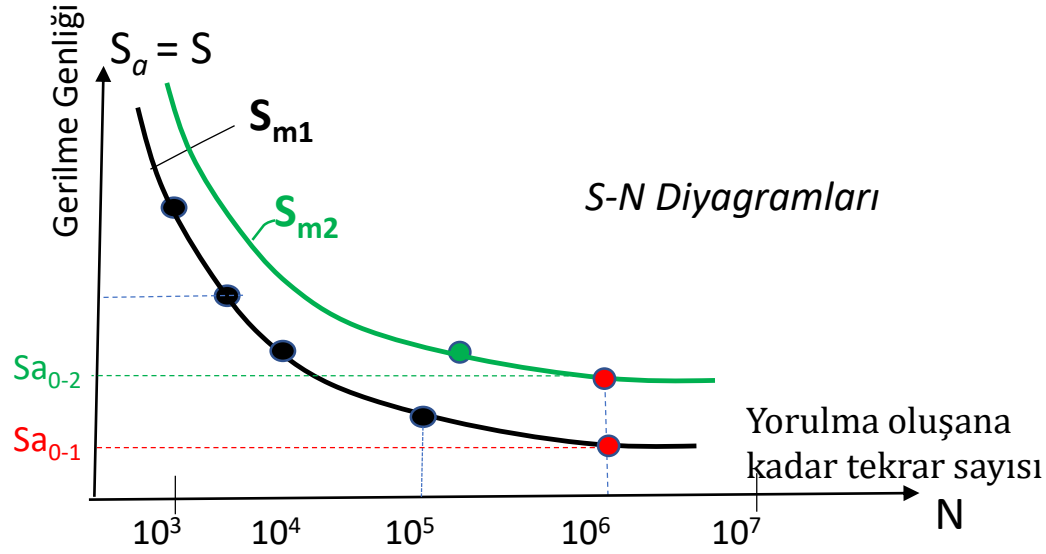
### Bu bölümde Amacımız:

Tekrarlı yüklerle maruz olan parçaların, sonsuz ömre sahip olabilmesi için gerekli minimum boyutlarının tespit edilmesidir.

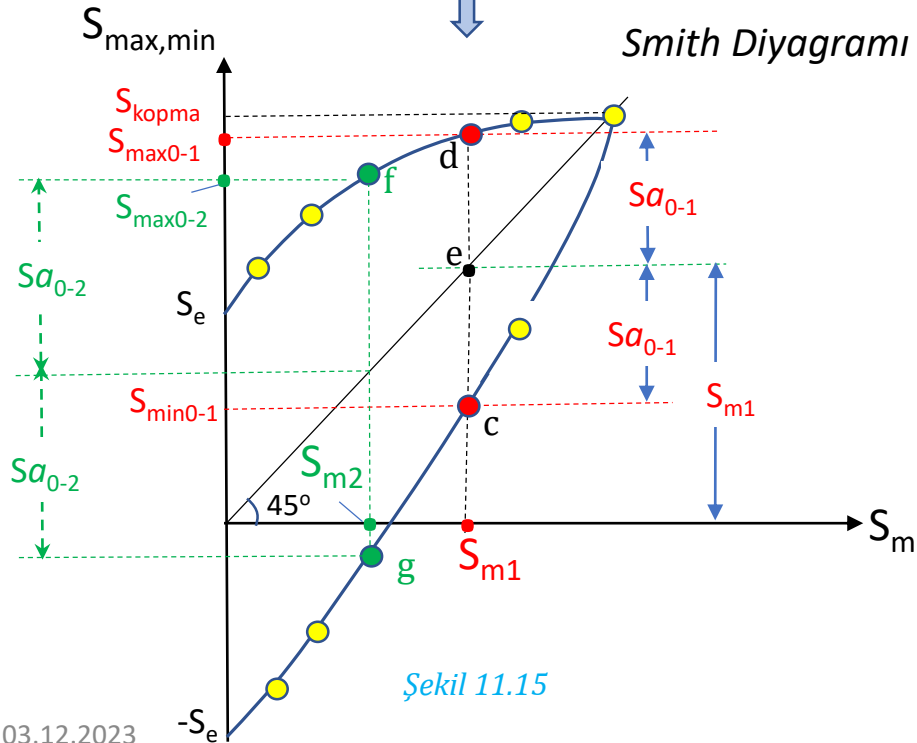
Fakat öncelikle S-N diyagramlarının farklı şekilde yorumlanmasıyla geliştirilen yorulma mukavemet eğrileri ve farklı yorulma teorilerinin (kriterlerinin) iyice anlaşılması gerekir...>>



Şekil 11.13



Şekil 11.14



Şekil 11.15

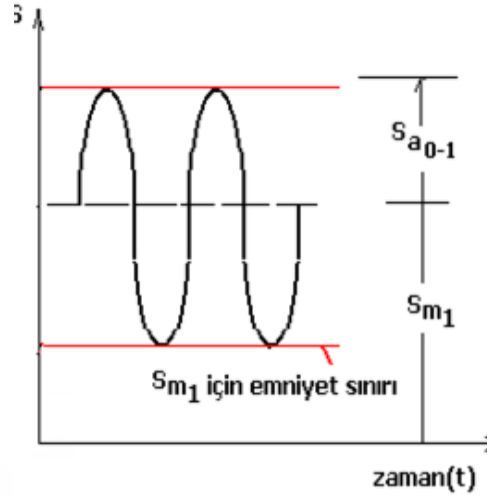
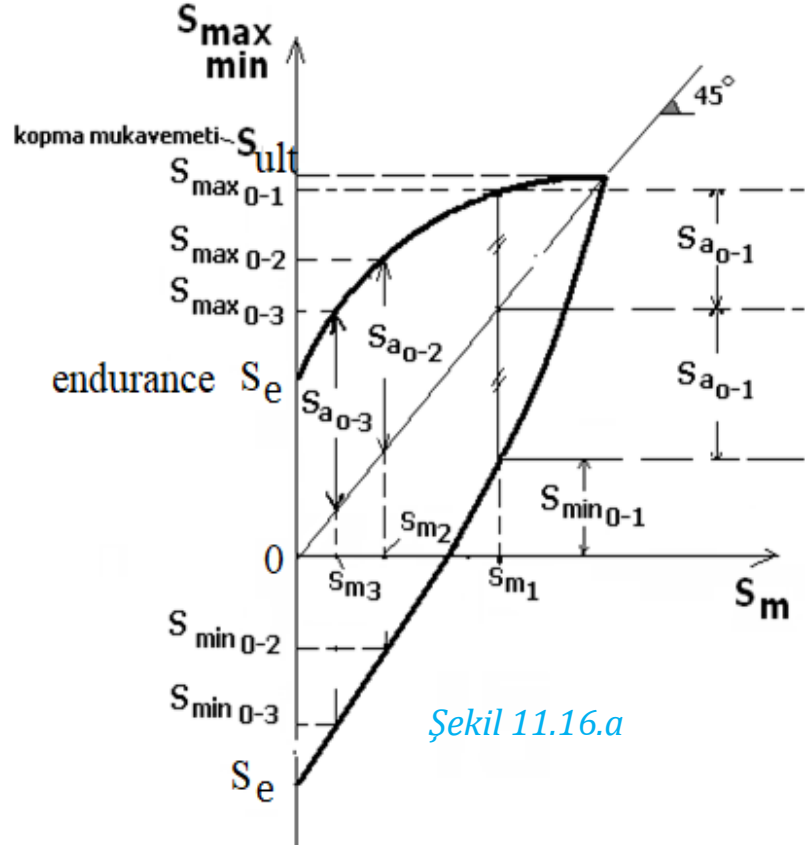
### 11.10.1 Smith Diyagramı

**Smith Diyagramı**, yorulma deneylerinden elde ettiğimiz S-N diyagramlarının farklı şekilde yorumlanmış hali olup türetilmiş bir diyagramdır.

Smith diyagramı S-N diyagramları yardımıyla aşağıdaki adımlarla elde edilir:

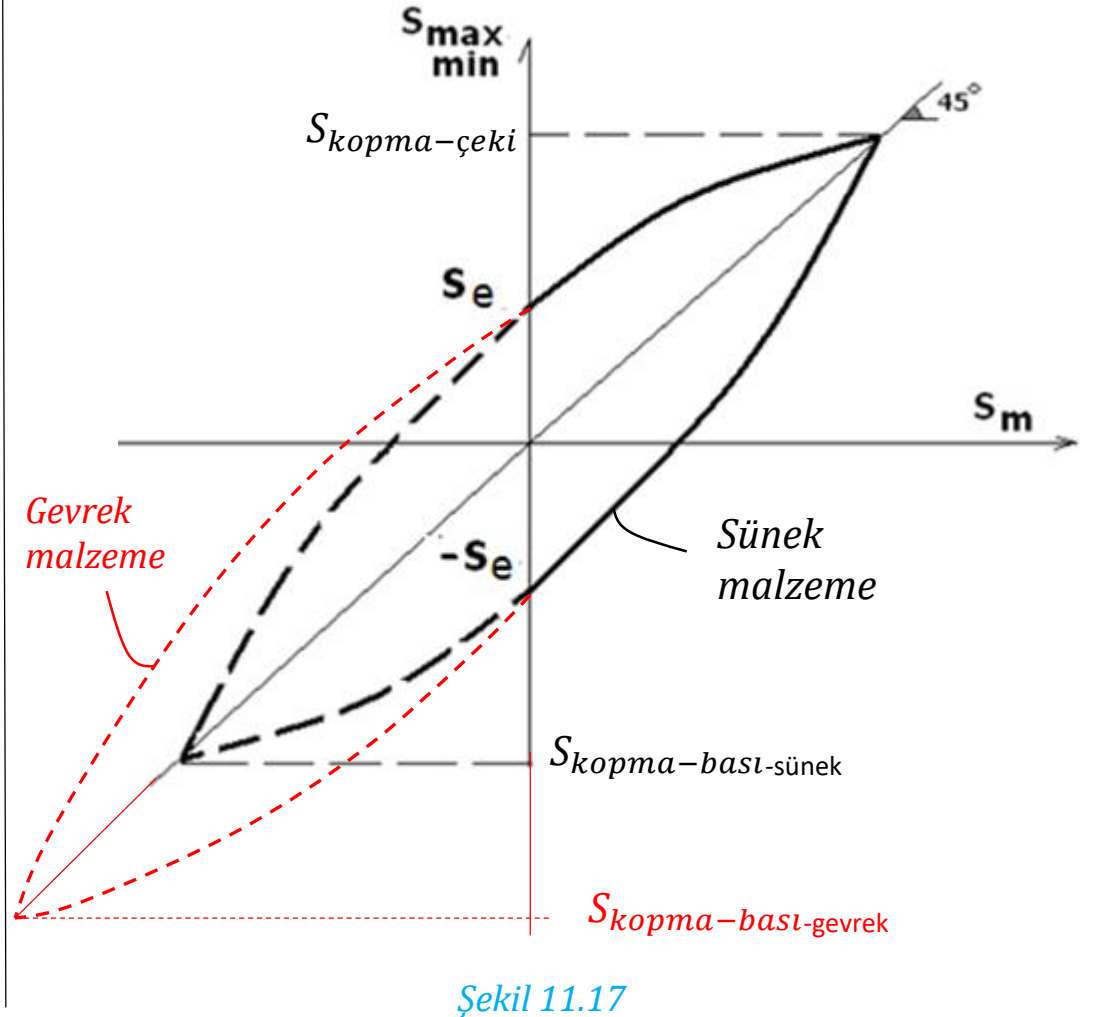
- Yatay eksen ortalama gerilmeyi ( $S_m$ ' i), dikey eksen max ve minimum gerilmeleri gösterir. Dikey ve yatay eksen arasında  $45^\circ$  eğimli bir doğru çizilir.
- Herhangi bir  $S_{m1}$  değerinde dikey eksene paralel bir çizgi çizilir. Bu çizginin  $45^\circ$  lik doğruyu kestiği e noktası belirlenir.
- e noktasından  $S_{a0-1}$  genliği (sonsuz ömür için sınır genliği) kadar yukarı ve aşağı yönde gidilerek c ve d noktaları işaretlenir.
- e noktasının y koordinatı da ( $45^\circ$  den dolayı)  $S_{m1}$  değerine eşittir.
- $S_{m1}$  için  $S_{a0-1}$  genliğinde sonsuz ömür söz konusudur. Bu durumda maximum ve minimum gerilmeler, 11.2 ve 11.3 denklemlerinden (veya şeklin geometrisinden) hareketle,  $S_{max0-1} = S_{m1} + S_{a0-1}$ ;  $S_{min0-1} = S_{m1} - S_{a0-1}$  şeklinde hesaplanabilir. (Bu değerler aynı zamanda c ve d noktalarının da dikey koordinatlarıdır.)
- Bir başka ifadeyle  $S_{m1}$  için sonsuz ömür sınırları c ve d noktalarıdır diyebiliriz.
- Yukarıdaki aynı işlemler  $S_{m2}$ ,  $S_{m3}$  gibi farklı ortalama gerilmeler içinde yapılarak her birisi için sınır noktalar elde edilir. (Örneğin  $S_{m2}$  için elde edilen sınır noktalarının f ve g olduğunu fark edin.)
- Tüm bu sınır noktaları birleştirildiği zaman Smith diyagramı elde edilmiş olur.
- Sonuç olarak bir malzemenin herhangi bir noktasında sonsuz ömür elde etmek için Smith diyagramının dışına çıkılmaması gerekir. Bu sebeple Smith diyagramı «yorulma mukavemeti sınır diyagramı» olarak da isimlendirilebilir.
- $S_{max}$  değeri kopma mukavemetinin üstünde çıkamaz (o zaman tek tekrarda çatlak söz konusu olur ki bunun üzerinde tekrarlı yükleme olamayacağı anlamına gelir.) Bu sebeple Smith diyagramının üst sınırı malzemenin kopma mukavemetidir.
- $S_m=0$  için gerilme genliği özel olarak  $S_e$  ile gösterilir ve yorulma mukavemet genliği (endurance stress) veya kısaca yorulma sınırı (fatigue limit) olarak isimlendirilir.

Altaki Smith diyagramını ve yanındaki tekrarlı yük diyagramını iyice inceleyerek konuyu ve kavramları pekiştiriniz.



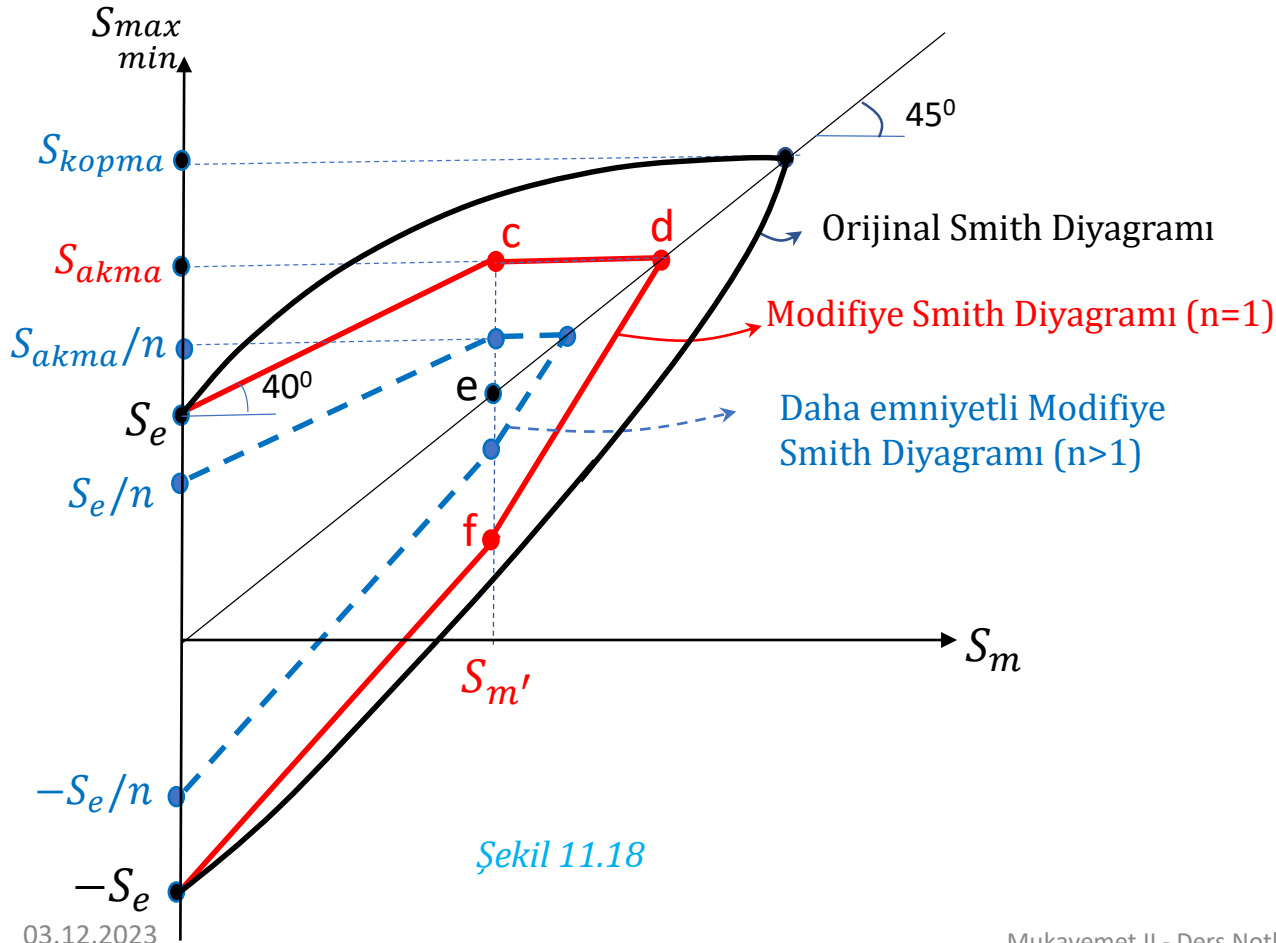
Smith diyagramı Negatif bölgeyi de kapsar.

Gevrek malzemelerin bası mukavemeti, çeki mukavemetinden şiddetçe daha büyük olduğundan diyagramın negatif kısmı daha büyük çıkar.



### 11.10.2 Modifiye Smith Diyagramı ve emniyet katsayısı (n)

Orijinal Smith diyagramını çizmek için farklı  $S_m$  değerlerine ait S-N eğrilerinin luzumlu olduğunu anlattık. Bu S-N eğrilerini elde etmek ise zaman, emek ve maliyet açısından oldukça külfetli bir deneysel çalışma içine girmemizi gerektirebilir. Orijinal Smith diyagramı yerine sadece  $S_e$  ve  $S_{akma}$  değerleriyle çizilebilen Modifiye edilmiş Smith diyagramları mühendislik alanında sıklıkla kullanılmakta ve doğru çözümler vermektedir ki, bu durumda sadece  $S_m=0$  için yorulma testleri yapmak yeterli olmaktadır.



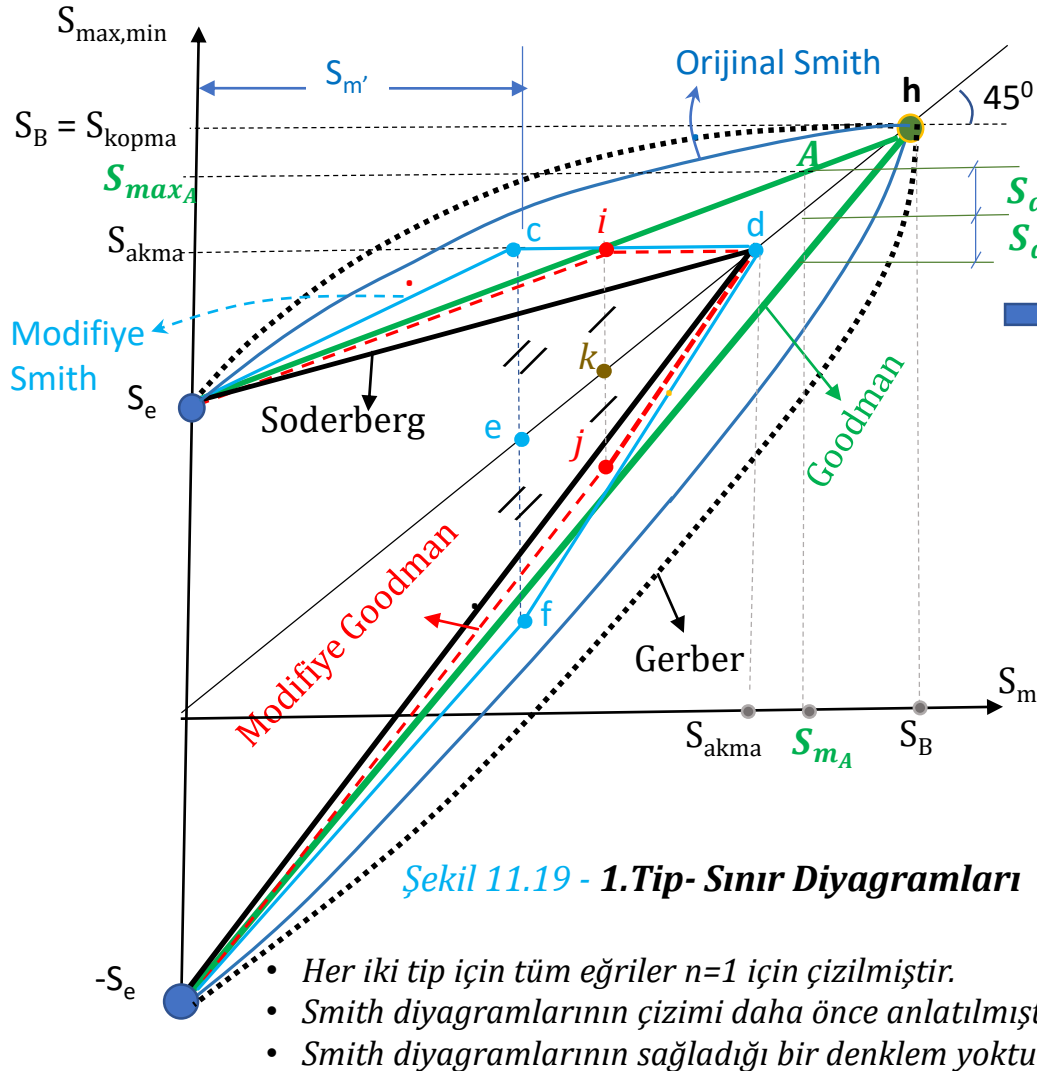
Modifiye Smith diyagramı şu adımlarla çizilir:

- 1-)  $S_m=0$  için farklı  $S_a$  genliklerinde yorulma deneyleri yapılır ve S-N eğrisi elde edilir. Yorulma sınırındaki  $S_{a0}$  genliği eğri üzerinden okunur ki bu  $S_e$  (endurance stress) değerine eşittir.
- 2-) Malzemenin akma gerilmesi ( $S_{akma}$ ) literatürden bulunur (literatürde yoksa çekme testi ile tespit edilir.)
- 3-) Yandaki diyagramda  $S_{akma}$  değeri düşey eksenden işaretlenir.
- 4-)  $S_e$  değerinden  $40^\circ$  lik bir açıyla çizilen doğru ile  $S_{akma}$  dan yataya paralel çizilen doğrunun kesim noktası c tespit edilir.
- 5-) c den çizilen yatay ve düşey çizgilerin  $45^\circ$  lik doğruyu kestiği d, e, f noktaları (ce = ef olacak şekilde) tespit edilir.
- 6-) Sırasıyla,  $S_e, c, d, f, -S_e$  noktaları doğrularla birleştirilerek Modifiye Smith diyagramı elde edilmiş olur.
- 7-) Bir emniyet katsayısı da sözkonusu ise  $S_e/n$  ve  $S_{akma}/n$  noktaları kullanılarak benzer çizimle daha emniyetli içteki diyagram elde edilir.

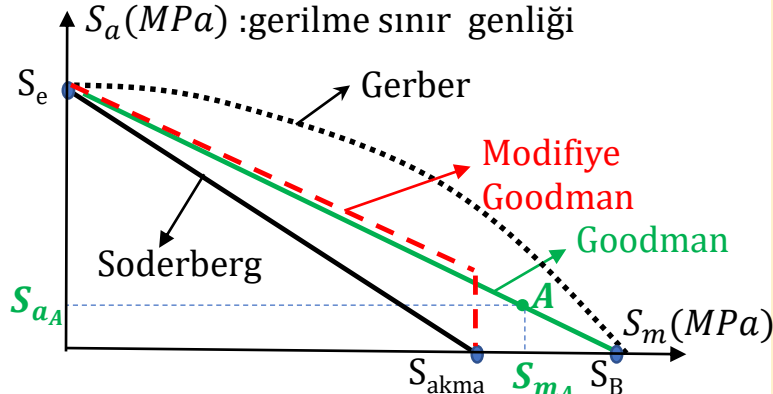
- Eğer  $S_m'$  değeri verilmişse c noktası onun düşey hizasındadır ve bu durumda  $40^\circ$  lik açıya gerek kalmaz.
- Smith diyagramının üst sınırı kopma mukavemeti iken, Modifiye Smith diyagramlarında üst sınırın akma mukavemeti olduğuna dikkat ediniz.
- Modifiye Smith diyagramının negatif tarafı da benzer şekilde  $S_e$  ve  $-S_{akma}$  kullanılarak çizilir.
- Sünek malzemelerde basıdaki akma mukavemeti aynı olduğundan negatif taraf simetrik çıkacaktır. Gevrek malzemelerde bası mukavemeti daha fazla olduğundan diyagramın negatif tarafı daha büyük çıkar.

**11.10.3 Farklı Yorulma Kriterleri ve Sınır Diyagramları:**

Yorulma mukavemet hesapları için farklı yorulma kriterleri de geliştirilmiştir. Bu kriterlere ait 1.tip yorulma mukavemet sınır diyagramlarının pozitif bölgeleri Şekil 11.19 da gösterilmiştir. Şekil 11.20 de gösterilen 2.tip sınır diyagramları ise 1.Tip diyagramlardan türetilmiştir. **Orijinal Smith** diyagramı için çok sayıda yorulma testi gerekirken, diğer diyagramlarda ise ( $S_e$  değerini belirlemek amacıyla) sadece  $S_m = 0$  için yorulma testlerinin yapılması yeterli olmaktadır.  $S_{kopma}$  ( $=S_B$ ) ve  $S_{akma}$  değerleri ise literatürden alınır veya çeki/bası testleriyle bulunur. Bir kriterin diyagramına ait eğrinin (veya doğrunun) dışına taşılması, o kritere göre yorulma açısından emniyetli bölgede kalınması ve sonsuz ömüre sahip olunması anlamına gelir. Alltaki grafikleri dikkatlice inceleyerek, kriterleri ve tüm kavramları anlamaya çalışınız.



Şekil 11.19 - 1.Tip- Sınır Diyagramları



Şekil 11.20 - 2.Tip- Sınır Diyagramları

**Örnek:** Verilen yükleme durumu için ortalama gerilme  $S_{m_A}$ , Gerilme genliği  $S_{a_A}$  olarak hesaplanmışsa grafiklerde bulunduğumuz nokta A noktasıdır. Goodman'a göre: yorulma (sonsuz ömür) sınırındayız. Gerber ve Orijinal Smith'e göre: emniyetli bölgedeyiz. Diğer kriterlere göre: Yorulma mukavemet sınırları aşılmıştır. (hatta  $S_{akma}$  da aşıldığından ilk tekrarda akma oluşur.)

**Gerber Kriteri**

$S_e$  ve  $S_B$  değerlerinin bilinmesiyle 11.6 denkleminde uygun şekilde çizilir.

$$n: \text{emniyet katsayısı} \quad \frac{S_a}{S_e} = \frac{1}{n} - \left(\frac{S_m}{S_B}\right)^2 \quad (11.6)$$

**Soderberg Kriteri**

1.Tipte  $S_e d$  ve  $-S_e d$  doğrularından oluşturulur.

$$S_m > 0 \text{ ise } \frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{akma}} = \frac{1}{n} \quad (11.7.a)$$

$$S_m < 0 \text{ ise } \frac{S_a}{S_e} - \frac{S_m}{S_{akma}} = \frac{1}{n} \quad (11.7.b)$$

**Goodman ve Modifiye Goodman Kriterleri**

Goodman 1.Tipte  $S_e h$  ve  $-S_e h$  doğrularından oluşturulur. Modifiye Goodman da ise üstte kalan  $S_e h$  doğrusu,  $S_{akma} d$  doğrusunun kesim noktası olan  $i$  noktasında bitirilir.  $ik = kj$  olacak şekilde  $j$  noktası belirlenir. Sırasıyla  $S_e, i, d, j, -S_e$  noktaları doğrularla birleştirilerek Modifiye Goodman diyagramı elde edilir.

$$S_m > 0 \text{ ise } \frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_B} = \frac{1}{n} \quad (11.8.a)$$

$$S_m < 0 \text{ ise } \frac{S_a}{S_e} - \frac{S_m}{S_B} = \frac{1}{n} \quad (11.8.b)$$

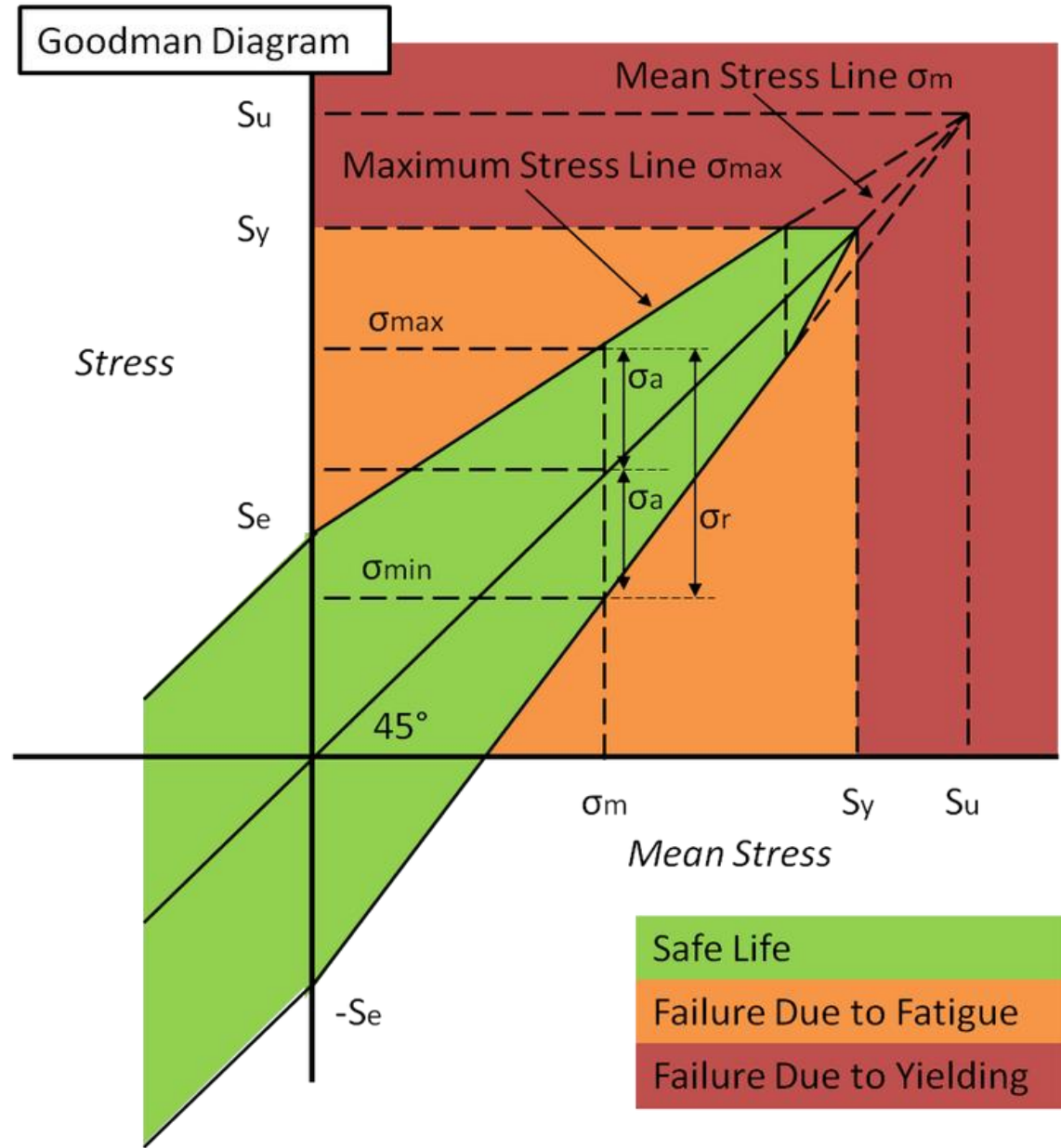
### **11.10.4 Yorulma kriterleri için plastik deformasyonun önemi**

- Şekil 11.19 ve 11.20 deki 2 diyagram incelendiğinde;
- Goodman, Gerber ve Orijinal Smith Kriterlerinin akmayı yani plastik deformasyonu dikkate almadığını görürüz. Yani tekrarlı yükleme sonucunda hesaplanan ömür, çatlak oluşması anındaki tekrar sayısı olup bu tekrara kadar plastik deformasyon olması bu kriterler için önemli değildir. Üst sınır bu sebeple kopma gerilmesi ( $S_{-kopma}$ ) dır.
- Modifiye Smith, Modifiye Goodman, Soderberg kriterleri ise plastik deformasyon oluşma anını da yorulma ömrü hesabında dikkate alır. Bir başka ifadeyle tekrarlı yükleme sırasından daha çatlak oluşmadan, akma oluşursa o noktada hasar oluşmuş kabul edilir. Bu sebeple grafiklerde bu kriterlerin üst sınırı akma gerilmesi ( $S_{-akma}$ ) dir.

### **11.10.5 Yorulma kriterlerinin kullanıldığı malzeme tipleri:**

- Smith, Goodman ve Gerber kriterleri tüm malzeme tipleri için kullanılabilmesine rağmen,
- Goodman gevrek malzemeler, Gerber ise sünek malzemeler için daha iyi bir tercih olmaktadır.
- Soderberg ise düşük sünekli (plastik bölgesi dar olan) malzemeler için kullanışlıdır.

- Yandaki diyagramı iyice inceleyerek hangi bölgede hangi sebeple hasar oluştuğunu, hangi bölgelerde hiç hasar oluşmayacağını anlamaya çalışınız.



Şekil 11.20

### 11.10.6 Düzeltme Faktörleri

Çalışma şartlarında yorulma ömrünü azaltan fakat deneyler sırasında hesaba katılamamış farklı faktörler vardır. Bu sebeple gerçek durumdaki yorulma hesaplarında bu faktörlerin mutlaka dikkate alınması gerekir. Bunların her birisi 0 ile 1 arasındaki ayrı bir katsayı ile tanımlanır ve hepsi çarpılarak tek katsayıya indirgenir. Bu katsayısı ise  $S_m=0$  için tespit edilen deneysel yorulma mukavemet genliği ( $S_{e'}$ ) değeri ile çarpılarak gerçek yorulma mukavemet genliği ( $S_e$ ) elde edilir ve hesaplarda  $S_e$  kullanılır. Bu şekilde tüm faktörlerin etkisi hesaplara katılmış olur.

$k_a$ : (imalat yöntemine bağlı) yüzey faktörü

$k_b$ : (geometriye bağlı) boyut faktörü

$k_c$ : (zorlanma şekline bağlı) yük faktörü

$k_d$ : (işletim sıcaklığına bağlı) sıcaklık faktörü

$k_e$ : gerilme yığılması faktörü  $=1/K_f$

( $K_f$  yorulma için gerilme yığılması faktörü.)

Toplam düzeltme faktörü  $k = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e$

$S_m = 0$  için

$S_{e'}$ : Deneysel Yorulma Mukavemeti Genliği

$S_e$ : Gerçek Yorulma Mukavemeti Genliği

$$S_e = kS_{e'}$$

**Örnek 11.4**

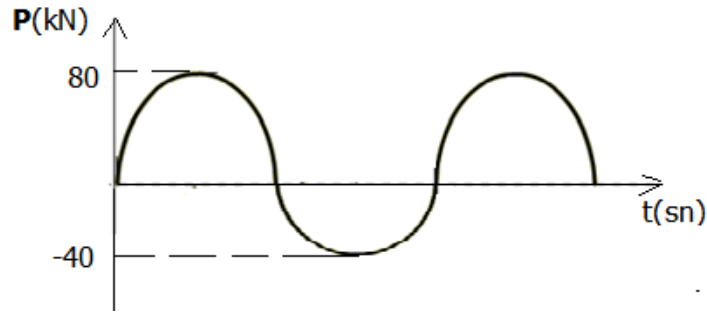
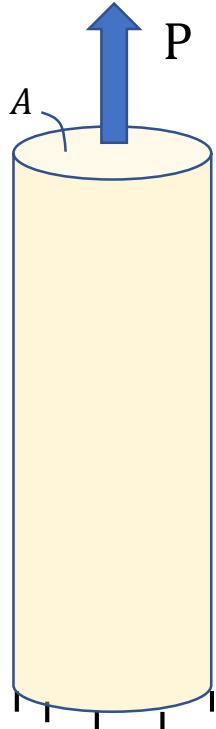
Bir çelik çubuğa aksenal yönde, grafiği aşağıda verilen değişken bir P kuvveti etki ediyor.

çubuğun emniyetli kesitini,

a-) Modifiye Smith,

b-) Gerber

kriterlerine göre belirleyiniz.



$$S_{kopma} = S_B = 420 \text{ MPa}$$

$$S_{akma} = 280 \text{ MPa}$$

$$S_e = 170 \text{ MPa}$$

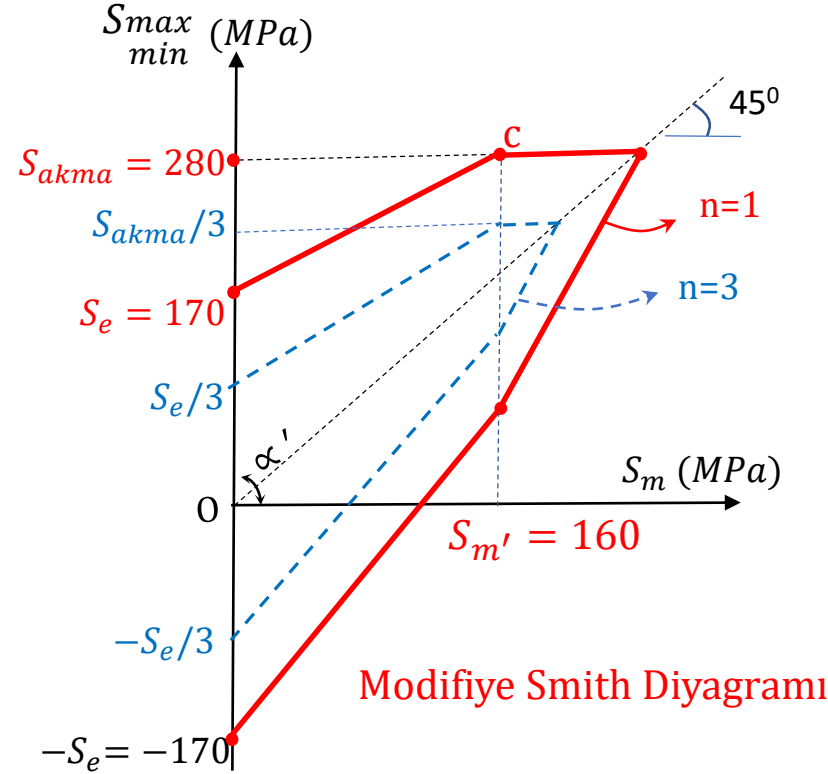
$$S_{m'} = 160 \text{ MPa}$$

$$\text{Emniyet katsayısı } n=3$$

**Çözüm:**

P-t diyagramından:

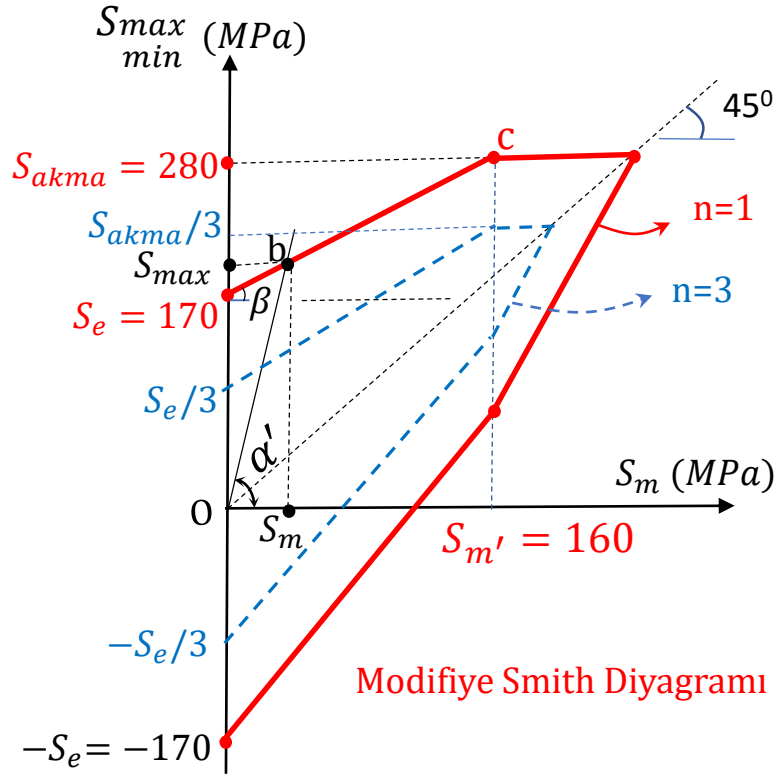
$$P_{max} = 80 \text{ kN}, \quad P_{min} = -40 \text{ kN} \quad ; \quad A_{em} = ?$$



a-)  $S_e$ ,  $S_{akma}$ ,  $S_{m'}$  değerleri yardımıyla Modifiye Smith diyagramlarını  $n=1$  için yandaki gibi çizeriz

$$\text{Gerilme sınır değerleri: } S_{max} = \frac{P_{max}}{A} = \frac{80(10^3)}{A} \quad (I), \quad S_{min} = \frac{P_{min}}{A} = \frac{-40(10^3)}{A}$$

$$\text{Ortalama Gerilme: } S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{80(10^3) - 40(10^3)}{2A} \rightarrow S_m = \frac{40(10^3)}{2A}$$

**Çözüm:**

Bu yükleme durumu için sonsuz ömür sınır noktası b noktası olsun. b noktasında olmamızı sağlayacak A kesit değerini önce bulacağız ki, bu değer  $n=1$  için kritik kesit değeridir.

b noktasındaki  $S_{max}$  değerini bulursak (I) denkleminde A'yı çekebiliriz. Şöyle ki:

$$\text{Ob doğrusunun eğimi: } \tan \alpha' = \frac{S_{max}}{S_m} = \frac{\frac{80(10^3)}{A}}{\frac{40(10^3)}{2A}} = 4 \rightarrow S_{max} = 4S_m \quad (II)$$

$$S_e - c \text{ doğrusunun eğimi: } \tan \beta = \frac{S_{akma} - S_e}{S'_m} = \frac{280 - 170}{160} = \frac{11}{16}$$

$$\tan \beta = \frac{S_{max} - S_e}{S_m} = \frac{S_{max} - 170}{S_m} = \frac{11}{16} \rightarrow S_{max} = \frac{11}{16} S_m + 170 \quad (III)$$

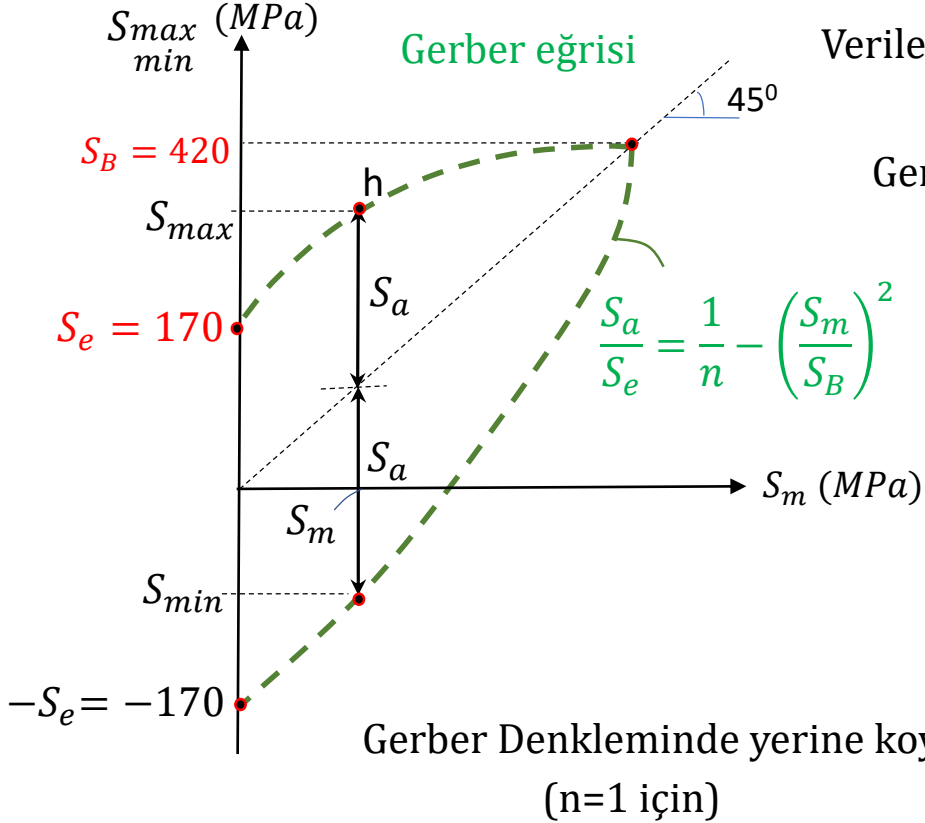
(II) ve (III) doğru denklemlerinin kesişim noktası b için her iki denklem birbirine eşitlenir.

$$S_{max} = 4S_m = \frac{11}{16} S_m + 170 \rightarrow S_m \left( 4 - \frac{11}{16} \right) = 170 \rightarrow S_m = 51.32 \text{ MPa}, \quad S_{max} = 4S_m = 4 \times 51.32 = 205.28 \text{ MPa} = \frac{P_{max}}{A} = \frac{80(10^3)}{A}$$

$$\rightarrow A \cong 390 \text{ mm}^2 \text{ bulunur. (n=1 içindir.)} \quad \text{Emniyetli kesit alanı: } A_{em} = n.A = 3 \times 390 \rightarrow A_{em} = 1170 \text{ mm}^2$$

Not: 1-) Aynı sonucu  $n=3$  diyagramından giderek de bulabiliriz. 2-)  $S'_m$  verilmezse  $\beta = 40^\circ$  alınabilir.

## b-) Gerber kriterine göre çözüm:



n=1 için çizilmiş Gerber eğrisi şekildeki gibidir.

Verilen yükleme durumu için eğri üzerinde bulunduğumuz nokta h olsun. Bu h noktası için :

Gerilme genliği: 
$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{\frac{P_{max}}{A} - \frac{P_{min}}{A}}{2} = \frac{80 \times 10^3 - (-40 \times 10^3)}{2A}$$

$$S_a = \frac{60000}{A}$$

Ortalama Gerilme: 
$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{\frac{P_{max}}{A} + \frac{P_{min}}{A}}{2} = \frac{80 \times 10^3 - 40 \times 10^3}{2A}$$

$$S_m = \frac{20000}{A}$$

$$\frac{S_a}{S_e} = \frac{1}{n} - \left( \frac{S_m}{S_B} \right)^2 \rightarrow \frac{\frac{60000}{A}}{170} = \frac{1}{1} - \left( \frac{\frac{20000}{A}}{420} \right)^2$$

Son denklemi düzenlersek:  $A^2 - 352.94A - 2267.57 = 0 \rightarrow$  Bu 2.derece denklemin çözümünden:  $A = 359.25 \text{ mm}^2$

Emniyetli kesit alanı:  $A_{em} = n \cdot A = (3) \times 359.25 \rightarrow A_{em} = 1077.75 \text{ mm}^2$

- Görüldüğü gibi çözüm için Gerber eğrisini mutlaka çizmemiz gerekmez, eğri denklemini ve sınırlarını bilmemiz yeterlidir.
- Bu ve diğer kriterlerin sınır eğrilerinin sonsuz ömür sınırları olduğu, eğrilerin altında kalırsa emniyetli bölgede kalınacağı, eğrilerin üstüne taşılırsa sonlu ömür ve yorulma çatlaklarının oluşacağı daima aklımızda olmalıdır ki çözüm mantığından bir kopma yaşamayalım.

**Örnek 11.5**

Bir koltuk değneğinin zemine temas eden içi dolu silindirik ayak bölgesinin emniyetli çap değerini Goodman ve Soderberg kriterlerine göre belirleyiniz. Koltuk değneğinin 100kg lık bir insanı emniyet sınırları içinde taşıyabilmesi gerekir.



$$S_{akma} = 120\text{MPa},$$

$$S_e = 60\text{MPa},$$

$$S_m' = 110\text{MPa},$$

$$S_{kopma} = S_B = 220\text{MPa},$$

Emniyet katsayısı

$$n=2,$$

$$g=10\text{m/s}^2$$

koltuk  
değneği



Ayak

Koltuk değneği havaya kalktığında üzerine yük gelmez:  $P_{max} = 0$

Bir koltuk değneği yerle temas edince vücut yükünün yarısını taşır:

$$P_{min} = -\frac{W}{2} = -\frac{mg}{2} = -\frac{100(10)}{2} = -500\text{N}$$

Ortalama gerilme  
(mean stress):

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{\frac{P_{max}}{A} + \frac{P_{min}}{A}}{2} = \frac{-500}{2A} \rightarrow S_m < 0$$

Gerilme genliği  
(Alternating stress):

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{\frac{P_{max}}{A} - \frac{P_{min}}{A}}{2} = \frac{-500}{2A} = \frac{500}{2A} \rightarrow S_a > 0$$

Goodman kriterine göre

( $S_m < 0$  olduğundan  
11.8.b denklemi  
kullanılır):

$$\frac{S_a}{S_e} - \frac{S_m}{S_B} = \frac{1}{n} \rightarrow \frac{500/2A}{60} - \frac{-500/2A}{220} = \frac{1}{2} = \frac{5.3}{A}$$

$n = 2$  alındığından

$$\rightarrow A = A_{em} = 10.6\text{mm}^2 = \frac{\pi \cdot d_{em}^2}{4} \rightarrow d_{em} = 3.67\text{mm}$$

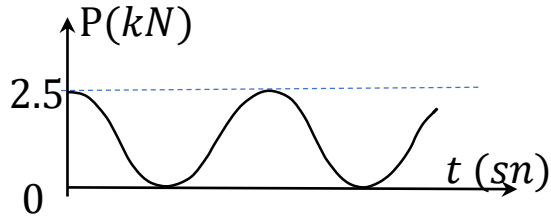
Soderberg kriterine göre

( $S_m < 0$  olduğundan  
11.7.b denklemi  
kullanılır):

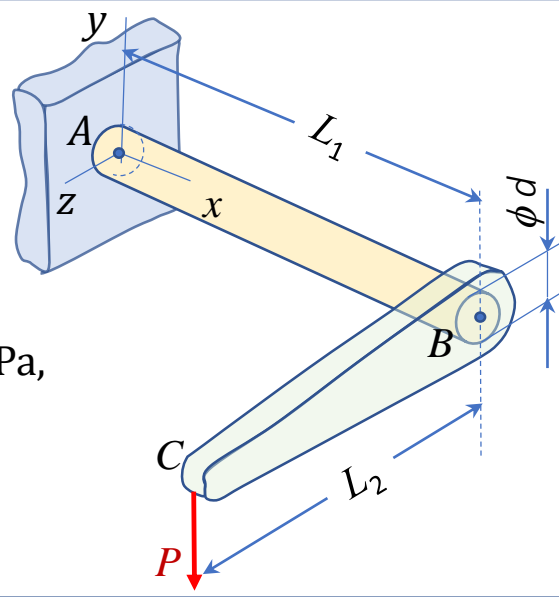
$$\frac{S_a}{S_e} - \frac{S_m}{S_{akma}} = \frac{1}{n} \rightarrow \frac{500/2A}{60} - \frac{-500/2A}{120} = \frac{1}{2} = \frac{6.25}{A}$$

$$\rightarrow A = A_{em} = 12.5\text{mm}^2 = \frac{\pi \cdot d_{em}^2}{4} \rightarrow d_{em} = 3.99\text{mm}$$

**Örnek 11.6:** A ucundan ankastre olan düşük sünekli malzemeden imal edilmiş AB miline, BC kolunun C noktasından, zamanla değişimi alttaki grafikte gösterilen düşey P kuvveti uygulanacaktır. Buna göre milin yorulma açısından emniyet kontrolünü yapınız.



$$\begin{aligned} S_{\text{kopma}} &= S_B = 360 \text{ MPa}, \\ S_{\text{akma}} &= 240 \text{ MPa}, \\ S_e &= 80 \text{ MPa}, \\ L_1 &= 50 \text{ cm}, \\ L_2 &= 40 \text{ cm}, \quad d = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$



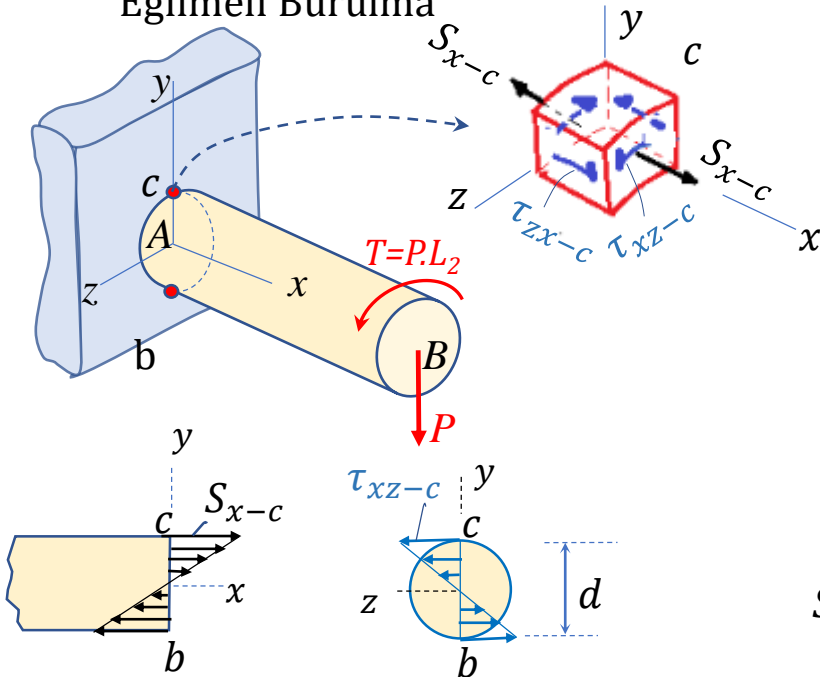
### Çözüm:

P kuvveti sebebiyle eğilme ve burulma aynı anda söz konusudur. P kuvvetini B noktasına T burulma momenti ile birlikte taşırız. Eğilme + Burulma oluştuğunu görürüz.

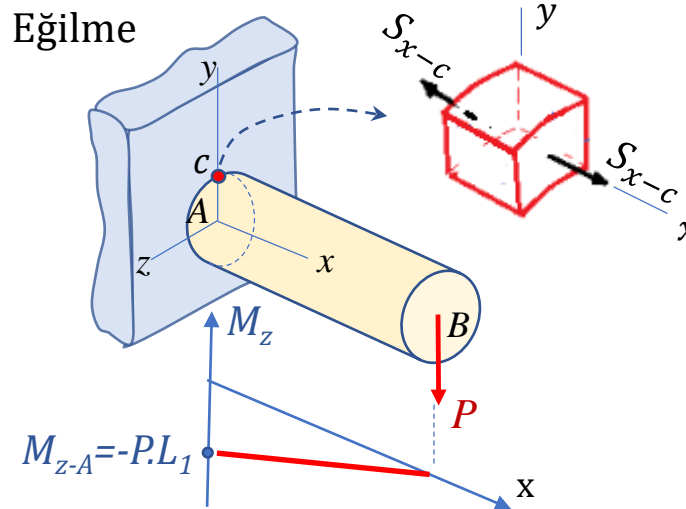
Herbir yükleme için bir andaki moment diyagramlarını incelersek en kritik kesitin ankastre A kesiti; en kritik noktaların normal ve kayma gerilmelerinin şiddetçe en yüksek değerde olduğu en üst ve en alt (c ve b) noktaları olduğu anlaşılır..

Kesit simetrik olduğu için  $\rho_c = \rho_b = d/2$  ve  $y_c = -y_b = d/2$  dir ve dolayısıyla her iki noktada da gerilmeler şiddet olarak eşit çıkar. O halde sadece c noktasını yorulma açısından incelememiz yeterlidir.

#### Eğilmeli Burulma

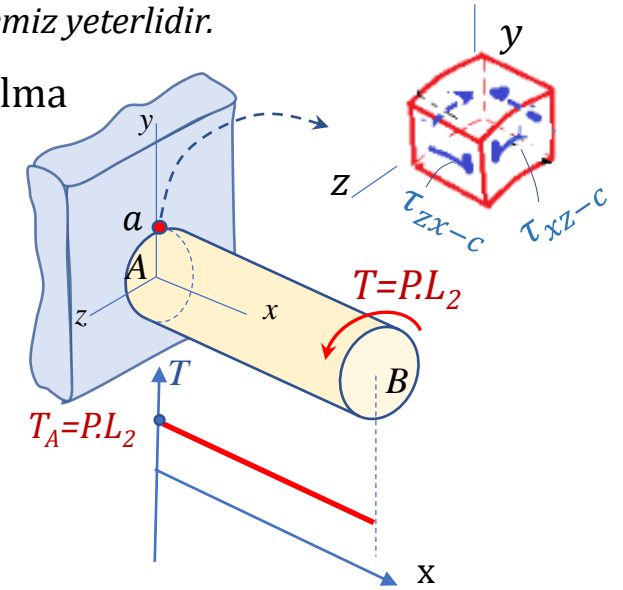


#### Eğilme



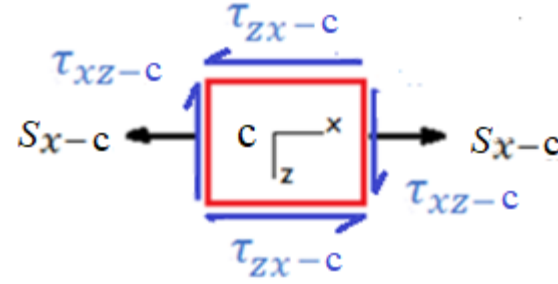
$$S_{x-c} = -\frac{M_{z-A}}{I_z} y_c = -\frac{-P.L_1 d}{\frac{\pi.d^4}{64} \cdot 2} = \frac{32PL_1}{\pi d^3} \quad (I)$$

#### Burulma



$$\tau_{xz-c} = \frac{T \cdot \rho_c}{J} = \frac{P.L_2 d}{\frac{\pi.d^4}{32} \cdot 2} = \frac{16PL_2}{\pi d^3} \quad (II)$$

c noktasına x-z düzleminde bakarsak, düzlem gerilme durumu olduğunu görürüz:



c noktasında zamanla oluşan gerilmelerin sınır değerlerini bulalım:

Değişken kuvvetin sınır değerleri soruda verilen grafikten okunur:  $P_{min} = 0$ ;  $P_{max} = 2.5\text{kN} = 2500\text{N}$

(I) nolu denklemden normal gerilme sınır değerleri:

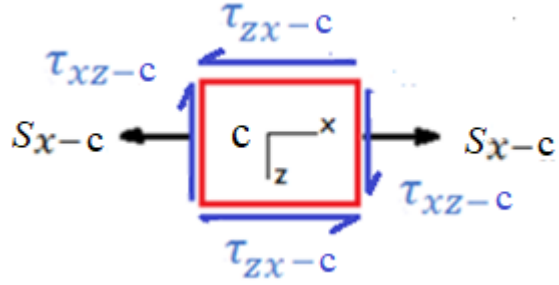
$$S_{x-c-min} = \frac{32P_{min}L_1}{\pi d^3} = \frac{32 \times 0 \times 500\text{mm}}{\pi(60\text{mm})^3} \rightarrow S_{x-c-min} = 0 ;$$

$$S_{x-c-max} = \frac{32P_{max}L_1}{\pi d^3} = \frac{32 \times 2500\text{N} \times 500\text{mm}}{\pi(60\text{mm})^3} \rightarrow S_{x-c-max} = 58.94\text{MPa}$$

(II) nolu denklemden kayma gerilmesi sınır değerleri:

$$\tau_{xz-c-min} = \frac{16P_{min}L_2}{\pi d^3} = \frac{16 \times 0 \times 400\text{mm}}{\pi(60\text{mm})^3} \rightarrow \tau_{xz-c-min} = 0$$

$$\tau_{xz-c-max} = \frac{16P_{max}L_2}{\pi d^3} = \frac{16 \times 2500 \times 400\text{mm}}{\pi(60\text{mm})^3} \rightarrow \tau_{xz-c-max} = 23.58\text{MPa}$$



c noktasında bileşik gerilme durumu söz konusudur. Çelik sünek bir malzeme olduğu için statik yüklemelerde kullandığımız Von-Mises akma kriterini yorulma hesaplarında da kullanabiliriz. (Gevrek malzemelerde ise asal gerilmeleri ve özellikle maksimum asal gerilmeyi kullanmak daha doğrudur.)

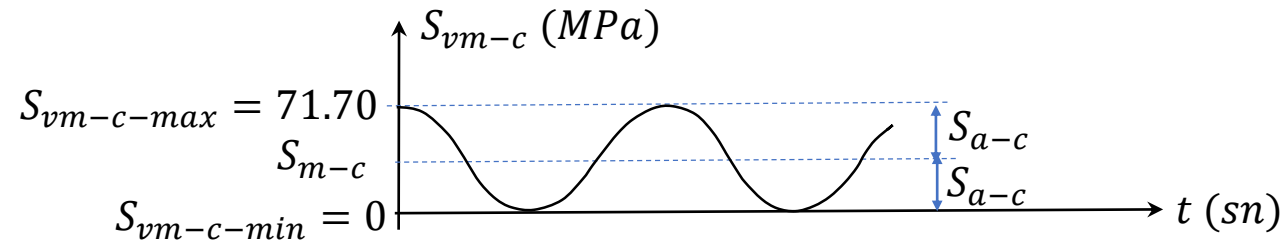
c noktasında Von-mises (eşdeğer) gerilmesinin ( $S_{vm}$ ) sınır değerlerini de hesaplarsak:

$$S_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(S_y - S_z)^2 + (S_x - S_z)^2 + (S_x - S_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)]} \quad (\text{Muk. I - 7.2.a denkleminde})$$

$$S_{vm} = S_{vm-c} = \sqrt{\frac{1}{2}[(0 - 0)^2 + (S_{x-c} - 0)^2 + (S_{x-c} - 0)^2 + 6(0^2 + \tau_{xz-c}^2 + 0^2)]} = \sqrt{S_{x-c}^2 + 3\tau_{xz-c}^2}$$

$$S_{vm-c-min} = \sqrt{S_{x-c-min}^2 + 3\tau_{xz-c-min}^2} = \sqrt{0^2 + (3)0^2} = 0 \rightarrow S_{vm-c-min} = 0$$

$$S_{vm-c-max} = \sqrt{S_{x-c-max}^2 + 3\tau_{xz-c-max}^2} = \sqrt{58.94^2 + (3)(23.58)^2} \rightarrow S_{vm-c-max} = 71.7 \text{ MPa}$$



Şimdi c noktasında yorulma olup olmayacağını uygun bir kritere göre kontrol edeceğiz.

Malzeme düşük sünekli olduğu için, Soderberg kriterine göre yorulma kontrolü yapmak daha doğru bir yaklaşımdır...>>

Soderber Diyagramlarının çizimi: Malzeme özellikleri olan  $S_e$  ve  $S_{akma}$  gerilmeleri kullanılarak yandaki gibi çizilir. (bkz: konu 11.10.3).

### Soderber'ge göre c noktası için yorulma kontrolü

Yorulma kontrolü için c noktasının diyagramlardaki yerini belirlemeliyiz.

P kuvveti sebebiyle c noktasındaki **mevcut gerilmeler**:

Ortalama gerilme (mean stress):  $S_{m-c} = \frac{S_{vm-c-max} + S_{vm-c-min}}{2} = \frac{71.7 + 0}{2} = 35.85 MPa$

Gerilme genliği (Alternating stress):  $S_{a-c} = \frac{S_{vm-c-max} - S_{vm-c-min}}{2} = \frac{71.7 - 0}{2} = 35.85 MPa$

**Bu iki gerilmeden c noktasının yeri diyagramlarda belirlenir ve işaretlenir..>>**

**Dikkat edilirse c noktası sınır doğrularının içinde kalmaktadır.**

**Bu sebeple c noktasında yorulma oluşmaz sonucuna varırız.**

c noktasını yorulma sınırına çıkaracak **sınır gerilmeler** ayrıca hesaplanabilir:

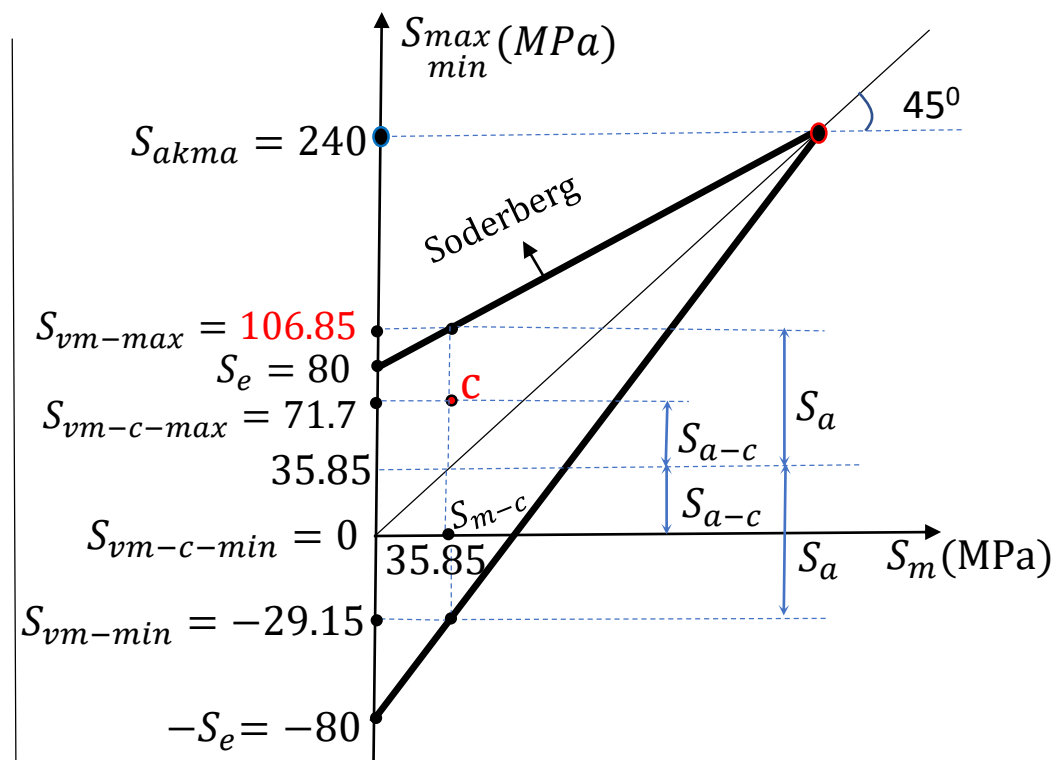
$S_{m-c} > 0$  olduğundan  $\rightarrow$  11.7. a denklemi geçerlidir:  $\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_{m-c}}{S_{akma}} = \frac{1}{n}$

Gerilme genliği (Alternating stress):  $\frac{S_a}{80} + \frac{35.85}{240} = \frac{1}{1} \rightarrow S_a \cong 68 MPa$

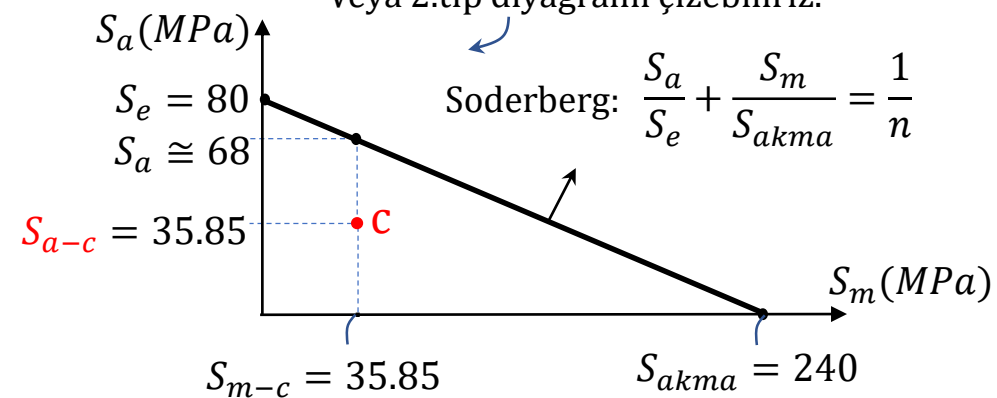
Maximum Gerilme:  $S_{vm-max} = S_{m-c} + S_a = 35.85 + 68 = 106.85 MPa$

Minimum Gerilme:  $S_{vm-min} = S_{m-c} - S_a = 35.85 - 68 = -29.15 MPa$

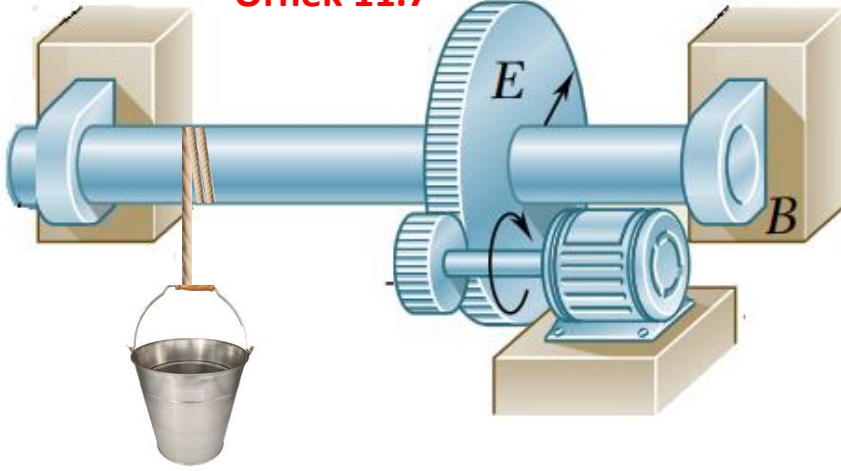
Soru: c noktası için bulunan  $S_{vm-c-max}$  ile  $S_{vm-max}$  arasında ve  $S_{a-c}$  ile  $S_a$  arasında ne farklar vardır? Aranızda tartışarak konuyu pekiştirin.



Veya 2.tip diyagramı çizebiliriz.

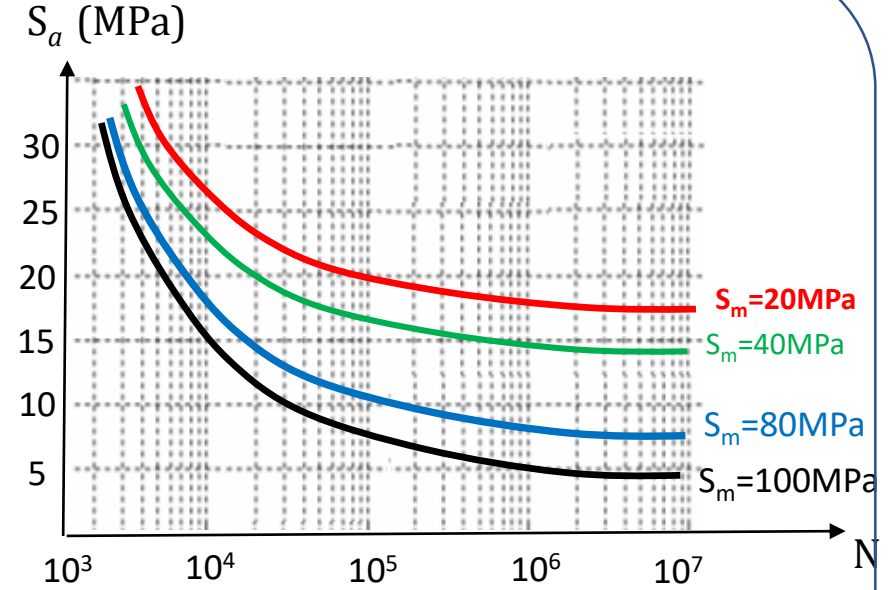


\*Yorulma kontrolü için bu iki diyagramdan birisi yeterlidir.

**Örnek 11.7**

Şekilde görülen yük kaldırma makinasında dişliler arasındaki temas kuvveti 4kN olarak hesaplanmıştır. Buna göre motora bağlı milin yarıçapı  $r=4\text{cm}$  seçilmesinin sistemin emniyeti açısından yeterli olup olmayacağını ve emniyetli çıkarsa, Soderberg kriterine göre emniyet katsayısını hesaplayınız. (Motora bağlı dişlinin yarıçapı  $R=20\text{cm}$ , küçük mil uzunluğu  $L=0.6\text{m}$ )

**Cevap:**  $n = 2.78$  (Çözümü için [Video 12.c](#) 'ye bakınız)

Mil malzemeleri için:

- Deneysel yorulma mukavemet genliği:  $S_e' = 60\text{MPa}$
- düzeltme faktörü  $k: 0.9$ ,
- Akma Mukavemeti  $S_{akma} = 330\text{MPa}$