



PÜF NOKTALARIYLA

# DİNAMİK

(Son Güncelleme 27.10.2023)

Prof. Dr. Mehmet Zor  
Dokuz Eylül Üniversitesi – Makine Mühendisliği Bölümü

# ÖNSÖZ

## Değerli Öğrenci ve Mühendis Arkadaşlarım,

Günlük hayatımızda, iş hayatımızda, sanayide ve hemen hemen tüm sektörlerde hareketli birçok katı cisim veya sistemlerle aslında iç içe yaşarız. Otomobil, uçak, tren, gemi gibi nakliye araçlarından, radarlara, mekanizmalara, makinalara, mutfak robotlarına, roketlere kadar birçok hareketli üründen istenen işlevselliğin elde edilebilmesi için hız, ivme, konum analizlerinin doğru yapılabilmesi, bunun yanı sıra hareketin sebepleri olan dış yüklerin doğru hesaplanabilmesi son derece gereklidir ki bu da ancak dinamik bilgisi yeterli seviyede olan araştırmacılardan ve özellikle hareketli katı sistemlerle birinci derecede ilgili olan makine, uçak, otomotiv gibi alanlarda çalışan mühendislerinden beklenen bir yetkinliktir. İşte bu ders notlarımız dinamik bilimi konusunda çok iyi seviyede bir alt yapı oluşturacak ve bu alanda gerekli olan yetkinliği sizlere kazandıracaktır. Dinamik dersini mühendislik fakültelerinin farklı bölümlerinde uzun yıllar boyunca vermem dolayısıyla, özellikle siz öğrencilerin konuları anlamakta güçlük yaşadığı noktaları kolay ve anlaşılır hale getirmeye çalıştım ve bunlara püf noktaları ismini verdim. Bir açıdan notlarımızın orijinal yönü olan bu püf noktalarının konular içerisinde vurgulanmasının yanı sıra, her bir konu farklı örneklerle zenginleştirilmiş ve ayrıca [mehmetzor.com](http://mehmetzor.com) sitesinde yer alan ders videoları ile notlar ilişkilendirilmiştir. Notlarımızda bazı yerlerde aynı resimlerin ardışık sayfalara aynen koyulduğunu görebilirsiniz. Bu durum; şekilleri incelemek için bir önceki sayfalara geri dönme zorluğunu ortadan kaldırarak, konuların veya örneklerin daha hızlı anlaşılmasını sağlamakta ; ayrıca öğretim üyelerinin sunumlarımızla dersi daha akıcı bir şekilde anlatmalarına yardımcı olmaktadır. Tüm öğrencilere, akademisyenlere, araştırmacılara, mühendislere faydası olması dileğiyle...

**Aralık 2022 - İzmir**  
**Prof. Dr. Mehmet Zor**

## KONULAR

### 1-MADDESEL NOKTA (PARÇACIK) KİNEMATİĞİ

1.1 Doğrusal Hareket

1.2 Eğrisel Hareket

1.2.1 Eğik ve Yatay Atış

1.2.2 Yörüngesel Hareket, Teğetsel-Normal Bileşenler

1.2.3 Kartezyen Koordinatlar

1.2.4 Silindirik ve Kutupsal Koordinatlar

### 2- MADDESEL NOKTA KİNETİĞİ

2.1  $F = ma$  denkleminin doğrudan uygulaması (D'Alembert Prensibi)

2.2 İş-Enerji Yöntemi ve Enerjinin Korunumu

2.3 İmpuls-Momentum ve Çarpışma

### 3- RİJİT CİSİM KİNEMATİĞİ

3.1 Düzlemsel Hareket

3.1.1 Aynı cismin noktaları arasındaki hareket denklemleri

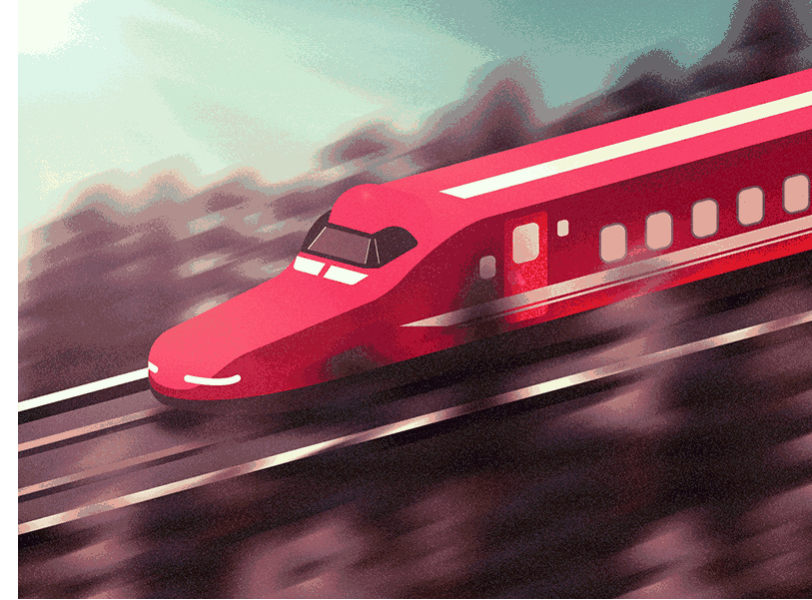
3.1.2 Bağlı Hareket: Farklı cisimlerde bulunan noktalar arasındaki hareket denklemleri

3.2 Üç boyutlu hareket

### 4- RİJİT CİSMİN DÜZLEMSEL KİNETİĞİ

4.1 Kuvvet, Moment, ivme ilişkileri ( $F=ma$ ,  $M=I\alpha$ ) /Rijid sistemlerde D'Alembert Prensibi

4.2 İş-Enerji Yöntemi ve Enerjinin Korunumu



## İletişim

e-posta: [mehmet.zor@deu.edu.tr](mailto:mehmet.zor@deu.edu.tr) , mehmetzor66@gmail.com

Öğretim Üyesi WEB SİTESİ : [mehmetzor.com](http://mehmetzor.com)

### Site İçerikleri

a - Ders Eğitim Videoları (Her bir konuyu örneklerle anlattığım videolardır.)

b- Ders Notları.pdf (bu notlar)

c- Sınav soruları ve çözümleri

- Tüm içeriklerle ilgili görüş ve önerilerinizi bildirirmeniz bizim için önemlidir.



## Sunum Dosyalarının ve Çözümlerin Paylaşımı

Bu ders notlarını kendi dersinde takip etmek isteyen **Öğretim Üyeleri ile** Sunum Dosyaları ve ve notlardaki (\*) ile işaretli soruların çözümler paylaşılmaktadır. Öğretim Üyesi iseniz;

1. **edu.tr** uzantılı **Kurumsal** mail adresinizden [mehmet.zor@deu.edu.tr](mailto:mehmet.zor@deu.edu.tr) adresine isteğinizi bildiren bir mail atınız.
2. Mailinizde ayrıca **gmail** hesabınızı belirtiniz.

**Not:** Sunum dosyaları pdf dosyası ile birebir aynı olup, ayrıca **animasyon** içermektedir ( yani yazılar ders işleyişine uygun şekilde sırayla çıkmaktadır.)

---

## Güncelleme Farkları

*17.09.2023 ve 21.10.2023 tarihli eski ders notlarındaki **cevaplı sorular** ve **çözümlü örnekler** kontrol edilerek bazı düzeltmeler yapılmıştır. Bu düzeltmeler ilgili kısımlarda **kırmızı** ile yazılmış ve belirginleştirilmiştir.*

# Giriş ve Motivasyon

(Bu konu «Giriş ve Motivasyon» isimli videoda anlatılmıştır.)

---

Videolara Erişim Sayfası: <https://www.mehmetzor.com/dersler/dinamik/ders-egitim-videolari/>

## A. DİNAMİK Bilimi ve Kapsamı

**DİNAMİK**, hareketli katı cisimleri inceleyen Mekanik'in bir alt bilim dalıdır.

**DİNAMİK**, hareketin nasıl ve niçin olduğu sorularına net cevaplar bulmamızı sağlar.

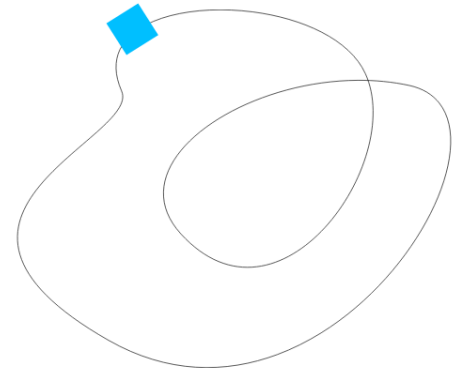
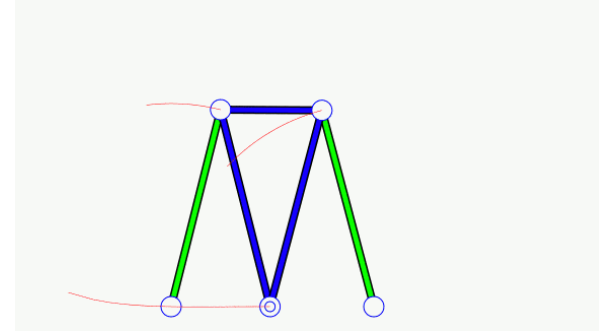
**DİNAMİK** temeli iyi olan bir mühendis,

Herhangi bir cismin, herhangi bir hareketi sırasında,

Cismin ağırlık merkezinin veya cismin üzerindeki herhangi bir noktasının

- herhangi bir  $t$  anındaki hız, ivme, konum değerlerini,
- harekete sebep olan kuvvet, moment gibi dış yükleri

hesaplayabilir ki, bu bir mühendiste olması son derece gerekli olan en temel bir yetkinliktir.



*DİNAMİK DERSİ  
Gerçek Hayatta Ne  
İşime Yarayacak?*

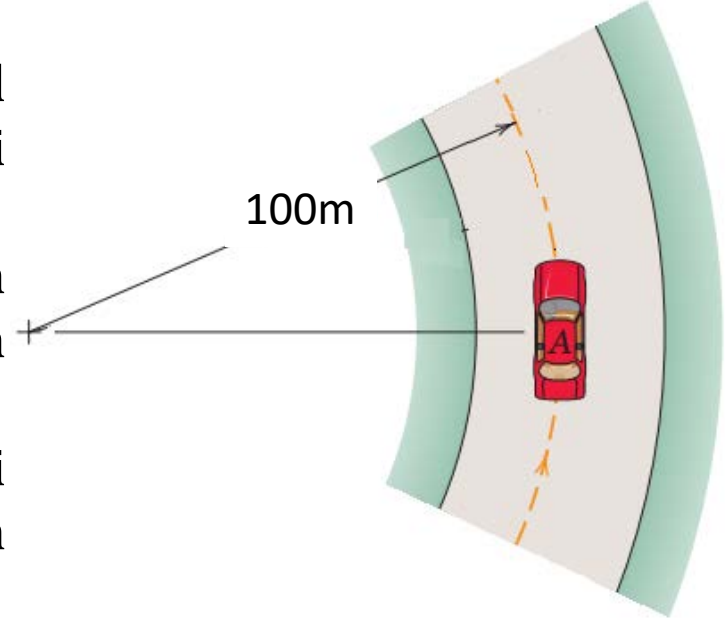


## B. DİNAMİK DERSİ GERÇEK HAYATTA NE İŞİME YARAYACAK?

Bu soruya iki farklı örnekle cevap vermeye çalışacağız:

### Örnek 1

- Bir otomobil üreticisi firmada çalıştığınızı düşünün. Firma son model olarak üretmeyi planladığı otomobil için şu şekilde bir performans kriteri belirlemiştir:
- Otomobil, 100m yarıçaplı viraja minimum 100km/h hızla girdikten sonra aynı hızla yoluna devam edip, herhangi bir savrulma olmadan virajdan aynı hızla çıkabilmelidir.
- Henüz üretilmemiş olan otomobilin tüm malzeme ve tasarımsal bilgileri elinizdedir ve sizden bu virajlı yolda otomobilin savrulmadan gidebileceği maksimum hızı hesaplamanız istemiştir.
- Sizin bulacağınız sonuca göre, üretime geçilecek veya bu kriteri sağlayana kadar tasarım veya malzemeler üzerinde çeşitli revizyonlar yapılacaktır.
- Üretimden sonra ise bu kriter için hazırlanmış sürüş pistinde otomobil teste tabi tutulacak ve dolaylı olarak sizin hesaplarınızın sağlaması da gözler önünde gerçekleşecektir.
- İşte sizden beklenen bu hesapları yapabilmeniz, ancak ve ancak Dinamiğin temel konularına ve hesaplamalarına yeterince hakim olmanızla mümkündür. Sonuçta elinize gerçek hayata uygulanabilir bir değer geçecektir.



## Örnek 2

- Savaş Uçağı üreten bir firmada makine mühendisi olarak çalışıyorsunuz.
- Ar-Ge birimi, yerde koordinatları belirlenmiş herhangi bir hedefin serbest düşmeye bırakılan bir bomba ile tam isabet vurulabilmesi için, bombanın bırakılması gereken anı ikaz edecek bir elektronik gösterge geliştirmek istemektedir.
- Bombanın bırakılması gereken anı belirleyecek hareket denklemlerinin geliştirmesi ise sizden istenmektedir.
- Bombanın bırakılma anını veren denklemler, uçağın hızı, ivmesi, yörüngesi, yerden yüksekliği, hedefin koordinatları ve rüzgar etkisi gibi değişkenlerle mutlaka ilişkili olacaktır.
- Sizden alınan bu denklemler daha sonra biriminizdeki elektronik ve yazılım mühendisleri tarafından göstergenin yazılım alt yapısında kullanılacaktır.
- İşte bu denklemleri geliştirebilmek, ancak iyi bir Dinamik alt yapısıyla mümkündür.
- Görüldüğü gibi iyi bir Dinamik bilgisi ve hesaplama yetkinliği, bu tip ar-ge çalışmalarında aktif rol almanız ve gerçek hayata faydalı ürünler elde edebilmeniz açısından son derece gereklidir.

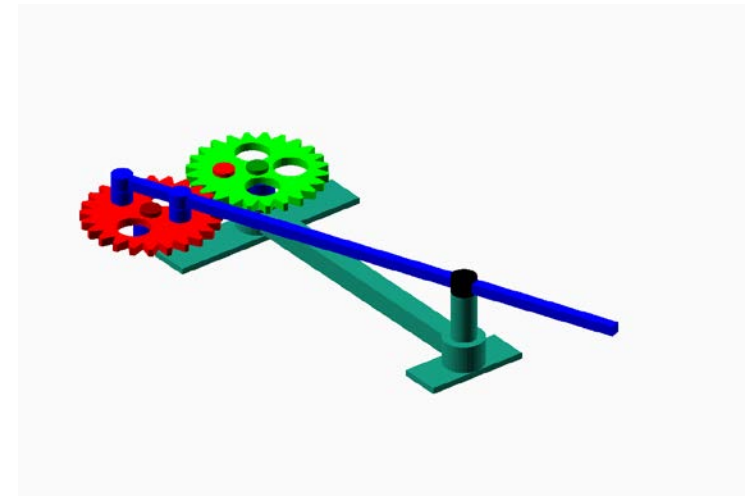


## C. TANIMLAR VE ÖNEMLİ KAVRAMLAR

**DİNAMİK** Bilimini Kinematik ve Kinetik olmak üzere ikiye ayırmamız mümkündür.

**1- Kinematik:** Hareketin nedenini araştırmaz ancak nasıl olduğu sorusuna cevap arar. Cismin hareketinin herhangi bir  $t$  anı için, hız, ivme ve konum değerleri herhangi bir nokta için bulunabiliyor olması, bu hareketin kinematik olarak çözülmüş olduğunu gösterir.

**2- Kinetik:** Hareketin neden olduğu sorusuna cevap arar. Hareketin nedeni olan dış yüklerle, cismin ivme, hız ve konumu arasındaki ilişkilerin kurulduğu bir alt bilim dalıdır.





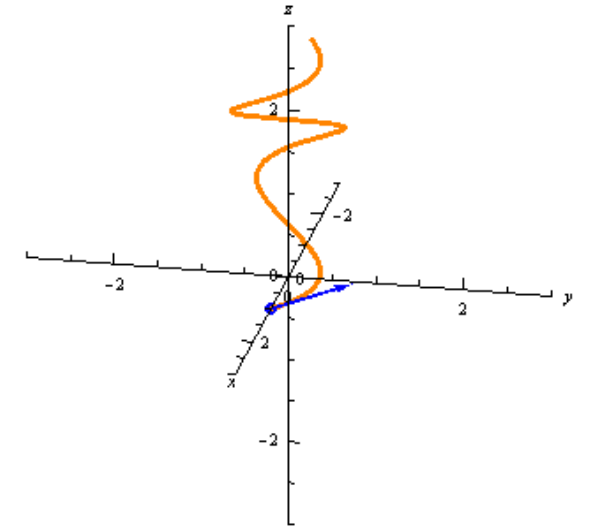
### 3- Maddesel Nokta (parçacık-particle) :

Hareketi sırasında tüm noktalarının hız ve ivmeleri aynı olan(ötelenme yapan) büyük veya küçük boyuttaki tüm cisimler, veya küçük olması sebebiyle sadece ağırlık merkezinin hareketi dikkate alınan cisimler dinamik açısından maddesel nokta olarak tanımlanır.

örnekler: düz bir hatta giden tren veya yuvarlanan bir bilye.

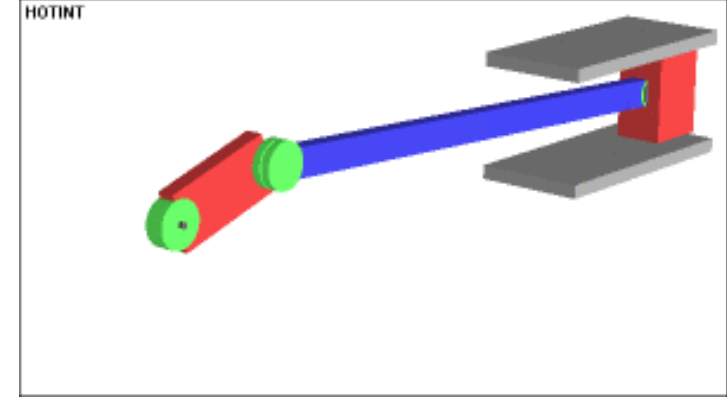
Başka bir tanımlama : Sadece tek noktasının (genellikle ağırlık merkezinin) hareketi dikkate alınan cisimler maddesel nokta olarak incelenebilir.

Maddesel Noktanın doğrusal hareket ve eğrisel hareket olmak üzere 2 tip hareketinden bahsedilebilir. Bunlar konular içerisinde izah edilecektir.



#### 4- Rijit Cisim :

- Hareketi sırasında herbir noktasının hızı veya ivmesi farklı olan (dönme hareketi yapmasının yanısıra, boyutları da ihmal edilemeyen) cisimler dinamik açıdan rijit cisim olarak tanımlanır.
- Ötelenme yapan rijit cisimlerin noktalarının bir  $t$  anındaki hız ve ivmeleri aynıdır, yörüngeleri birbirlerine paraleldir ve maddesel nokta olarak da incelenebilir. Eğer yörüngeler doğrusal ise doğrusal ötelenme, yörüngeler eğrisel ise eğrisel ötelenme olarak isimlendirilir.
- Bir eksen veya nokta etrafında dönme hareketi yapan cisimlerin noktalarının hız ve ivmeleri birbirlerinden farklıdır.
- Rijit cisimler hem ötelenme hem dönmeyi aynı anda yapabilir. Buna genel hareket denir.



## TANIMLAR VE ÖNEMLİ KAVRAMLAR

**5- Hız (Velocity) ( $v$ ):** Bir cismin birim zamanda aldığı yoldur. Birimi  $m/s$  dir.

**6- İvme (acceleration) ( $a$ ) :** Birim zamanda hızdaki değişimdir. Hızın hızı olarak da tanımlanır. Birimi  $m/s^2$  dir.

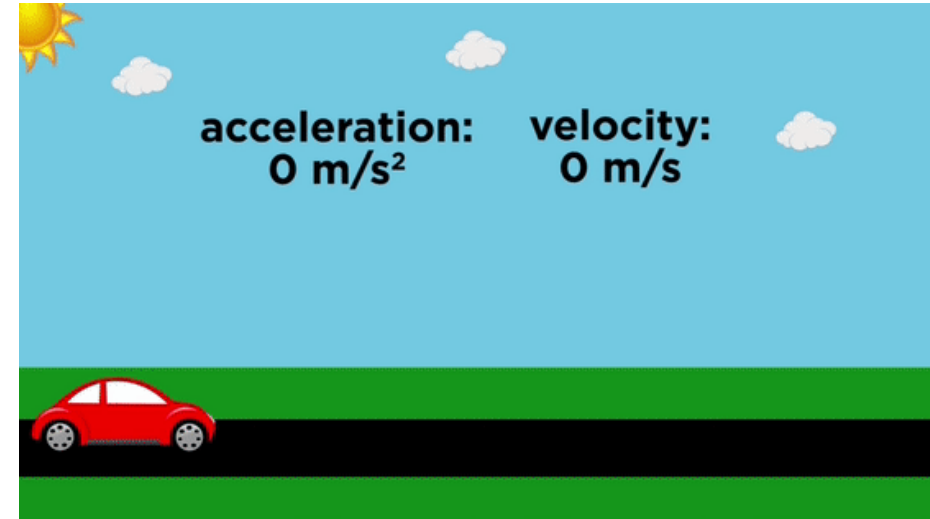
**7- Konum ( $s$ ) :** Cismin bir  $t$  anında referans noktasına göre koordinatlarıdır. Birimi metredir.

**8- Kuvvet (Force) ( $F$ ):** Bir cismi harekete zorlayan fiziksel dış etkidir. Birimi Newton (N) dir. 1kg kütleye, kendi yönünden  $1m/s^2$  lik ivme kazandıran kuvvet 1 Newton dur.

### 9- Dinamikle ilgili diğer kavramlar:

İmpuls, Momentum, Kinetik Enerji, Potansiyel Enerji, İş, Bağıl Hız, Bağıl İvme, Coriolis ivmesi, açısal hız, açısal ivme vb.

Bu kavramlar konuların içerisinde anlatılacaktır.





## BÖLÜM 1

### Maddesel Nokta Kinematiği

# 1.1 Doğrusal Hareket

*(Bu konu 1.1.a ve 1.1.b videolarında anlatılmıştır.)*

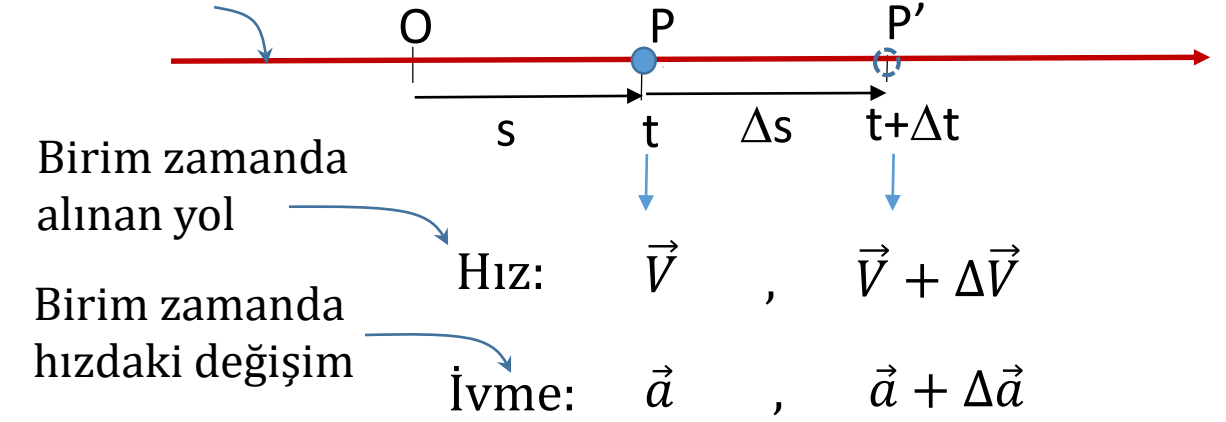
---

Videolara Erişim Sayfası: <https://www.mehmetzor.com/dersler/dinamik/ders-egitim-videolari/>

## 1.1 Doğrusal Hareket

- Yörüngesi bir doğru olan hareket tipine doğrusal hareket denir.
- Cismin tüm noktaları bir  $t$  anında aynı hız ve ivmeye sahiptir ve bu sebeple cismin büyüklüğü ne olursa olsun buradaki çıkarılacak formüller aynen geçerlidir.
- Yandaki şekilde görüldüğü üzere;
- Herhangi bir cisim bir  $t$  anında,  $O$  referans noktasından itibaren  $s$  mesafesindeki  $P$  noktasındadır ve anlık  $\vec{V}$  hızına ve  $\vec{a}$  ivmesine sahiptir. Bu cisim  $\Delta t$  süresince doğrusal yörünge boyunca  $\Delta s$  kadar ilerleyerek  $P'$  noktasına gelmiş ve hızı  $\Delta \vec{V}$  kadar, ivmesi  $\Delta \vec{a}$  kadar değişmiştir.
- Doğrusal harekette, hız ve ivme daima yörünge doğrultusundadır (yönleri zıt olabilir). Bu sebeple denklemler skaler terimler için yazılabilir.

doğrusal yörünge



Orantı kuracak olursak

$\Delta t$  süresince  $\Delta s$  kadar yol alırsa  
1 saniyede  $v_{ort} : ?$

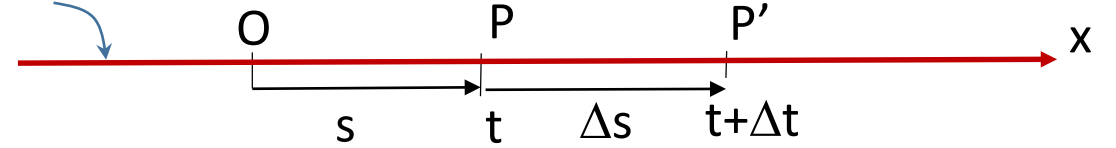
$$\text{Ortalama Hız: } v_{ort} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{D.1.1})$$

$\Delta t$  süresince  $\Delta V$  kadar hızı değişirse  
1 saniyede  $a_{ort} : ?$

$$\text{Ortalama İvme: } a_{ort} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{D.1.2})$$

- t anındaki hız, ivme ve konum arasındaki bağıntıları bulalım:

doğrusal yörünge



(t anındaki hız)  $\rightarrow$  **Ani Hız** :  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{ort} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{ds}{dt}$  (D.1.3)

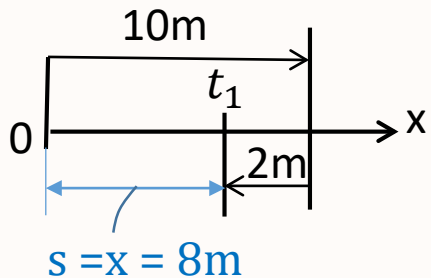
(Türev tanımıdır)

(t anındaki ivme)  $\rightarrow$  **Ani ivme** :  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{ort} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow a = \frac{dv}{dt}$  (D.1.4)

(türetilmiş denklem)  $\rightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2}$  (D.1.5)

D.1.3 ve D.1.4 denklemleri tüm doğrusal hareketler için geçerlidir.

**Şimdiden aklımızda olsun:** Eğrisel harekette D.1.3 denklemi yine geçerli olmasına rağmen, D.1.4 denklemi teğetsel ivme ile hız arasında geçerlidir.



**Püf noktası-1** : Bu denklemlerde s: koordinattır ( $s=x$ ), yani referans noktasından olan uzaklıktır. (Dikkat... s.. alınan toplam yol değildir. s «konum» olarak isimlendirilir.)

Örneğin  $t=0$  anında 0 noktasında olan bir cisim  $t_1$  anına kadar 10 m ileri, 2 m geri gelirse konum değeri  $s=x=8m$  dir. Toplam alınan yol ise 12m dir.

**Örnek 1.1.1** ([video 1.1a-örnek1.1](#))

Bir çocuk uzaktan kumandalı oyuncak arabasını düz bir hatta (x eksenini üzerinde) ileri-geri hareket ettiriyor. Arabanın çocuğa göre konumu (x koordinatı) metre biriminden

$$s = \frac{t^3}{3} - 2.5t^2 + 4t - 22 \text{ olarak değiştiğine göre, hızın sıfır olduğu anda,}$$

- a-) arabanın x koordinatını,
- b-) Bu andaki arabanın ivmesini,
- c-) 8nci saniyede arabanın ilk konumundan ne kadar uzakta olduğunu,
- d-) 3sn – 5sn leri arasında arabanın toplam ne kadar yol aldığını hesaplayınız.

**Çözüm**

(D.1.3) denklemden bir t anındaki hız:  $v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 5t + 4$

(D.1.4) denklemden bir t anındaki ivme:  $a = \frac{dv}{dt} = 2t - 5$

Hızın sıfır olduğu anları bulalım:  $v = 0 = t^2 - 5t + 4 = 0$

$$\rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow t_1 = 1, t_2 = 4$$

(1nci ve 4ncü saniyelerde hız sıfır olur.)



**a-) Hızın sıfır olduğu anlarda x koordinatları (konumları)**

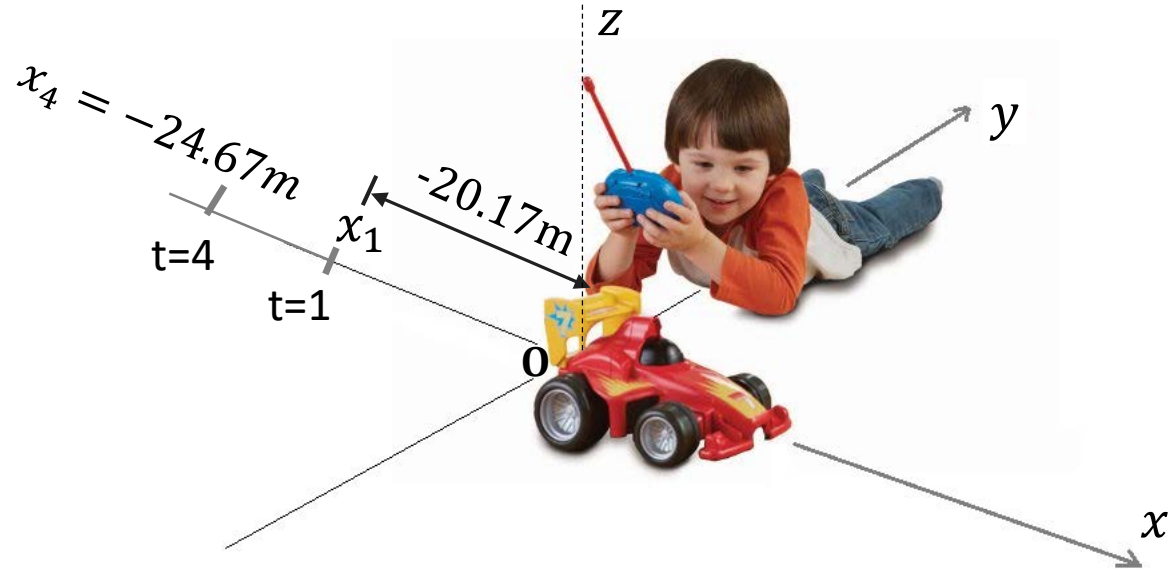
$$t_1 = 1 \text{ sn} \rightarrow s_1 = \frac{1^3}{3} - 2.5 \times 1^2 + 4 \times 1 - 22$$

$$\rightarrow s_1 = -20.17 \text{ m} = x_1$$

$$t_2 = 4 \text{ sn} \rightarrow s_4 = \frac{4^3}{3} - 2.5 \times 4^2 + 4 \times 4 - 22$$

$$\rightarrow s_4 = -24.67 \text{ m} = x_4$$

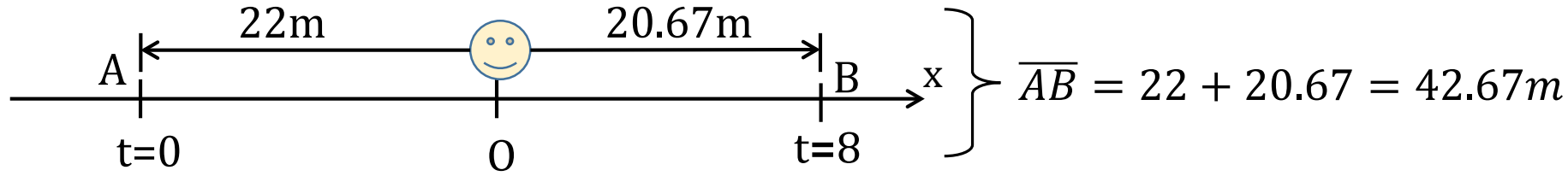
- $s = \frac{t^3}{3} - 2.5t^2 + 4t - 22$
- $v = t^2 - 5t + 4$
- $a = 2t - 5$



**b-) Bu anlardaki arabanın ivmesi:**

$$a = 2t - 5 \left\{ \begin{array}{l} t_1 = 1 \text{ sn} \rightarrow a_1 = 2 \times 1 - 5 = -3 \text{ m/s}^2 \\ t_2 = 4 \text{ sn} \rightarrow a_4 = 2 \times 4 - 5 = 3 \text{ m/s}^2 \end{array} \right.$$

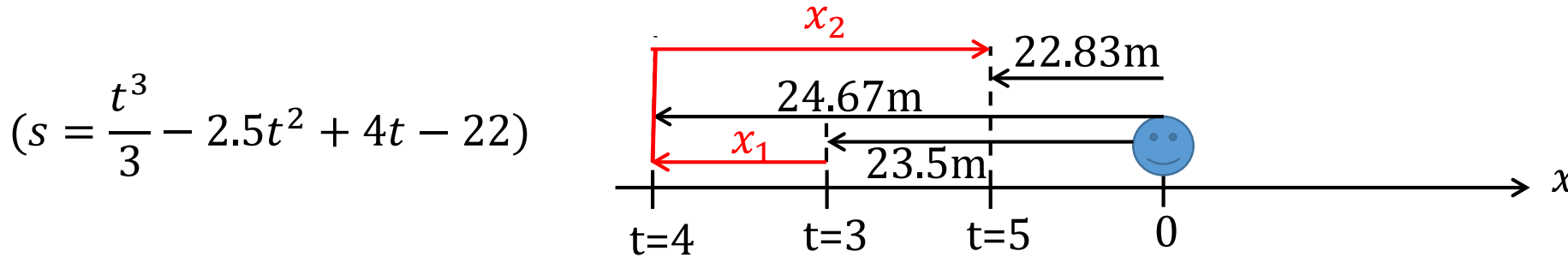
c-) 8nci saniyede arabanın ilk konumundan uzaklığı:  $\overline{AB} = ?$



- $s = \frac{t^3}{3} - 2.5t^2 + 4t - 22$
- $v = t^2 - 5t + 4$
- $a = 2t - 5$

$$s = \frac{t^3}{3} - 2.5t^2 + 4t - 22 \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 0 \rightarrow s = x = -22m \\ t = 8 \text{ sn} \rightarrow s = x = \frac{8^3}{3} - 2.5 \times 8^2 + 4 \times 8 - 22 = 20.67m \end{array} \right.$$

d-) 3sn - 5sn 'leri arasında arabanın toplam ne kadar yol aldığını hesaplayınız.



$$\begin{aligned} t = 3 \rightarrow s_3 &= \frac{3^3}{3} - 2.5 \times 3^2 + 4 \times 3 - 22 = -23.5m \\ t = 4 \rightarrow s_4 &= -24.67m \\ t = 5 \rightarrow s_5 &= -22.83m \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{3-5 sn arası toplam yol} \\ = |x_1| + |x_2| \\ = (24.67 - 23.5) + (24.67 - 22.83) = 3.01m \end{array} \right.$$

Not: 4. saniyede hız sıfır olduğundan bu saniyeden sonra geriye dönüş söz konusu olacaktır.

**Örnek 1.1.2**

Doğrusal Hareket yapan bir cismin ivmesi  $a = -2t + 3$  bağıntısına göre değişmektedir.  $t = 0$  anında cismin konumu  $s = 2m$  ve  $v = -4m/s$  ise  $t = 4.sn$  de anında  $a, v$  ve  $s$  değerlerini bulunuz?

**Çözüm:**  $a = -2t + 3 = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int dv = \int (-2t + 3)dt \rightarrow v = -t^2 + 3t + c_1$  ,  $t = 0 \rightarrow v = -4 = c_1$

$$\Rightarrow v = -t^2 + 3t - 4 = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int ds = \int (-t^2 + 3t - 4)dt \rightarrow s = -\frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 - 4t + c_2$$

$$t = 0 \rightarrow s = 2 = c_2 \rightarrow s = -\frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 - 4t + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -2x4 + 3 = -5 m/s^2 \\ v = -4^2 + 3x4 - 4 = -8 m/s \\ s = -\frac{4^3}{3} + \frac{3}{2}4^2 - 4x4 + 2 = -11.33m \end{array}$$

$t = 4.saniyede$

**Dikkat:** Herbir bölümün sonuna tüm bölüm konularıyla ilgili ayrıca **Cevaplı Sınav Soruları** koyulmuştur.

### Örnek 1.1.3 (\*)

Bir maddesel noktanın doğrusal hareketinde konumu  $s = t^3 - 9t^2 + 15t + 5$  bağıntısı ile tanımlanmıştır. Denklemden  $s$ : metre,  $t$ : saniyedir. a-) Hızın sıfır olduğu zamanı, b-) ivmenin sıfır olduğu andaki yeri (konumu) ve gidilen toplam yolu bulunuz. **Cevaplar** a-) 1.sn ve 5.sn , b-) 23metre

### 1.1.1 Doğrusal Harekette Özel Durumlar:

#### a-) Düzgün değişen doğrusal hareket(DDDH):

Bu durumda bir t anında hız ve ivme denklemleri: ivme sabittir  $\rightarrow a = a_0$

$$a = a_0 = \frac{dv}{dt} \rightarrow a_0 \int_0^t dt = \int_{v_0}^v dv \rightarrow a_0 t = v - v_0 \rightarrow v = v_0 + a_0 t \quad (\text{D.1.6})$$

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + a_0 t \rightarrow \int_{s_0}^s ds = v_0 \int_0^t dt + a_0 \int_0^t t dt \rightarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (\text{D.1.7})$$

Sabit ivmeli doğrusal hareket için **türetilmiş bir denklem** şu şekilde elde edilir:

Doğrusal hareket genel denklemlerinden:

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{v} \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} \rightarrow a = \frac{dv}{\frac{ds}{v}} \rightarrow \quad ads = vdv \quad (\text{D.1.8})$$

D.1.8 denklemi sabit ivme için yazarsak:  
( $a = a_0$ : sabit)

$$a_0 ds = vdv \rightarrow a_0 \int_{s_0}^s ds = \int_{v_0}^v vdv \rightarrow a_0(s - s_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

**Zamansız hız denklemi:**  $\rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0)$  (D.1.9)

(sabit ivmeli doğrusal hareket problemlerinde  $t$  zaman değişkenini işe katmadan pratik çözüm sağlayan bir denklemdir.)

- Dikkat: D.1.6, D.1.7 ve D.1.9 denklemlerinin sabit ivmeli doğrusal hareket için geçerli olduğu unutulmamalıdır.
- D.1.8 denklemi ise doğrusal hareketin tüm durumları için geçerli genel bir ifadedir.

**b-) Düzgün doğrusal hareket(DDH):**

ivme sıfırdır. (hız sabittir)  $\rightarrow a = a_0 = 0$

D.1.6 ve D.1.7 denklemlerinde  $a_0 = 0$  koyularak:

$$v = v_0 \quad (\text{D.1.10})$$

$$s = s_0 + v_0 t \quad (\text{D.1.11})$$

**Örnek 1.1.4** ([video 1.1b örnek 1.2](#))

$\nearrow$  saat  
 Düz bir otobonda 54km/h lik sabit hızla ilerlemekte olan bir otomobil, yol kenarındaki bir ağacın önünden geçtikten 10 saniye sonra bir benzinliğin girişine ulaşıyor. Benzinliğin yola cephesi 40m dir. Benzin alıp aynı otobana çıkan otomobil hızını düzgün olarak arttırıyor ve 12.5 saniyede 90 km/h hıza ulaşıyor ve bu hızla aynı yönde yoluna devam ediyor. Buna göre; benzinlikten çıktıktan 20 saniye sonra otomobil ağaçtan ne kadar uzaklaşmıştır? ( $\overline{AE} = ?$ )



**Çözüm:****A-B arası**

Düzgün Doğrusal Hareket,  
( $a=0, v$ :sabit)

$$v = v_{0_1} = 54 \text{ km/h}$$

$$= \frac{54 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ sn}} = 15 \text{ m/s}$$

(D.1.11 den):

$$s_1 = s_0 + v_0 t = 0 + 15 \times 10$$

$$\rightarrow s_1 = 150 \text{ m}$$

**C-D arası**

Düzgün Değişen Doğrusal Hareket,  
( $a = a_{0_3}$ :sbt)

$$v_D = \frac{90}{3.6} = 25 \text{ m/s}, \quad v_D = v_c + a_{0_3} t \quad (\text{D.1.6 dan})$$

$$a_{0_3} = \frac{v_D}{t} = \frac{25}{12.5} \rightarrow a_{0_3} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$(D.1.7 \text{ den}): \rightarrow s_3 = s_{0_3} + v_{0_3} t + \frac{1}{2} a_{0_3} t^2$$

$$s_3 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 2 \times 12.5^2 \rightarrow s_3 = 156.25 \text{ m}$$

**D-E arası**

Düzgün Doğrusal Hareket,  
( $a=0, v$ :sabit)

$$s_4 = s_{0_4} + v_{0_4} t = 0 + 25 \times 7.5$$

$$\rightarrow s_4 = 187.5 \text{ m}$$

$$AE = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

$$= 150 + 40 + 156.25 + 187.5$$

$$\rightarrow AE = 533.75 \text{ m}$$



**Örnek 1.1.5** [\(video 1.1b örnek 1.3\)](#)

6 metre yükseklikte bir balkonda buluna Ayşe elindeki topu düşey doğrultuda, yukarı doğru 5m/s hızla fırlatıyor ve elini geri çekiyor. Buna göre;

a-) Topun yere vurduğu andaki hızını ve geçen süreyi,

$$\rightarrow v_A = ?, t_A = ?$$

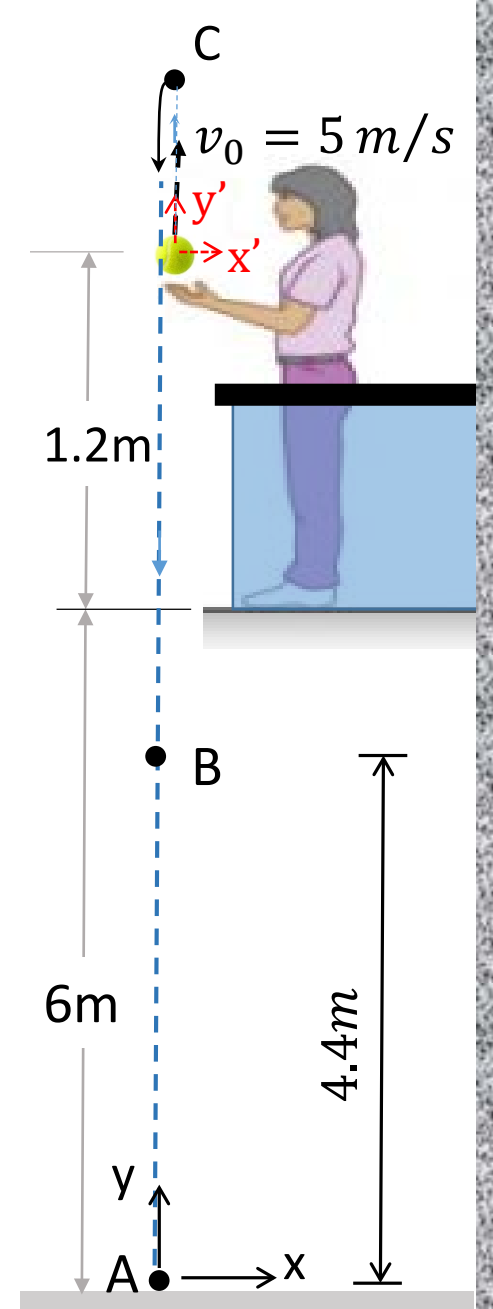
b-) yerden 4.4 metre yüksekten geçerken topun hızını,

$$\rightarrow v_B = ?$$

c-) Topun çıkacağı maksimum yüksekliği hesaplayınız.

$$\rightarrow h_{max} = ? = y_c = y_{max}$$

(Yerçekimi ivmesini yaklaşık  $10\text{m/s}^2$  alabilirsiniz.)



**Çözüm:**

Yerçekimi sabit ivmesi ile hareket olduğundan Düzgün değişen doğrusal harekettir.

$$(a = a_0 = g \cong -10 \text{ m/s}^2 : \text{sabit})$$

**a-)** Koordinat sistemi (x-y) topun yere vurduğu A noktasına yerleştirilirse:

Herhangi bir t anı için

$$\text{konum (yani y koordinatı): } s = y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 = y_0 + 5t - \frac{1}{2} 10 t^2$$

Topun ilk konumu atılma anındaki y koordinatıdır : ( $y_0 = 7.2 \text{ m}$ )

Yere vurduğu anda ise konumu sıfırdır: ( $y_A = 0$ )

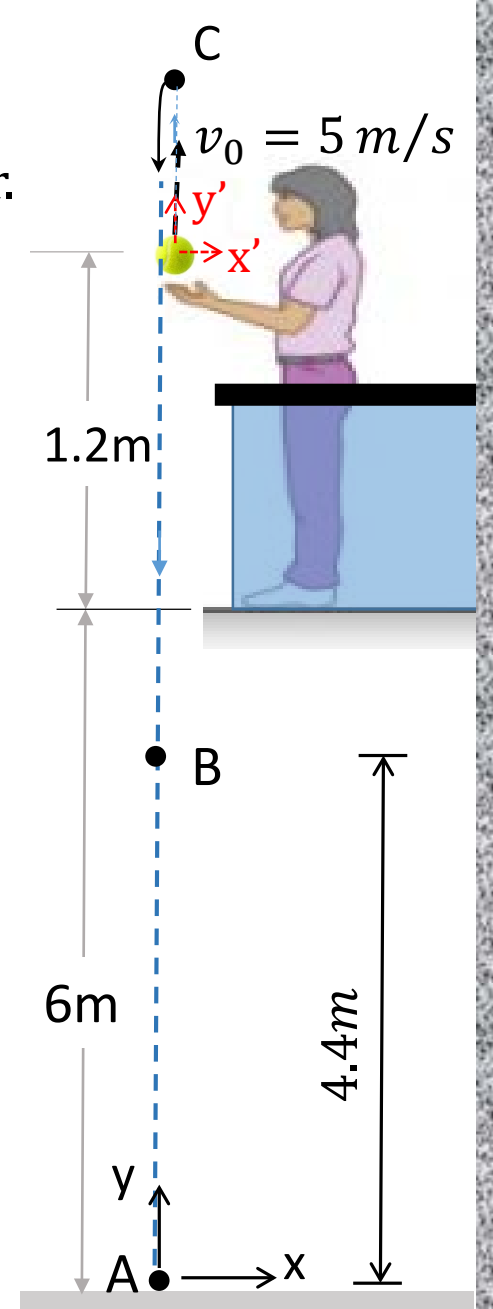
$$\rightarrow y_A = 7.2 + 5t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t^2 - 5t - 7.2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 5(-7.2)}}{2 \times 5} \rightarrow \begin{matrix} t_1 < 0 \\ t_2 = 1.8 \text{ sn} = t_A \end{matrix}$$

$$v_A = v_0 + a_0 t = v_0 + gt = 5 - 10 \times 1.8 \rightarrow v_A = -13 \text{ m/s}$$

Eksen takımı topun atıldığı ilk konumdaki x'-y' eksen takımı seçilseydi, sonuç değişmezdi.

$$\left. \begin{array}{l} \text{İlk konum: } y'_0 = 0 \\ \text{Son konum: } y'_A = -7.2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y' = y'_A = -7.2 = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow \\ -7.2 = 5t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 5t - 7.2 = 0 \text{ (aynı denklem)} \end{array}$$



**b-)** yerden 4.4 metre yüksekten geçerken topun hızının hesabı:

$$y_B = 4.4 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 7.2 + 5t - 5t^2$$

$$5t^2 - 5t - 2.8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - (4)(5)(-2.8)}}{(2)(5)} = \frac{5 \pm 9}{10} \rightarrow t = t_B = \frac{5 + 9}{10} = 1.4 \text{ sn}$$

$$v_B = v_0 - 10t_B = 5 - 10 \times 1.4 \rightarrow v_B = -9 \text{ m/s}$$

**c-)** Topun çıkacağı maksimum yüksekliğin hesabı:

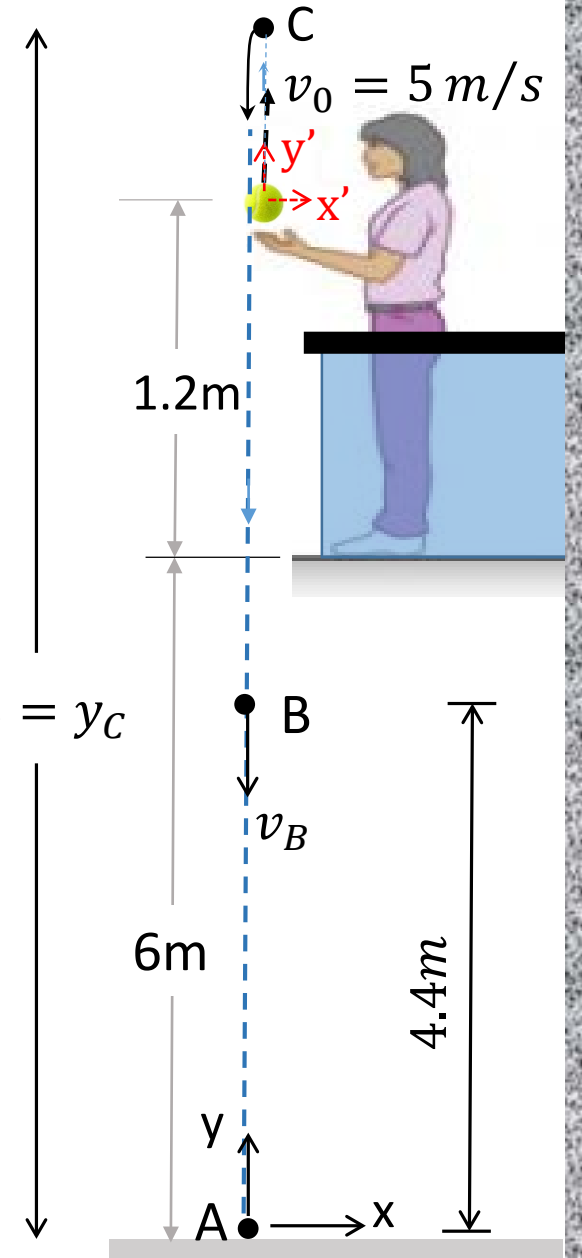
C tepe noktasındaki hız:  $v_C = 0$

$$v_C = 0 = v_0 + g t_C = v_0 - 10 t_C \rightarrow 0 = 5 - 10 t_C \rightarrow t_C = 0.5 \text{ sn}$$

$$y = y_C = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 7.2 + 5(0.5) - \frac{1}{2} (10)(0.5)^2$$

$$\rightarrow y_C = y_{\max} = h_{\max} = 8.45 \text{ m}$$

$$h_{\max} = y_{\max} = y_C$$



## 1.1.2 Doğrusal Harekette farklı fonksiyonel ifadelerle göre çözüm yolları:

$a = f(t)$  verilmişse

$$a = \frac{dv}{dt} = f(t)$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t f(t) dt \Rightarrow v(t) \text{ bulunur.}$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$\int_{s_0}^s ds = \int_{v_0}^v v(t) dt \Rightarrow s(t) \text{ bulunur.}$$

$a = f(s)$  verilmişse

$$(D.1.8 \text{ den}): v dv = a ds$$

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s f(s) ds$$

$$\Rightarrow v(s) \text{ bulunur.}$$

$$\int_0^t dt = \frac{ds}{v} = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)}$$

$$\Rightarrow s(t) \text{ bulunur.}$$

$a: f(v)$  verilmişse

$$f(v) = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} \Rightarrow v(t) \text{ bulunur.}$$

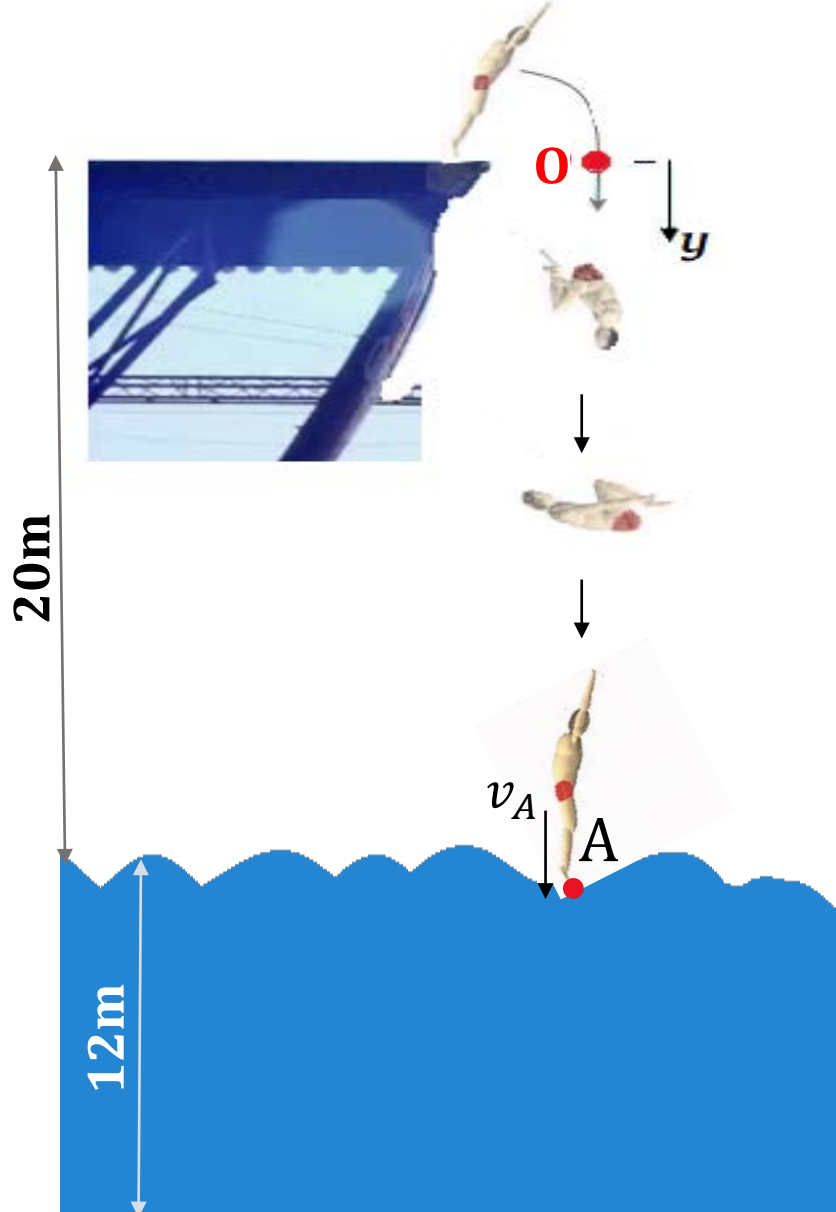
$$(D.1.8 \text{ den}): v dv = a ds \rightarrow a = \frac{v dv}{ds}$$

$$f(v) = v \frac{dv}{ds} \rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)} \Rightarrow s(v) \text{ bulunur.}$$

veya

$v(t)$  bulunmuştu.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v(t) dt \Rightarrow s(t) \text{ bulunur.}$$

**Örnek 1.1.6** ([video 1.1b](#) [örnek 1.4](#))

20 metre yüksekliğinde bir platformdan kendini serbest bırakan bir sporcu, düşey doğrusal yörünge üzerinde taklalar atıyor ve denize düşüyor. Deniz içinde ise  $a = -2v$  lik ivme ile dibe doğru ilerlemeye devam ediyor. ( $v$  : sporcunun deniz içindeki anlık hızı).

Denizin derinliği 12 metre olduğuna göre, sporcunun dibe çarpıp çarpmayacağını tespit ediniz. (Yerçekimi ivmesi:  $g=10\text{m/s}^2$  alınız. Sporcunun düşmeye platform seviyesinden ve A ile aynı hizadaki O noktasından başladığını kabul ediniz.)

**Çözüm:**

*+y aşağı yönde alınmıştır.*

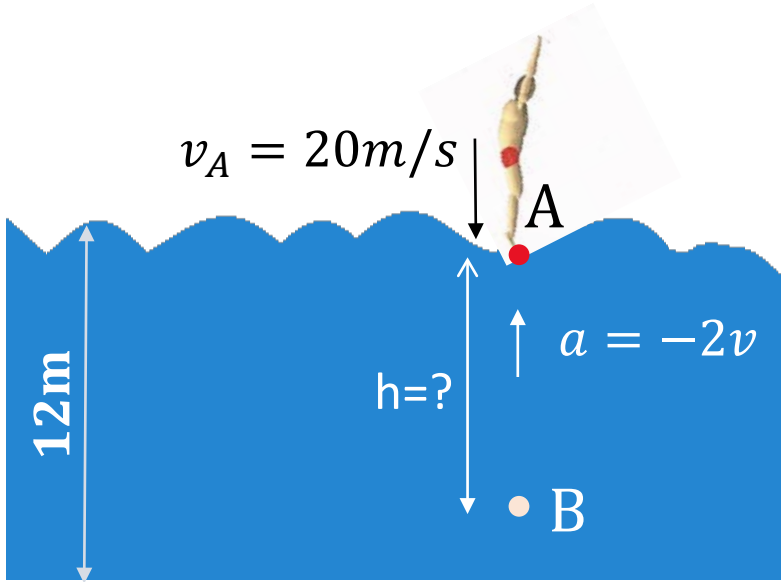
*(sabit ivmeli doğrusal hareket  $a = a_0 = g = +10\text{m/s}^2$ )*

OA arasında, DDDH → Düzgün Değişen Doğrusal Hareket

D.1.9 denkleminde zamansız hız formülünü kullanabiliriz:

$$v_A^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0)$$

$$v_A^2 = 0 + 2 \times 10 \times (20 - 0) = 400 \rightarrow v_A = 20 \text{ m/s} \text{ (Denize dalış hızı)}$$



Denizin içindeki hareket: (A-B arası)

(B: Denizde geldiği son nokta)

$$a = -2v = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v_A}^v \frac{dv}{v} = -2 \int_0^t dt$$

$$\rightarrow \ln v \Big|_{v_A}^v = -2t \Big|_0^t \rightarrow \ln \frac{v}{v_A} = -2t \rightarrow v = v_A e^{-2t} = \frac{ds}{dt}$$

$e^{-2t} = \frac{v}{v_A}$

$$\rightarrow \int_0^s ds = v_A \int_0^t e^{-2t} dt \rightarrow \int_0^s ds = v_A \int_0^t e^{-2t} dt \rightarrow s = -\frac{v_A}{2} e^{-2t} \Big|_0^t \rightarrow s = -\frac{v_A}{2} (e^{-2t} - e^0)$$

$$\rightarrow s = \frac{v_A}{2} (1 - e^{-2t}) \rightarrow s = \frac{v_A}{2} \left(1 - \frac{v}{v_A}\right) \left. \vphantom{s = \frac{v_A}{2} (1 - e^{-2t})} \right\} \begin{array}{l} \text{ulaşılan en alt nokta B' de:} \\ v = v_B = 0 \rightarrow s_B = \frac{v_A}{2} \left(1 - \frac{0}{v_A}\right) = \frac{20}{2} \left(1 - \frac{0}{20}\right) \end{array}$$

$$\rightarrow h = s_B = 10m$$

$h < 12m$  ..Dibe çarpmaz.

**Örnek 1.1.7**

Bir maddesel noktanın ivmesi  $a = 25 - 3s^2$  bağıntısı ile tanımlanmıştır. Denklemden  $a$  ivmesi  $m/s^2$  ve konum ( $s$ ) metre olarak alınacaktır. Maddesel nokta  $s = 0$  konumundan, ilk hızı olmadan harekete başlıyor; a-)  $s = 2m$  iken hızı, b-) Hızın tekrar sıfır olduğu konumu, c-) Hızın maksimum olduğu konumu bulunuz.

$$a = 25 - 3s^2$$

$$v dv = a ds$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^5 (25 - 3s^2) ds$$

$$\frac{v^2}{2} = 25s - s^3$$

$$v^2 = 2s(25 - s^2)$$

**a-)**  $s = 2 \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot (25 - 2^2)} \rightarrow v = 9.165 m/s$

**b-)**  $v^2 = 0 = 2s(25 - s^2) \rightarrow s = 0$  veya  $\rightarrow 25 - s^2 = 0 \rightarrow s = \pm 5m$

**c-)** (Bir eğrinin tepe noktasının eğimi sıfırdır)

$$v = v_{\max} \text{ ise } \frac{dv}{dt} = a = 0 \text{ olur.}$$

$$a = 25 - 3s^2 = 0 \rightarrow s = \pm 2.886m$$

**\*Cevaplı sınav soruları için bölüm 1'in sonuna bakınız.**

**Örnek 1.1.8 (\*)** (Makine Müh. 2014 yaz okulu-1.Vize sorusu)

Bir maddesel nokta doğrusal bir yörünge üzerinde  $a = \frac{5}{s}$  ivmesi ile hareket etmektedir. Burada “s” maddesel noktanın konumu olup birimi metre,  $a$  ivmesinin birimi ise  $\text{m/s}^2$  cinsindendir. Maddesel nokta  $s = 10$  m konumunda durmakta iken harekete başlamış olduğuna göre  $s = 20$  m olduğunda hızını bulunuz. ( **Cevap: 2.63m/s** )



### 1.1.3 Bağıl Hareket

Hareketli bir cismin dışarıdaki sabit bir referans noktasına göre hareketine mutlak hareket demiştik.

Hareketli iki cismin birbirlerine göre hareketine ise **bağıl hareket** denir.

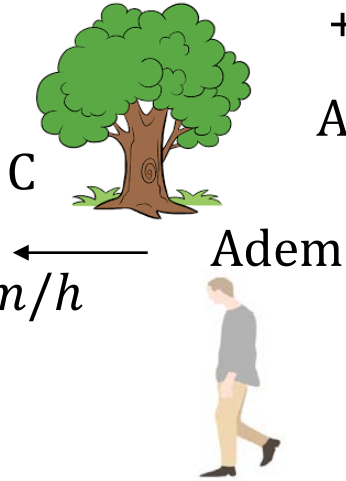
Hem doğrusal hem bundan sonra gösterilecek eğrisel hareket için bağıl hareket söz konusu olabilir.

**Bağıl Hız ve Bağıl İvme:** Hareketli iki cismin birbirlerine göre hız veya ivmeleridir.

Bağıl Hız, cisimlerin hız vektörlerinin farkı alınarak bulunur. Bağıl ivme de aynı şekilde bulunur.

Bunları 2 örnekle açıklayalım:

#### Örnek 1.1.9



+x yönünde 40km/saat hızla giden otomobilin yanındaki kaldırımdan

Adem isimli bir öğrenci -x yönünde 5km/saat hızla yürüyor.

Adem'in Mutlak Hızı:  $\vec{v}_A = -5\vec{i}$

Otomobilin Mutlak Hızı:  $\vec{v}_O = 40\vec{i}$

Dışarıdaki sabit C ağacına göre hızlar

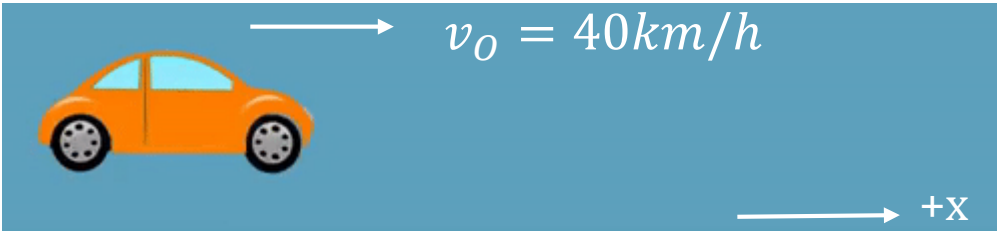
Adem'in Otomobile göre Bağıl Hızı:  $\vec{v}_{A/O}$

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_A - \vec{v}_O = -5\vec{i} - 40\vec{i} = -45\vec{i}$$

Otomobilin Adem'e göre Bağıl Hızı:  $\vec{v}_{O/A}$

$$\vec{v}_{O/A} = \vec{v}_O - \vec{v}_A = 40\vec{i} - (-5\vec{i}) = 45\vec{i}$$

Adem otomobile göre -x yönünde; otomobil ise Ademe göre + x yönünde aynı hızla uzaklaşır.



**Örnek 1.1.10 :** A ve B otomobillerinin sabit bir O noktasına göre bir t anında hız ve ivmeleri (mutlak hız ve mutlak ivmeleri) vektörel olarak veriliyor. B otomobilinin A otomobiline göre bağıl hız ve bağıl ivmesini hesaplayınız.

**Mutlak hızlar:**

$$\vec{v}_A = -50\vec{i} + 40\vec{j}$$

$$\vec{v}_B = 20\vec{i} + 30\vec{j}$$

**Mutlak ivmeler:**

$$\vec{a}_A = -10\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = -4\vec{i} - 6\vec{j}$$

**B'nin A'ye göre Bağıl hızı:**  $\vec{v}_{B/A} : ?$

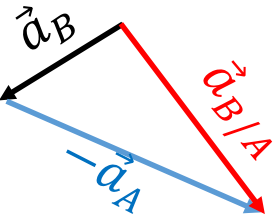
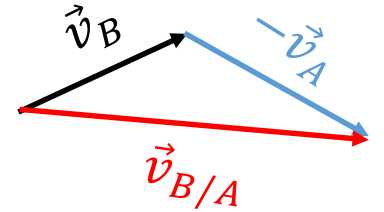
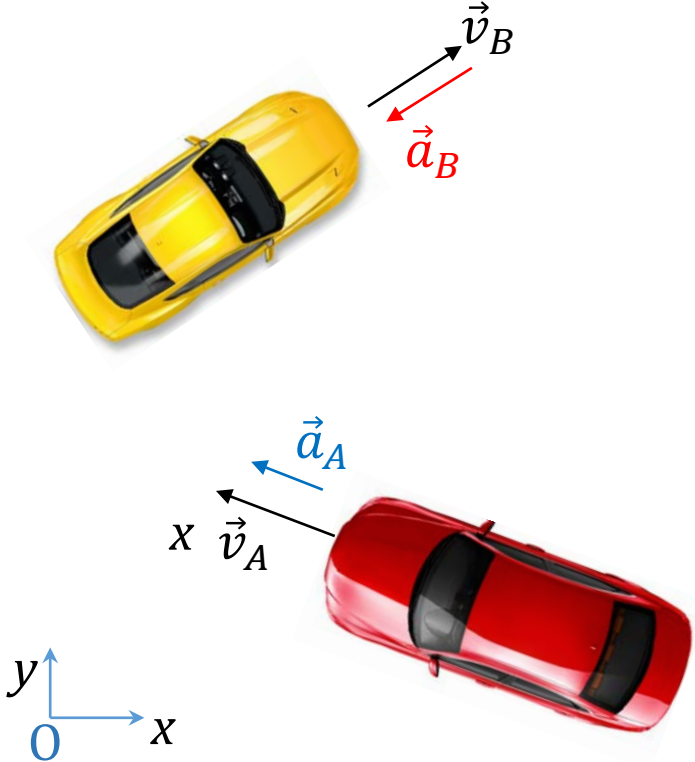
$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (20\vec{i} + 30\vec{j}) - (-50\vec{i} + 40\vec{j})$$

$$\rightarrow \vec{v}_{B/A} = 70\vec{i} - 10\vec{j}$$

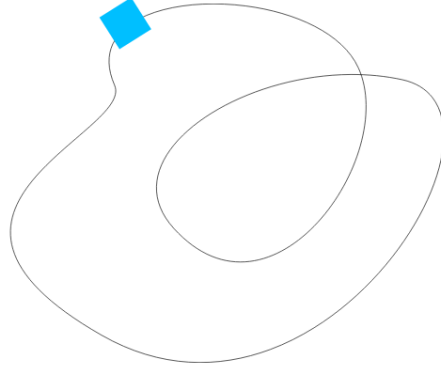
**B'nin A'ya göre Bağıl İvmesi:**  $\vec{a}_{B/A} : ?$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = (-4\vec{i} - 6\vec{j}) - (-10\vec{i} + 8\vec{j})$$

$$\rightarrow \vec{a}_{B/A} = 6\vec{i} - 14\vec{j}$$



*Not: Bağlı Hareket konusu Rijit Cisim Kinematiğinde de karşımıza çıkacaktır.*



## 1 . Maddesel Nokta Kinematiğı

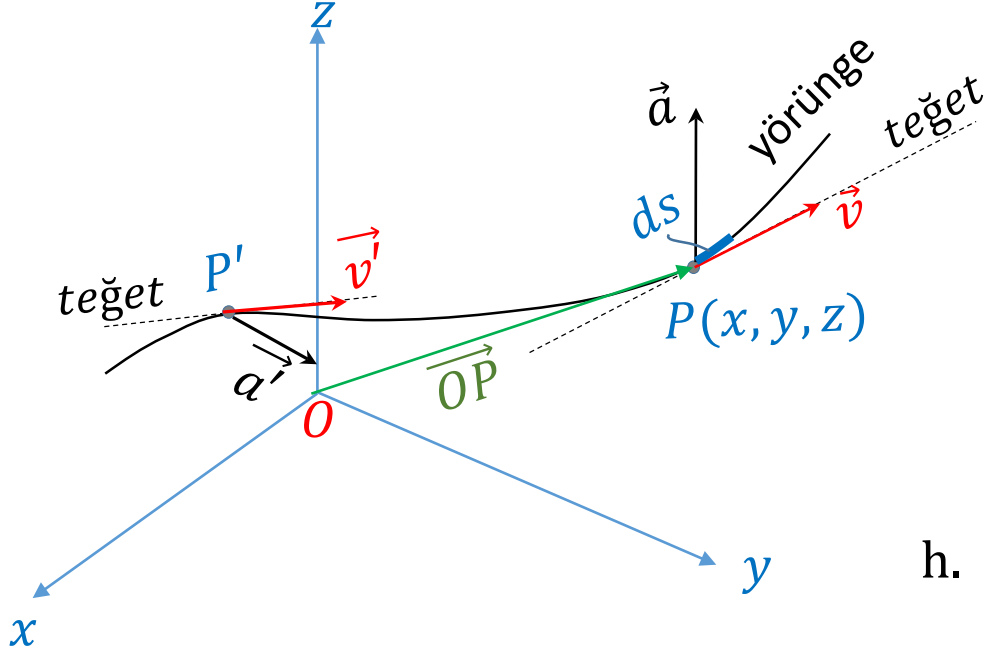
# 1.2 Eğrisel Hareket

*(Eğik Atış, Teğetsel-Normal Bileşenler, Kutupsal –Polar- Koordinatlar, Silindirik Koordinatlar,)*

### 1.2.1 Eğrisel Hareketin Başlıca Özellikleri :

- Maddesel noktanın yörüngesi bir eğridir.
- Amacımız hareketin herhangi bir  $t$  anında cismin hız, ivme ve konumunu belirlemektir.
- Bu amacımıza eğrisel hareketi farklı şekillerde inceleyerek ulaşacağız.

Bir  $t$  anında ;



- Hız ( $\vec{v}$ ) daima yörüngenin o noktadaki teğeti doğrultusundadır.

Konum vektörü

Hız vektörü

- 

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OP})}{dt} \quad (D.1.12)$$

- Hızın şiddeti:

$v \parallel ds$  olduğundan D.1.3 denklemi

eğrisel hareket için de geçerlidir:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (D.1.3)$$

- Bileşke ivme ( $\vec{a}$ ) ise herhangi bir yöndedir. D.1.4

denklemi vektörel terimler için geçerlidir:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (D.1.13)$$

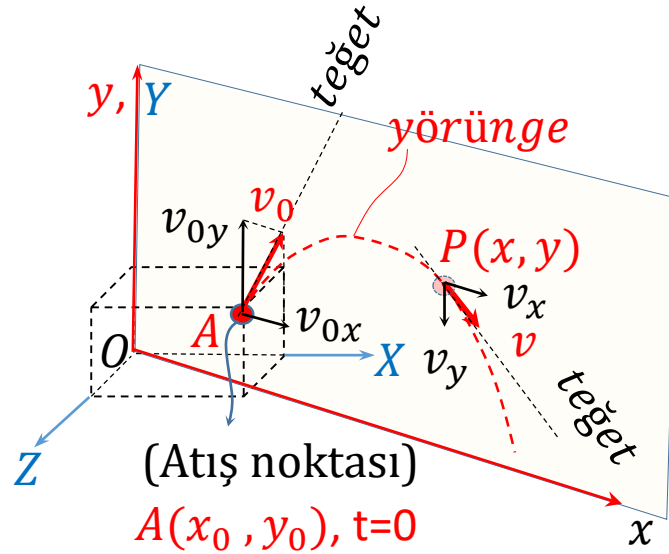
- Şimdiden belirtelim: Teğetsel ivme bileşeni ve hız birbirine her an paralel olduğundan ( $a_t \parallel v$  olduğundan) bunlar arasında skaler olarak D.1.4 denklemi yine geçerlidir:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (D.1.4)$$

Şimdi Eğrisel Hareketi farklı bakış açılarıyla inceleyeceğiz.... >>

## 1.2.2 Eğik Atış (Video 1.2.1)

Bir taşı bir başlangıç noktasından belli bir açı ile attığımızda, yörüngesinin eğrisel olduğunu görürüz. Bu harekete eğik atış deriz.

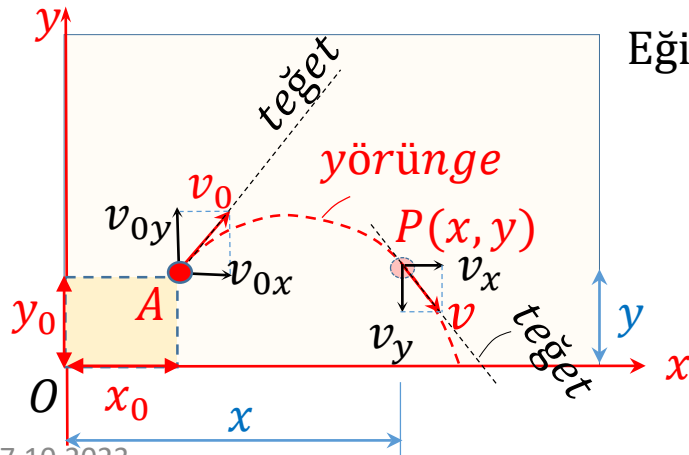


- X,Y,Z eksen takımına göre 3 boyutlu bir hareket olarak görülmesine rağmen, aslında Eğik atış hareketleri düzlemde bir harekettir. Cisim daima bir düzlemde (şekildeki x-y düzleminde) hareket eder ve problem bu düzlemde incelenir.
- Eğik atış problemlerinde rüzgar etkisi ihmal edilir.
- Eğik atışta sadece düşey yönde yerçekimi vardır.

### Bilinen Değerler

- Cismin ilk atış hızı bileşenleri :  $v_{0x}, v_{0y}$
- Atış noktasının koordinatları :  $x_0, y_0$

Bulmak istediklerimiz: Bir t anında (P noktasında) Cismin konumu  $(x, y)$  ve hız bileşenleri  $(v_x, v_y)$



Eğik atışı hareket düzlemi olan x-y düzleminde 2 doğrusal hareketin birleşimidir.

1. x ekseninde, DDH (Düzgün Doğrusal Hareket)  $a_x = 0$

$$v_x = v_{0x} \quad (D.1.14)$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \quad (D.1.15)$$

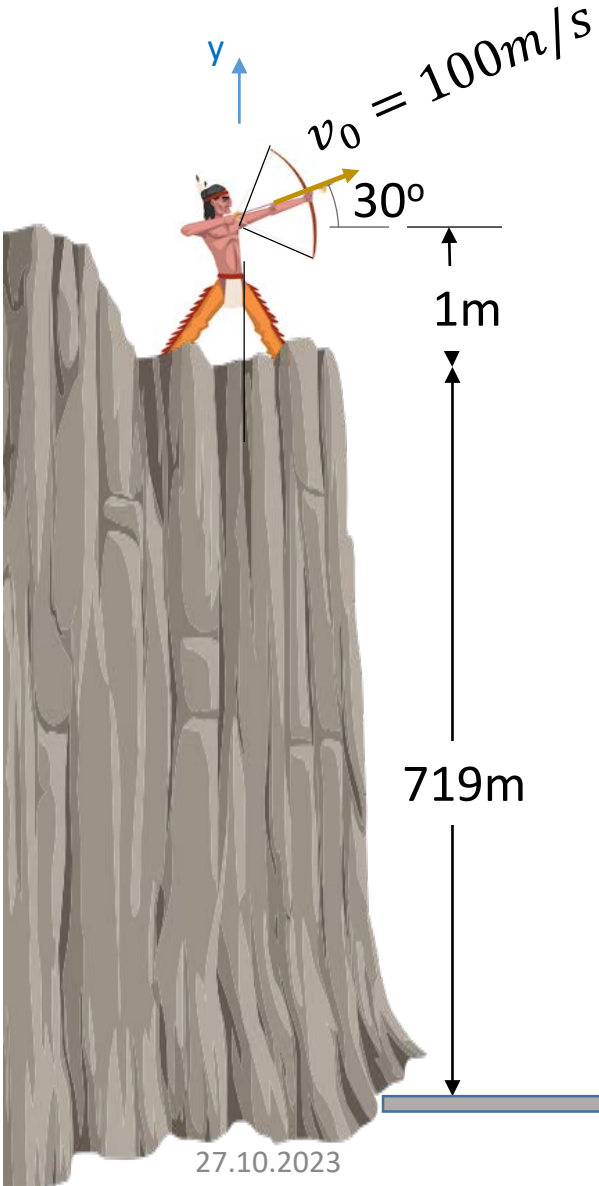
2. y ekseninde, DDDH (Düzgün Değişen Doğrusal Hareket)

$$v_y = v_{0y} + gt \quad (D.1.16)$$

$$a_y = g = \text{yerçekimi ivmesi: } -9.81 \text{ m/s}^2$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (D.1.17)$$

### Örnek 1.2.1 (video 1.2.1, - örnek 1.5)



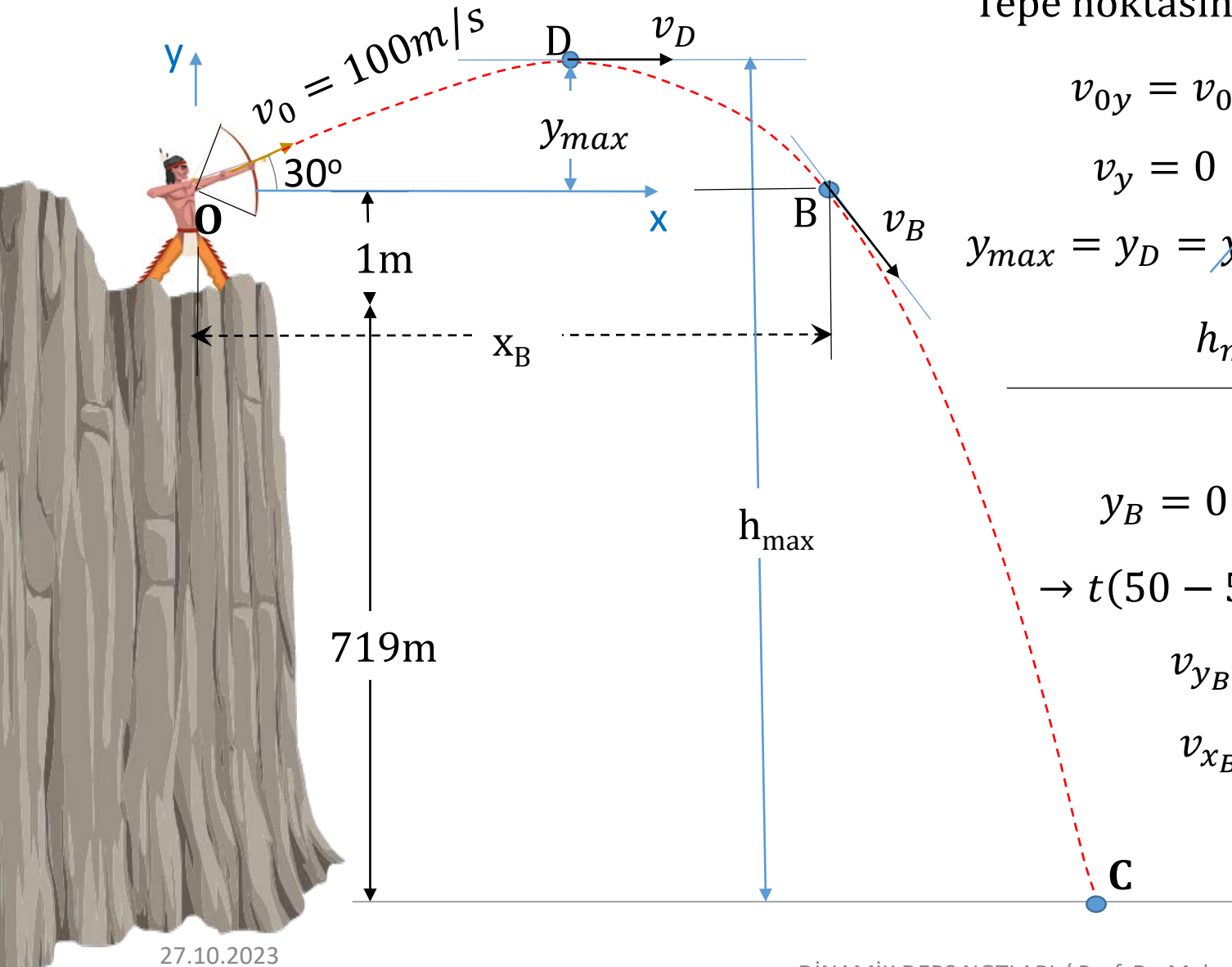
719m lik bir yamacın kenarındaki bir adam, elindeki oku  $30^\circ$  lik açı ile  $100 \text{ m/s}$  lik hızla fırlatıyor. Buna göre,

a-) Okun çıkacağı maksimum yüksekliği,

b-) Ok, ilk atıldığı noktanın hizasından geçerken hızını ve ok ile adam arasındaki mesafesini,

c-) Okun yere hangi hızla saplandığını ve adamlar arasındaki doğrusal mesafeyi hesaplayınız.

Çözümü diğer sayfada..>>

**Çözüm:**

27.10.2023

**a-)  $h_{\max} = ?$**

Tepe noktasında(D) hız yatay yöndedir:  $v_y = 0 = v_{0y} - gt$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin 30^\circ = 100 \sin 30^\circ = 50 \text{ m/s}$$

$$v_y = 0 = 50 - 10t \rightarrow t = 5 \text{ sn} = t_D$$

$$y_{\max} = y_D = y_0 + v_{0y}t_D - \frac{1}{2}gt_D^2 = 50 \times 5 - \frac{1}{2}10 \times 5^2 = 125 \text{ m}$$

$$h_{\max} = 719 + 1 + 125 \rightarrow h_{\max} = 845 \text{ m}$$

**b-)  $v_B = ?$ ,  $x_B = ?$**

$$y_B = 0 = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 50 \cdot t - \frac{1}{2}10t^2$$

$$\rightarrow t(50 - 5t) = 0 \rightarrow (50 - 5t) = 0 \rightarrow t = t_B = 10 \text{ sn}$$

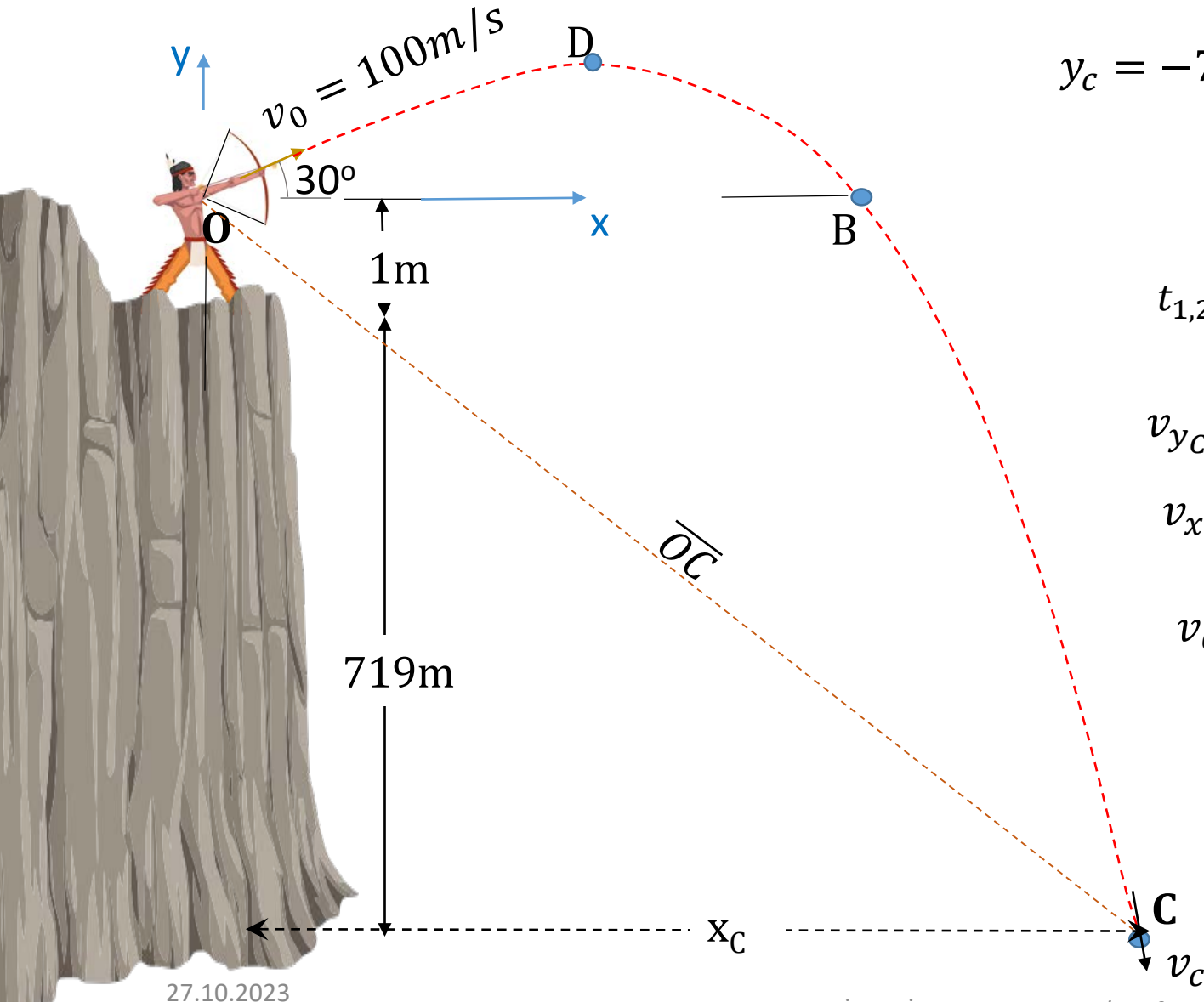
$$v_{y_B} = v_{0y} - gt_B = 50 - 10 \times 10 = -50 \text{ m/s}$$

$$v_{x_B} = v_{0x} = 100 \cos 30^\circ = 86.6 \text{ m/s}$$

$$v_B = \sqrt{v_{y_B}^2 + v_{x_B}^2} \rightarrow v_B = 100 \text{ m/s}$$

$$x_B = x_0 + v_{0x}t_B = 86.6 \times 10 \rightarrow x_B = 866 \text{ m}$$





c-)  $v_C = ?$  ,  $\overline{OC} = ?$

$$y_C = -720 = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 50t_C - \frac{1}{2}10t_C^2$$

$$5t^2 - 50t - 720 = 0$$

$$t_1 < 0$$

$$t_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \times 5 \times (-720)}}{2 \times 5} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} t_1 < 0 \\ t_2 = 18 = t_C \end{matrix}$$

$$v_{y_C} = v_{0y} - gt_C = 50 - 10 \times 18 = -130 \text{ m/s}$$

$$v_{x_C} = v_{0x} = 86.6 \text{ m/s}$$

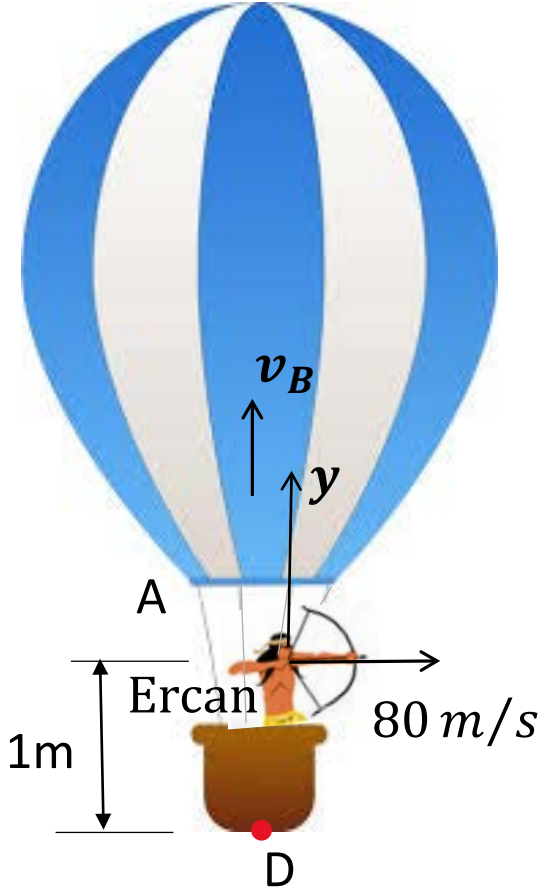
$$v_C = \sqrt{v_{y_C}^2 + v_{x_C}^2} \rightarrow v_C = 156.2 \text{ m/s}$$

$$x_C = x_0 + v_{0x}t_C = 0 + 86.6 \times 18 = 1558.8 \text{ m}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{x_C^2 + 720^2} = \sqrt{1558.8^2 + 720^2}$$

$$\rightarrow \overline{OC} \cong 1717 \text{ m}$$



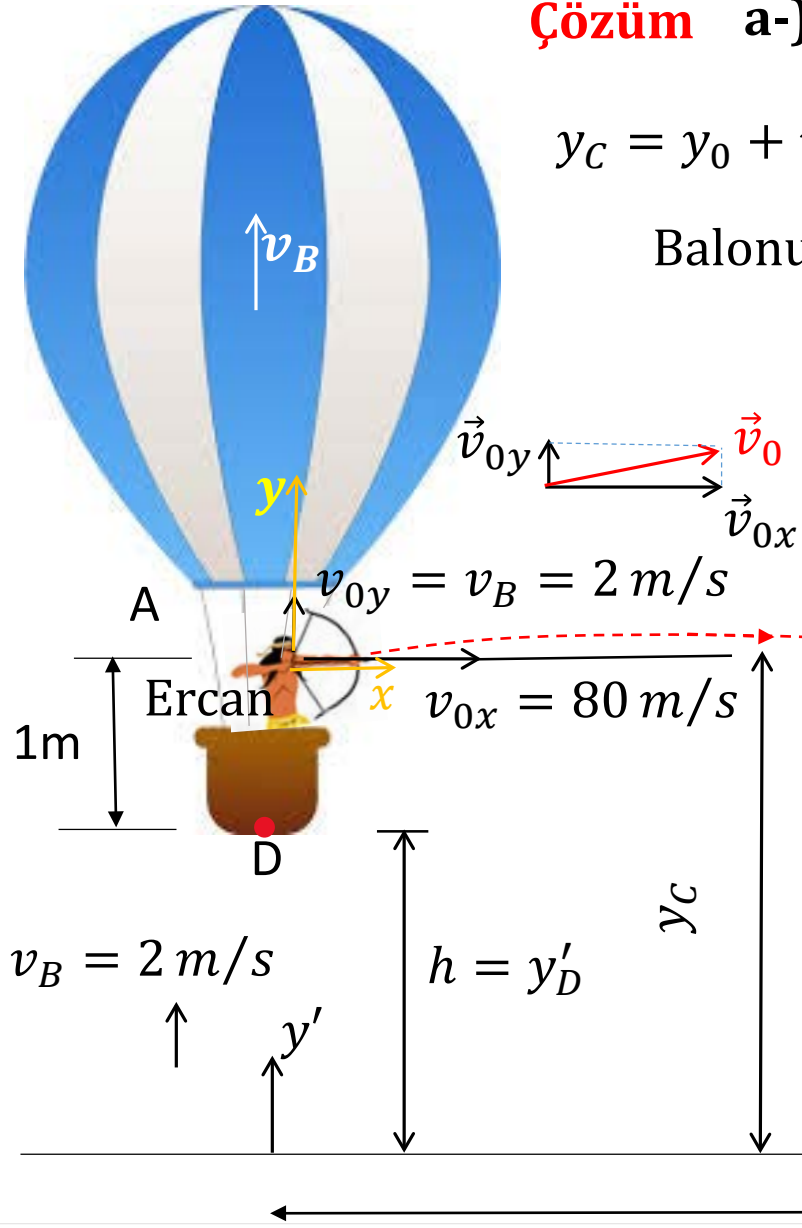


### Örnek 1.2.2 (video 1.2.1 - örnek 1.6)

Yukarı doğru  $2\text{ m/s}$  lik sabit hızla yükselmeye başlayan bir balonda bulunan Ercan, balona göre yatay doğrultuda bir ok fırlatarak  $240\text{ m}$  uzaklıktaki hedefi vurmak istiyor. Ercan, okun  $80\text{ m/s}$  hızla fırladığını daha önce ölçmüştür. Buna göre **a-)** okun hedefi vurabilmesi için, balonun harekete başlamasından kaç saniye sonra Ercan'ın oku fırlatması gerektiğini hesaplayınız. **b-)** Hedefi vurduğu anda, okun balona göre bağıl hızını bulunuz.  $g = 10\text{ m/s}^2$  alınız. Hedefin boyutlarını ihmal ediniz.



240m



**Çözüm a-)**  $x = 240 = x_0 + v_{0x} \cdot t_C = 0 + 80 \cdot t_C \rightarrow t_C = 3 \text{ m/s}$

$$y_C = y_0 + v_{0y} \cdot t_C - \frac{1}{2} g t_C^2 = 0 + 2 \times 3 - \frac{1}{2} 10 \times 3^2 \rightarrow y_C = -39 \text{ m} \rightarrow h = 39 - 1 = 38 \text{ m}$$

Balonun hareketi  $\rightarrow$  sabit hızla hareket  $h = 38 = y'_D = y'_0 + v_0 \cdot t = 0 + 2t_A$

$$\rightarrow t_A = 19 \text{ sn} = t_D$$

**b-)** Hedefin vurulduğu anda :  $v_{y_C} = v_{0y} - g t_C = 2 - 10 \times 3 = -28 \text{ m/s}$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{x_C} + \vec{v}_{y_C} \rightarrow \vec{v}_C = 80\vec{i} - 28\vec{j} \text{ (okun hızı)}$$

(balonun hızı)  $\rightarrow \vec{v}_B = 2\vec{j}$

(okun balona göre bağıl hızı)

$$\rightarrow \vec{v}_{C/B} = \vec{v}_C - \vec{v}_B$$

$$= 80\vec{i} - 28\vec{j} - 2\vec{j}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{C/B} = 80\vec{i} - 30\vec{j}$$

**Örnek 1.2.3**

Yerden 1500 m yükseklikte 1000 km/h sabit hız ile yere paralel uçmakta olan bir savaş uçağı A noktasından geçerken bir roket bırakmıştır. Roket yerdeki hedefe isabet etmiştir. Eğer roketin itme kuvveti ona yatay yönde  $0.5g$  lik bir ivme kazandırıyor ise hedef hattı ile yatay hat arasındaki  $\theta$  açısını hesaplayınız. ( $g$  : yerçekimi ivmesi:  $9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Çözüm:**

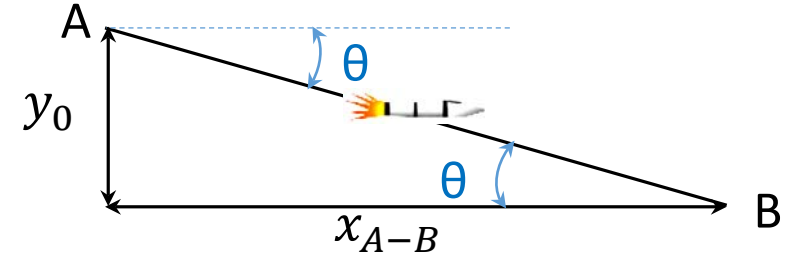
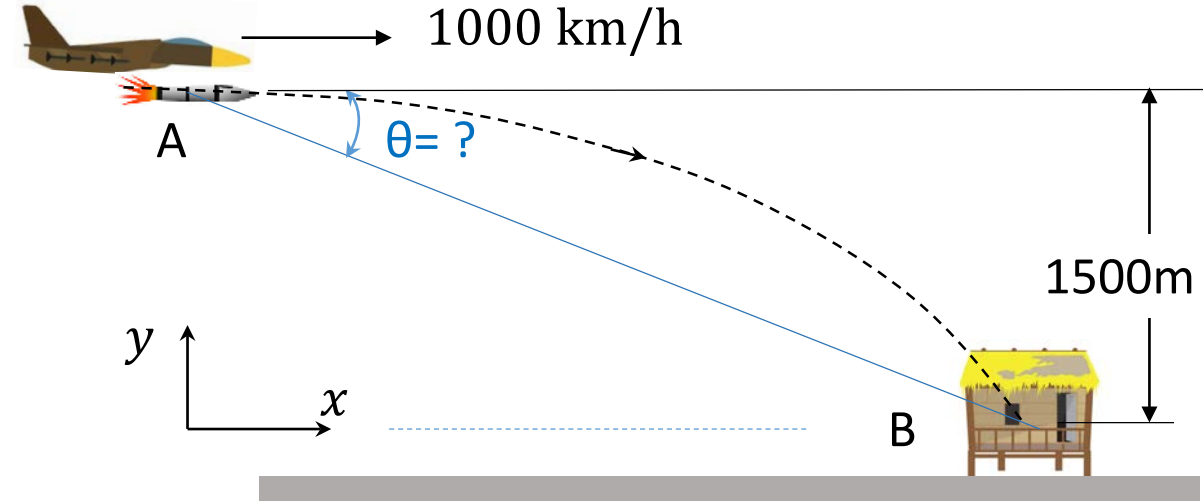
Roketin hedefi vurduğu andaki y koordinatı sıfırdır. Geçen süreyi hesaplarsak:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = 1500 - \frac{1}{2}9.81t^2 \rightarrow t = 17.49\text{s}$$

Roketin yatayda aldığı yol itme gücünden kaynaklı  $0.5g$  sabit ivme ile doğrusal hareketidir. (DDDH)

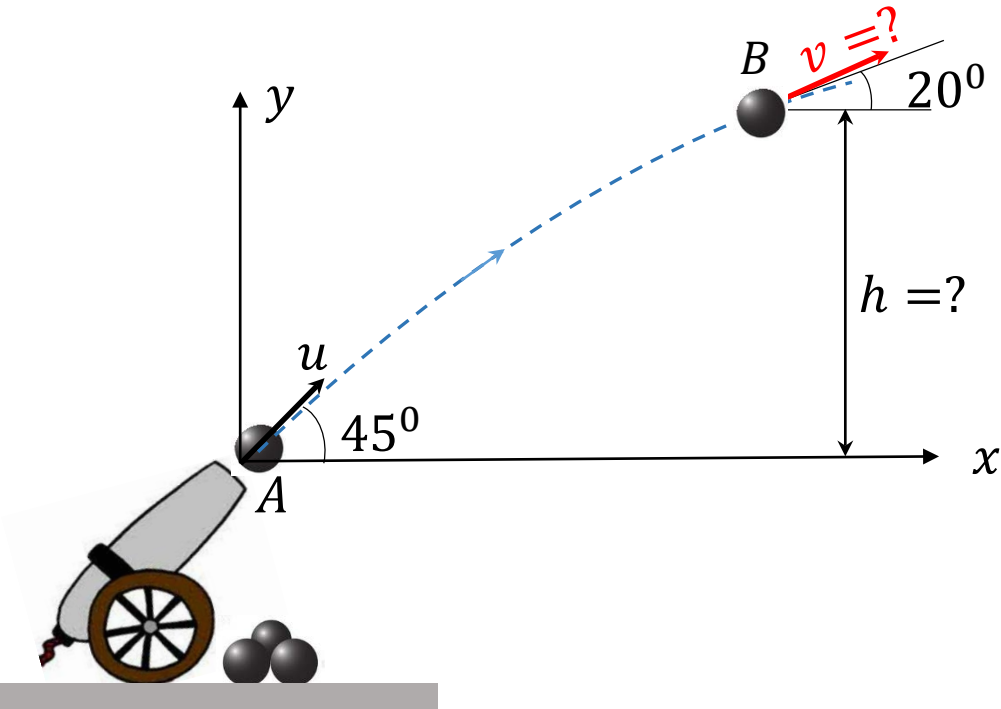
$$x_{A-B} = v_{ox}t + \frac{1}{2}a_xt^2 = \frac{1000}{3.6}17.49 + \frac{1}{2} \times 0.5 \times 9.81 \times (17.49)^2$$

$$\rightarrow x_{A-B} = 5608.55\text{m} \quad \rightarrow \tan \theta = \frac{y_0}{x_{A-B}} = \frac{1500}{5608.55} \quad \rightarrow \theta \cong 15^\circ$$



**Örnek 1.2.4 (\*)**

Şekilde gösterilen savaş topu,  $u = 450 \text{ km/h}$  lik ilk hızla bir mermi fırlatıyor. Merminin B noktasına varışına kadar geçen zamanı ve B noktasındaki yüksekliğini bulunuz. (Yerçekimi ivmesi  $g = 9.81 \text{ m/sn}^2$  alınacaktır.) **Cevap:**  $h=345.43\text{m}$



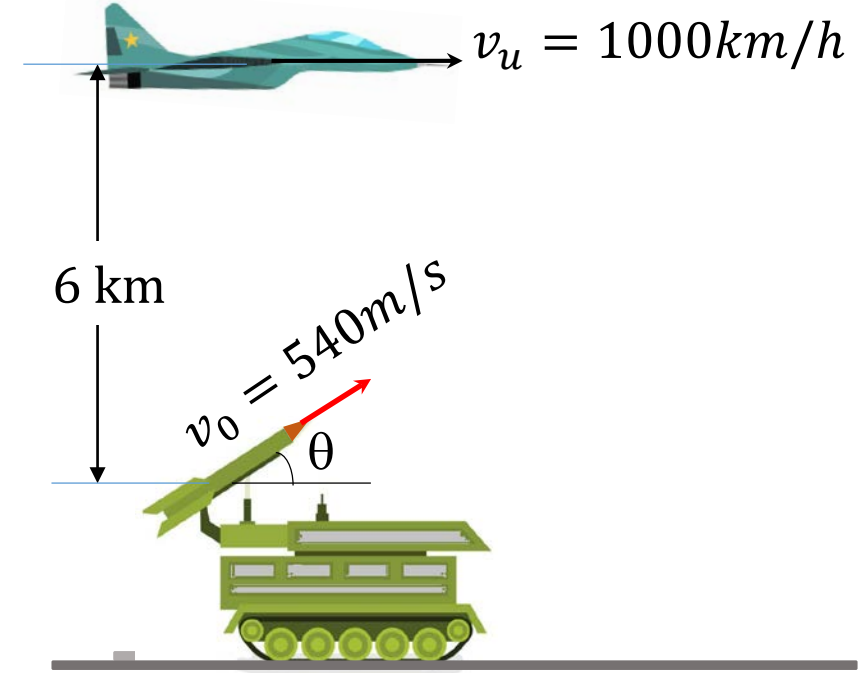
**Örnek 1.2.5 (\*)**

6 km irtifada yere paralel olacak şekilde 1000 km/h lik sabit hız ile uçmakta olan uçağa, bir uçaksavardan 540 m/sn lik ilk hızla ve  $\theta$  açısıyla bir mermi fırlatılacaktır. Ateşleme, uçağın tam uçaksavarın üzerine geldiği anda yapılacaktır. (Merminin kendisine ait bir itme gücü yoktur.) Buna göre,

a-) merminin tam isabetle uçağı vurması için ateşleme açısı  $\theta$  ne olmalıdır ?

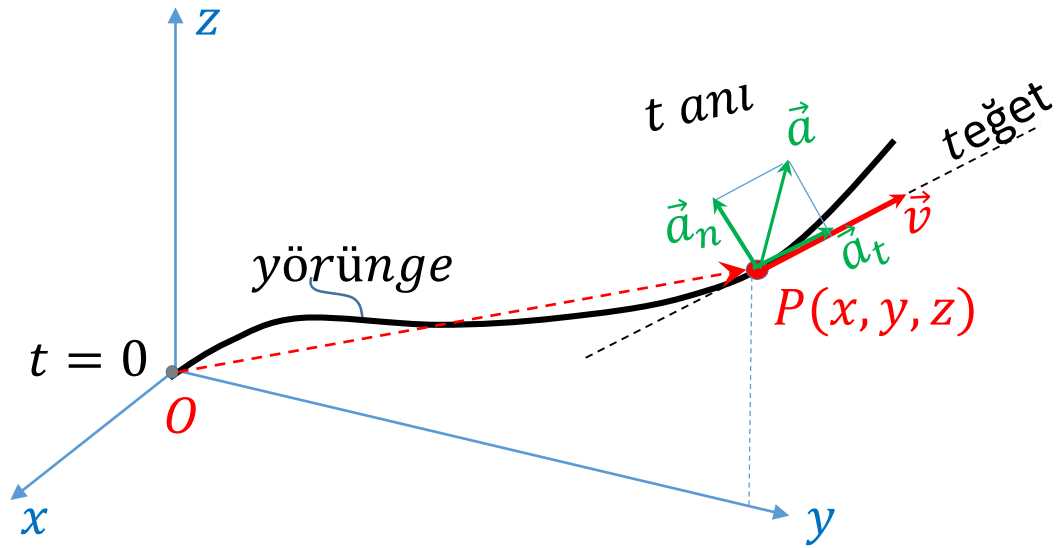
b-)Merminin uçağa isabet ettiği ana kadar geçen zamanı bulunuz.

**Cevaplar:** a-)  $\theta = 59^\circ$  ;  $t = 15.51\text{sn}$



### 1.2.3 Kartezyen Koordinatlar (x,y,z) ve Bileşenler : [\(video 1.2.3\)](#)

- Eğrisel hareket, x, y ve z doğrultularında 3 farklı doğrusal hareketin toplamı olarak düşünülür. Herbir eksen için, konum, hız ve ivme denklemleri diğer eksenlerdekinden bağımsızdır.
- Eğrisel hareket yapan bir cismin bir P noktasındaki konumu, hızı ve ivmesi x,y,z kartezyen koordinatlarına göre aşağıdaki gibi bulunur:



$x$  : konumun x koordinatı

$v_x = \dot{x}$  : x doğrultusundaki hız

$a_x = \ddot{x}$  : x doğrultusundaki ivme

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OP})}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $v_x$                        $v_y$                        $v_z$

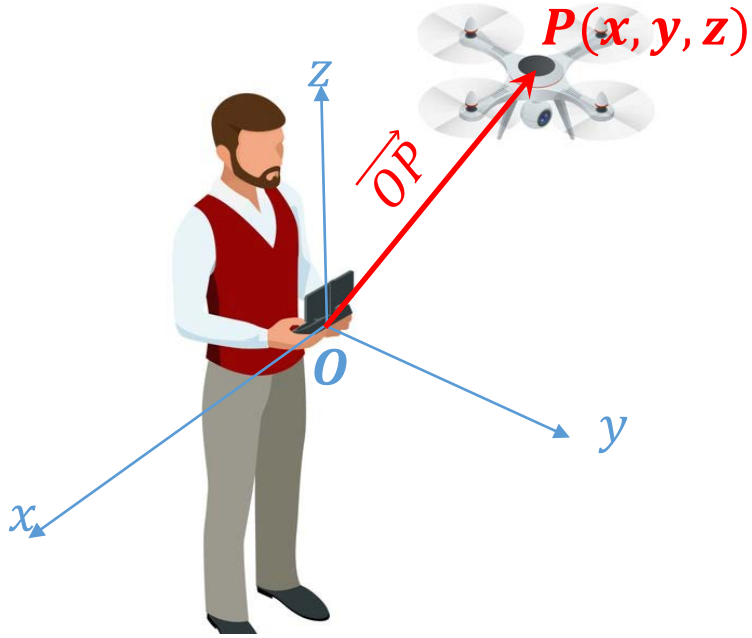
(D.1.18)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $a_x$                        $a_y$                        $a_z$

(D.1.19)

**Örnek 1.2. 6** [\(video 1.2.3 - örnek 1.8\)](#)

Bir duronun koordinatları, kumanda edildiği noktaya göre  $x = 3t^2 + 5$ ,  $y = 4t$ ,  $z = 2t^3$  şeklinde değişmektedir. Buna göre 2nci saniyede duronun kumanda noktasına uzaklığını, hızını ve ivmesini belirleyiniz.

**Çözüm:**

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow \vec{OP} = (3t^2 + 5)\vec{i} + 4t\vec{j} + 2t^3\vec{k}$$

$$t = 2\text{sn} \rightarrow \vec{OP} = (3 \times 2^2 + 5)\vec{i} + (4 \times 2)\vec{j} + (2 \times 2^3)\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{OP} = 17\vec{i} + 8\vec{j} + 16\vec{k} \rightarrow |\vec{OP}| = \sqrt{17^2 + 8^2 + 16^2} = 24.68\text{m}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \rightarrow \vec{v} = 6t\vec{i} + 4\vec{j} + 6t^2\vec{k}$$

$$t = 2\text{sn} \rightarrow \vec{v} = 6 \times 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6 \times 2^2\vec{k} \rightarrow \vec{v} = 12\vec{i} + 4\vec{j} + 24\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 24^2} = 27.13\text{ m/s}$$

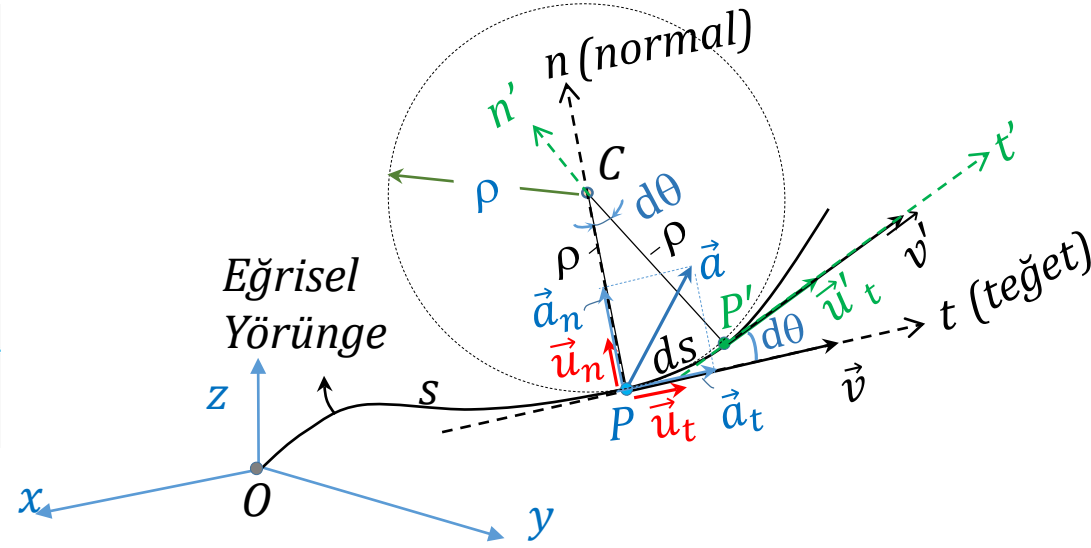
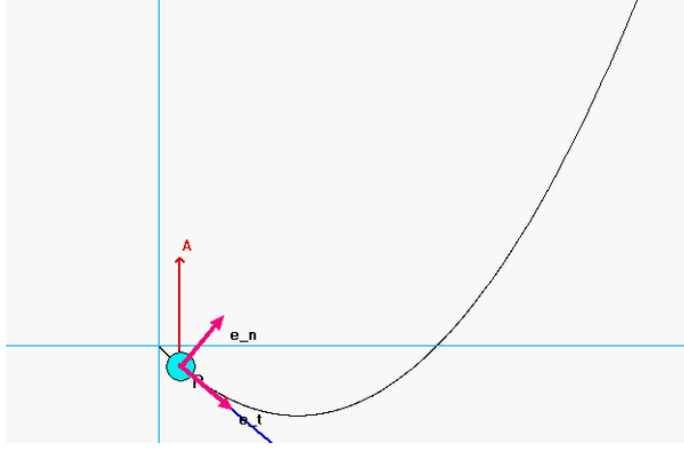
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = 6\vec{i} + 0\vec{j} + 12t\vec{k}$$

$$t = 2 \rightarrow \vec{a} = 6\vec{i} + (12 \times 2)\vec{k} \rightarrow \vec{a} = 6\vec{i} + 24\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 24^2} \cong 24.74\text{ m/s}^2$$

## 1.2.4 Yörüngesel denklemler ve Teğetsel-Normal Bileşenler: (Video 1.2.2)

- Eğrisel hareketi teğet ve teğete dik olan normal (t-n) yönleri inceleyebiliriz.



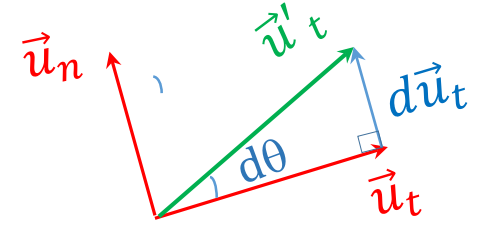
s: O referans noktasına olan yörüngesel uzaklık

P konumunda yörüngenin formu bir çember yayına benzetilir. C merkezli,  $\rho$  yarıçaplı bu çember ile yörüngenin teğeti çakışır. Diferansiyel ds yayının yörünge ile aynı C merkezli çember için çakıştığı kabul edilir.

Bir t anında hızın t (teğet) yönünde olduğunu biliyoruz. Bileşke ivmeyi teğetsel ve normal bileşenlerine ( $\vec{a}_t$ ;  $\vec{a}_n$ ) ayırabiliriz. Şimdi amacımız hız, ivme ve konum bileşenleri arasındaki bağıntıları çıkarmaktır:

Öncelikle t, n, ve t' yönlerindeki birim vektörlerin aralarındaki bağıntıları çıkaracağız:

Birim vektörler:



P' konumundaki birim vektör

$$\vec{u}'_t = \vec{u}_t + d\vec{u}_t$$

Birim vektörlerin şiddetleri 1 dir

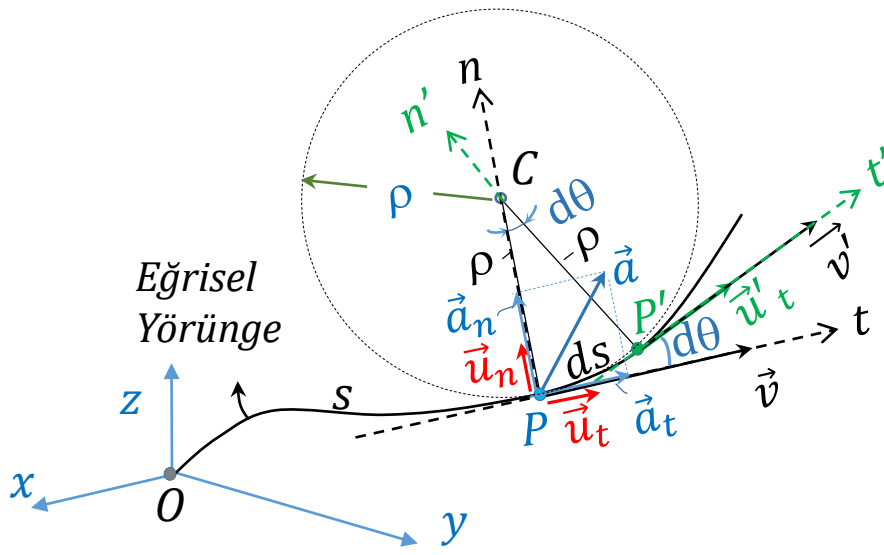
$$|\vec{u}_t| = u_t = 1$$

Buna göre;

$$|d\vec{u}_t| = du_t = u_t \cdot d\theta = 1 \cdot d\theta$$

$$\rightarrow du_t = d\theta$$





Dif. yay uzunluğu:  $\rightarrow ds = \rho d\theta$

$$\rightarrow d\theta = ds \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\rho} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{\rho}$$

$d\vec{u}_t // \vec{u}_n$  olduğundan:  $d\vec{u}_t = du_t \cdot \vec{u}_n = d\theta \vec{u}_n$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{\vec{u}}_t = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_n = \dot{\theta} \vec{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{u}_n \rightarrow \dot{\vec{u}}_t = \frac{v}{\rho} \vec{u}_n$$

### Anlık hız:

Anlık hız (v) teğet doğrultusunda ve her an s yörüngesi yönünde olduğundan, doğrusal hareketteki D.1.13 denklemi geçerlidir:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (D.1.13)$$

Hız vektörü ; hızın şiddeti ile birim vektörün çarpımına eşittir:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t \quad (D.1.20a)$$

### Anlık ivme ve bileşenleri:

Bileşke ivmenin yönü hızla çakışmaz. Bu durumda ivme ile hız arasında vektörel bağıntı:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (D.1.20b)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} = \dot{v} \vec{u}_t + v \dot{\vec{u}}_t = \dot{v} \vec{u}_t + v \frac{v}{\rho} \vec{u}_n = \dot{v} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$$

olduğundan:

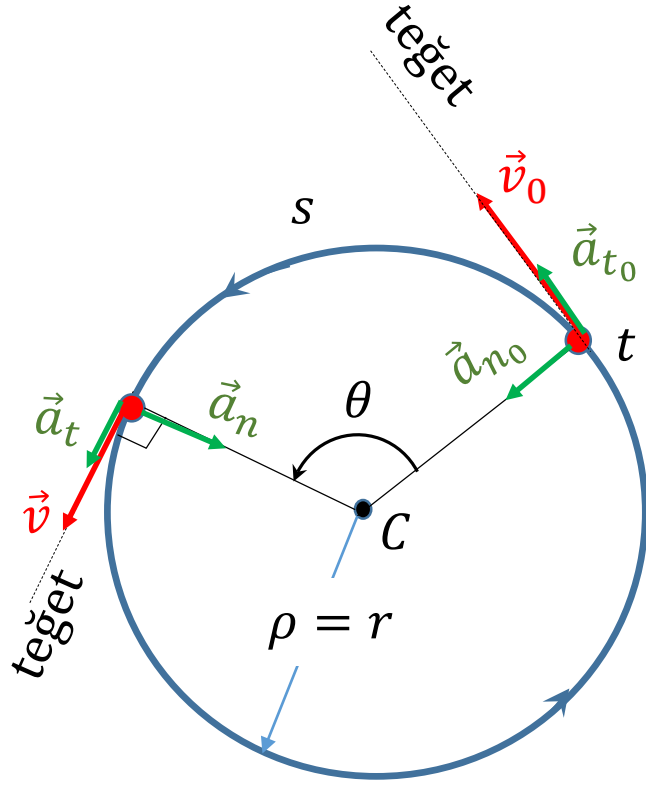
Anlık teğetsel ivme:  $a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad (D.1.21a)$

Anlık normal ivme:  $a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (D.1.21b)$

Üstteki denklemler, 2 veya 3 boyutlu eğrisel hareketler için geçerlidir.

Doğrusal hareketi, eğrisel hareketin özel halidir diye düşünebiliriz. Doğrusal harekette:  $\rho \rightarrow \infty$  ve dolayısıyla  $a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0$  ,  $a_t = a = \frac{dv}{dt}$

**1.2.4.1 Dairesel Hareket:** Eğrisel hareketin özel bir halidir. Yörünge  $r$  yarıçaplı bir çemberdir. Her bir  $t$  anı için eğrilik yarıçapı  $\rho=r$  : sabittir.



### Dairesel harekete özel tanımlar:

0-  $t$  süresince

- Gidilen mesafe (yörüngesel konum) :  $s$

- Gidilen toplam açı:  $\theta$

- Açısal Hız:  $\omega$

(Birim zamanda dönülen açıdır)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (rd/s) \quad (D.1.22)$$

- Açısal İvme:  $\alpha$

(Birim zamanda açısal hızdaki değişim)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (rd/s^2) \quad (D.1.23)$$

### Anlık hız ve ivme:

$$s = r \cdot \theta \quad \text{sabit}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

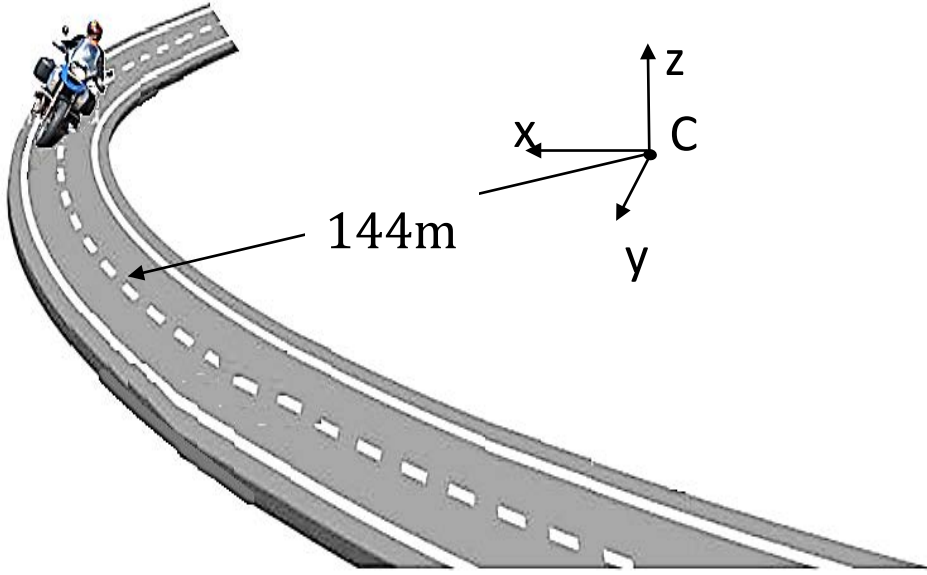
(anlık hız):  $v = r \cdot \omega \quad (D.1.24)$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

(teğetsel ivme):  $\rightarrow a_t = r \cdot \alpha \quad (D.1.25)$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 \omega^2}{r}$$

(normal ivme):  $\rightarrow a_n = \omega^2 \cdot r \quad (D.1.26)$

**Örnek 1.2.7** [\[video 1.2.2 - örnek 1.7\]](#)

Bir motosiklet yarıçapı 144m olan bir çembersel viraja 108km/h hızla giriyor ve hızını saniyede 3m/s ile düzgün olarak azaltıyor. Buna göre, viraja girdikten 2 saniye sonra motosikletin toplam ivmesini ve virajın eğrilik merkezine (C noktasına) göre koordinatlarını hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$v_A = \frac{108}{3.6} = 30 \text{ m/s}$$

$$a_t = -3 \text{ m/s}^2 = a_{tB} = a_{tA}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a_t dt$$

$$\int_{v_A}^v dv = \int_0^t a_t dt \rightarrow \int_{30}^v dv = -3 \int_0^t dt$$

$$\rightarrow v = 30 - 3t \rightarrow v_B = 30 - 3 \times 2 = 24 \text{ m/s}$$

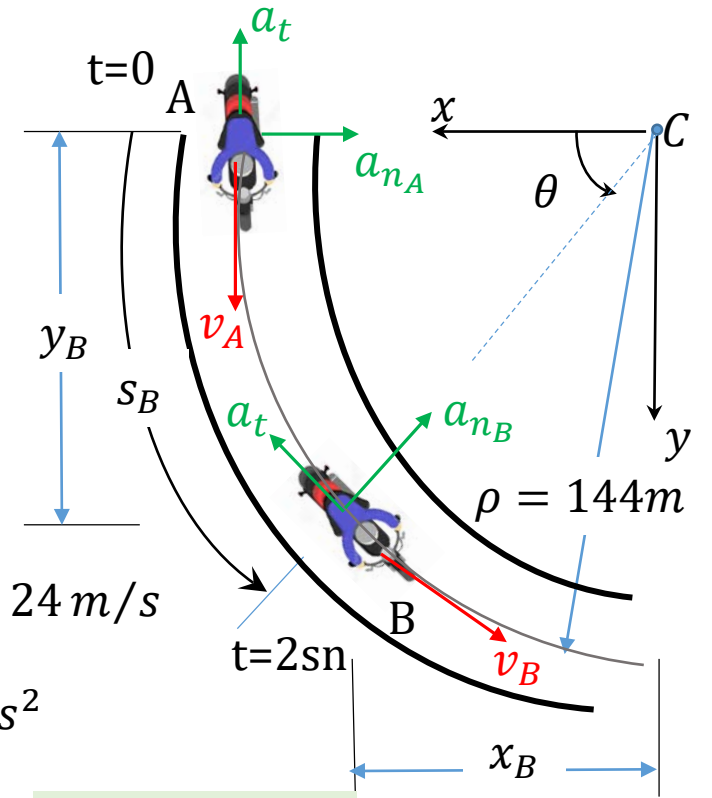
$$a_{nB} = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{24^2}{144} \rightarrow a_{nB} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow a_B = \sqrt{a_{tB}^2 + a_{nB}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \rightarrow a_B = 5 \text{ m/s}^2$$

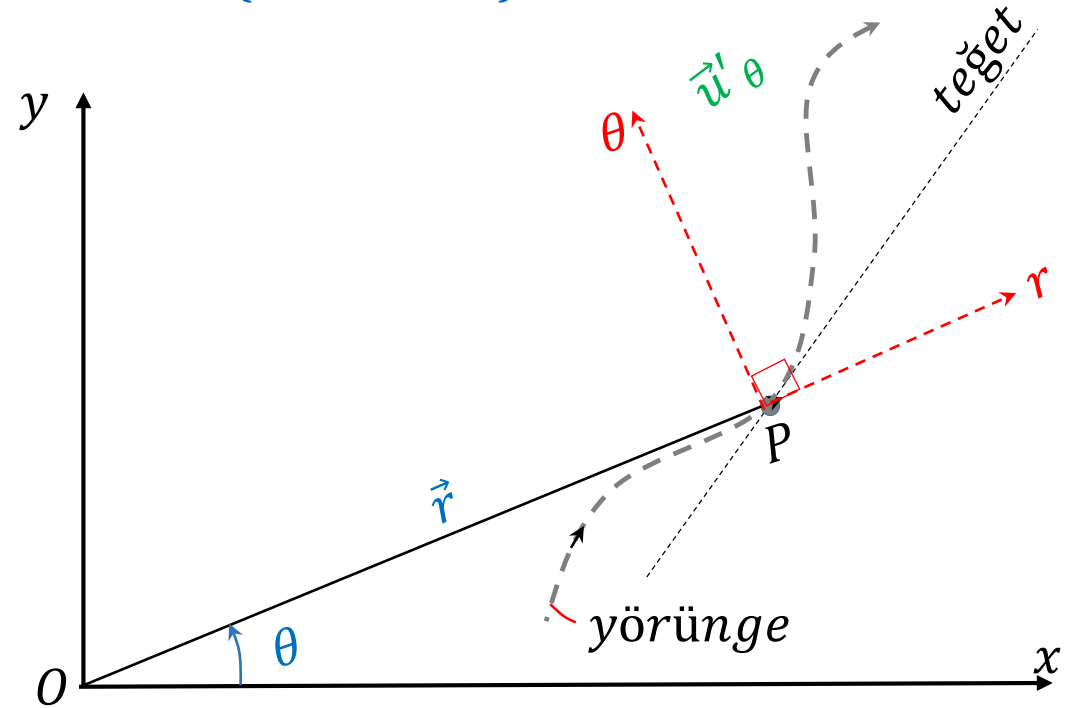
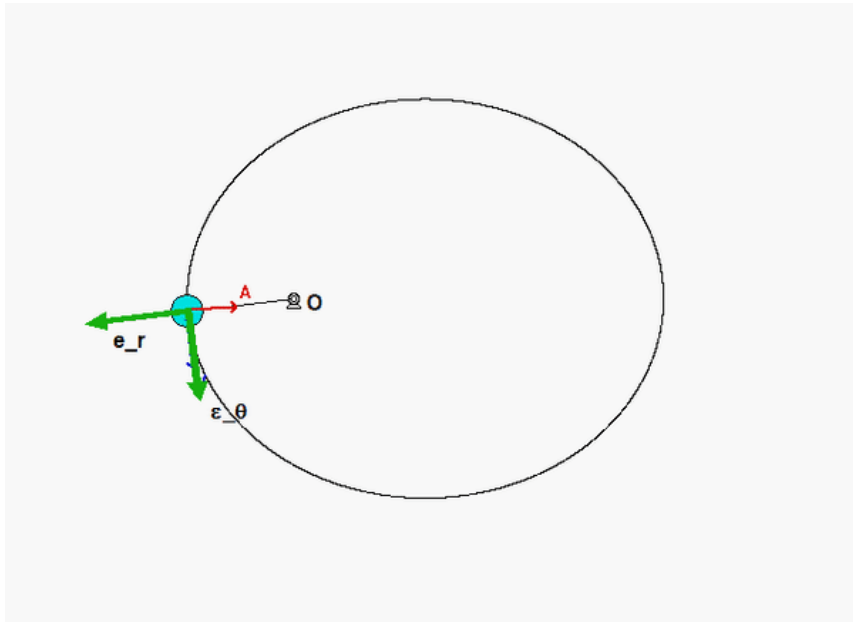
$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t (30 - 3t) dt \rightarrow s = (30t - \frac{3}{2}t^2)$$

$$\rightarrow s_B = \left( 30 \times 2 - \frac{3}{2} 2^2 \right) = 54 \text{ m} = \rho \cdot \theta = 144 \cdot \theta \rightarrow \theta = \frac{54}{144} = 0.375 \text{ rd}$$

$$\rightarrow \theta = 0.375 \times \frac{180}{\pi} \cong 21.5^\circ \quad \left. \begin{array}{l} x_B = 144 \cdot \cos(21.5^\circ) \rightarrow x_B = 133.98 \text{ m} \\ y_B = 144 \cdot \sin(21.5^\circ) \rightarrow y_B = 52.77 \text{ m} \end{array} \right\}$$



## 1.2.5 Kutupsal (Polar) Koordinatlarda Eğrisel Hareket: [\(video 1.2.4 a\)](#)

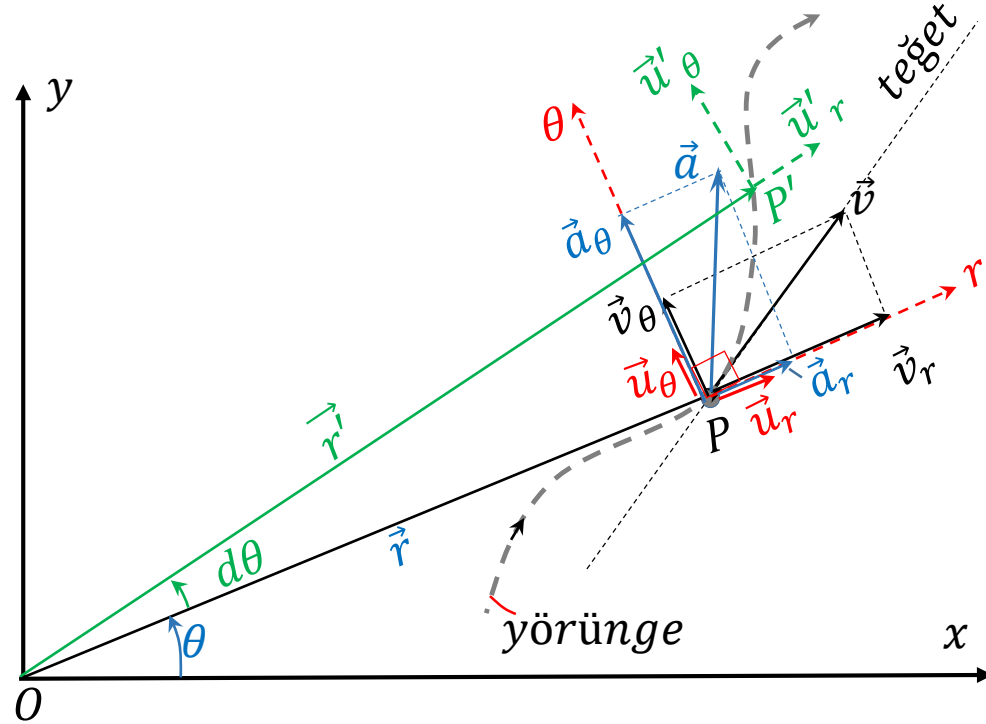


İncelenen t anında, (P noktasında):

- P noktasına r ve  $\theta$  eksenleri yerleştirilir.
- + r eksenini OP doğrultusundadır.
- + $\theta$  eksenini, r ekseninden saat ibreleri tersi yönünde  $90^\circ$  dönülerek elde edilir.
- + $\theta$  açısı sağ el kaidesine göre başparmağımız +z yönünü gösterecek şekilde olmalıdır.
- Bu eksen takımı için saat ibreleri tersi yönündedir.

Düzlemde eğrisel hareket yapan bir cismin t anında P noktasındaki konumu, hızı ve ivmesini bu sefer r -  $\theta$  kutupsal koordinatlara veya başka bir ifadeyle polar koordinatlara göre belirleyeceğiz.

## 1.2.5 Kutupsal (Polar) Koordinatlarda Eğrisel Hareket:



Öncelikle  $r$  ve  $\theta$  eksenlerindeki birim vektörler arasındaki ilişkileri önce çıkaracağız:

P konumundan  $d\theta$  kadar ilerlendiğinde gelinen P' konumunda birim vektörler:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}'_r &= \vec{u}_r + d\vec{u}_r \\ \vec{u}'_\theta &= \vec{u}_\theta + d\vec{u}_\theta \end{aligned} \right\}$$

Birim vektörlerin şiddetleri 1'dir:  $|\vec{u}_r| = u_r = 1$  ,  $|\vec{u}_\theta| = u_\theta = 1$

Dif. birim vektörlerin şiddeti:

(yarıçap x merkez açı = yay uzunluğu denklemine benzeterek)

$$|d\vec{u}_r| = du_r = u_r \cdot d\theta = 1 \cdot d\theta \rightarrow du_r = d\theta$$

$$|d\vec{u}_\theta| = du_\theta = u_\theta \cdot d\theta = 1 \cdot d\theta \rightarrow du_\theta = d\theta$$

$$d\vec{u}_r // \vec{u}_\theta \rightarrow d\vec{u}_r = du_r \cdot \vec{u}_\theta \rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \dot{\vec{u}}_r$$

$$d\vec{u}_\theta // (-\vec{u}_r) \rightarrow d\vec{u}_\theta = -du_\theta \cdot \vec{u}_r \rightarrow \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r = -\dot{\theta} \vec{u}_r = \dot{\vec{u}}_\theta$$

t anındaki konum,  $\vec{r}$  konum vektörünün bilinmesi ile bellidir:  $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$

$$\text{Anlık hız vektörü: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \cdot \vec{u}_r)}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\vec{u}}_r = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta \text{ olduğundan,}$$

**anlık hız bileşenleri:**

$$v_r = \dot{r} \quad (\text{D.1.27})$$

$$v_\theta = r \dot{\theta} \quad (\text{D.1.28})$$

$$\text{Anlık ivme vektörü: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)}{dt}$$

$$= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\vec{u}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{u}}_\theta$$

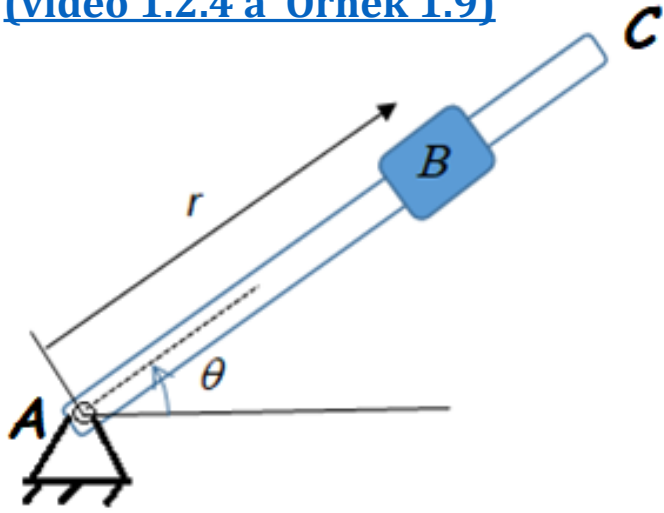
$$= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{u}_r)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$$

**anlık ivme bileşenleri:**

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (\text{D.1.29})$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} \quad (\text{D.1.30})$$

**Örnek 1.2.8**[\(video 1.2.4 a Örnek 1.9\)](#)

Yeterince uzun bir AC kolu üzerinde, B bileziği serbestçe kayabilmektedir. B bileziğinin bir t anındaki konumu  $r = 2t^2 - 2t + 20$ ,  $\theta = 0.2t^2$  denklemleri ile tanımlanmaktadır. Buna göre,  $\theta = 120^\circ$  iken, bileziğin hız ve ivmesini hesaplayınız.

27.10.2023

**Çözüm:**

$$r = 2t^2 - 2t + 20$$

$$\theta = 0.2t^2$$

$$\dot{r} = 4t - 2$$

$$\dot{\theta} = 0.4t$$

$$\ddot{r} = 4$$

$$\ddot{\theta} = 0.4$$

$$\theta = 120^\circ = \frac{\pi \times 120}{180} = 2.094 \text{ rad}$$

$$2.094 = 0.2t^2 \rightarrow t = 3.23 \text{ sn}$$

$$r = 2 \times 3.23^2 - 2 \times 3.23 + 20 \rightarrow r = 34.4 \text{ cm}$$

$$\dot{r} = 4 \times 3.23 - 2 = 10.92$$

(D.1.27-1.30 denklemlerinden)

$$\rightarrow v_r = \dot{r} = 10.92 \text{ cm/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 34.4 \times (0.4 \times 3.23) \rightarrow v_\theta = 44.4 \text{ cm/s}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

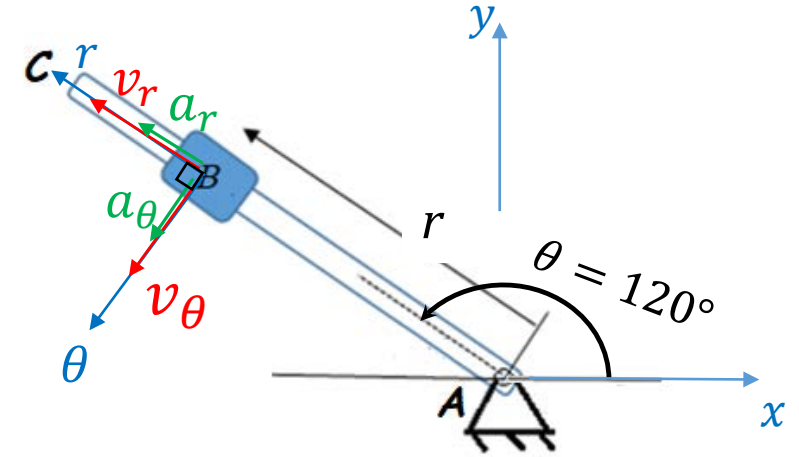
$$\rightarrow v = 45.72 \text{ cm/s}$$

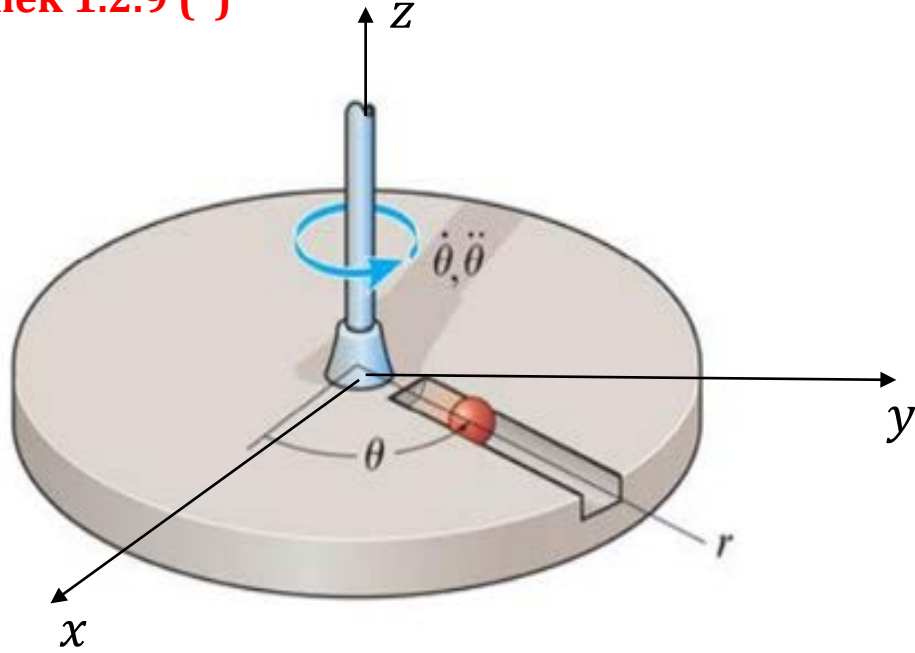
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 4 - 34.4 \times (0.4 \times 3.23)^2 \rightarrow a_r = -53.24 \text{ cm/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 34.4 \times 0.4 + 2 \times 10.92 \times (0.4 \times 3.23) \rightarrow a_\theta = 41.97 \text{ cm/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$\rightarrow a = 67.79 \text{ cm/s}^2$$



**Örnek 1.2.9 (\*)**

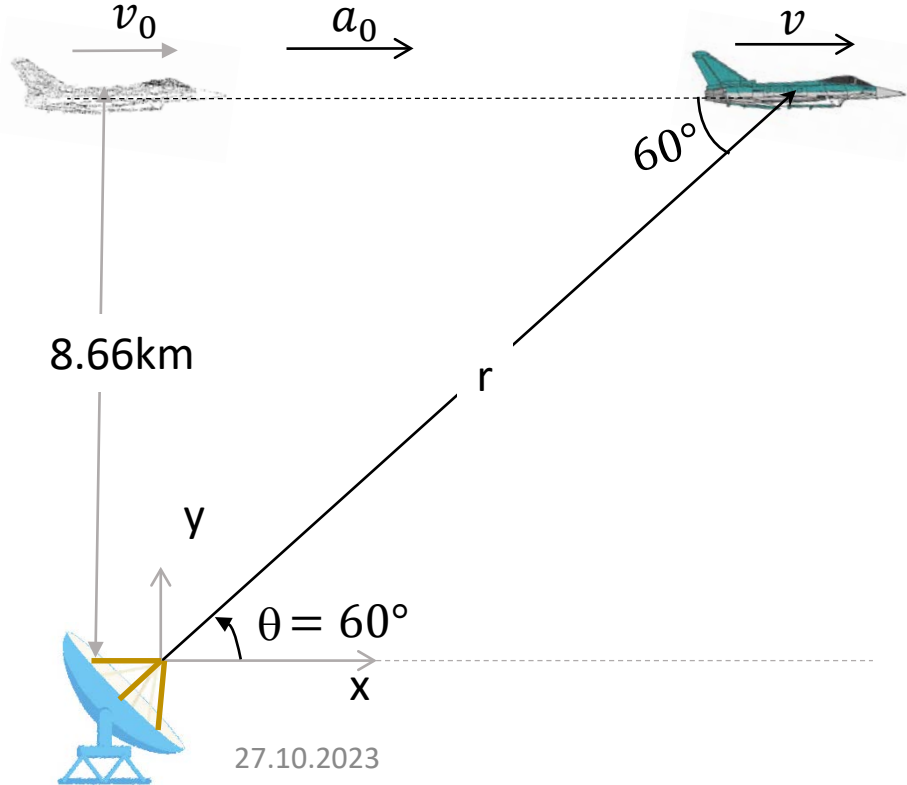
Şekildeki disk düşey z eksenini etrafında üstten bakışta saat ibreleri tersi yönünde  $\theta = 4t^{3/2}$  olacak şekilde döndürülürken, diskin üzerine açılmış kanaldaki bilye kanala göre  $r = 0.1t^3$  ile denkleminle kanal içinde yuvarlanmaktadır.  $t = 1.5\text{sn}$  anında bilyenin mutlak hız ve mutlak ivmesini hesaplayınız. ( t: saniye, r: metre birimindedir.)

**Cevap:**  $v = 2.57 \text{ m/s}$  ;  $a = 20.4 \text{ m/s}^2$



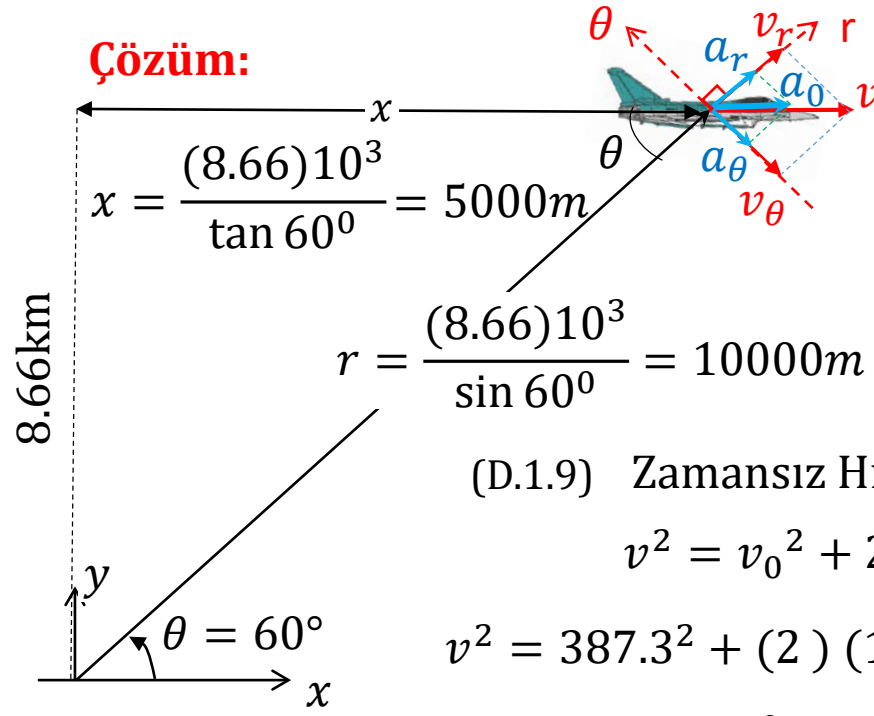
### Örnek 1.2.10 (video 1.2.4 a Örnek 1.10)

Bir jet, 8.66 km irtifada, doğrusal bir yörüngede 1394.2km/h lik bir hızla uçarken, yerdeki bir radarın tam üzerinden geçiyor. Bu andan itibaren radar jeti izlemeye başlıyor ve jet de hızını saniyede 36km/h olacak şekilde arttırıyor. Buna göre radar +x eksenine açısı  $60^\circ$  olduğunda, Jetin kutupsal koordinatlarının zamana göre ikinci türevlerini hesaplayınız. ( $\ddot{r}=?$ ,  $\ddot{\theta}=?$ )



27.10.2023

### Çözüm:



$$x = \frac{(8.66)10^3}{\tan 60^\circ} = 5000m$$

$$r = \frac{(8.66)10^3}{\sin 60^\circ} = 10000m$$

(D.1.9) Zamansız Hız Denklemi:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)$$

$$v^2 = 387.3^2 + (2)(10)(5000) \rightarrow v = 500 m/s$$

$$v_r = 500(\cos 60^\circ) = 250 m/s = \dot{r}$$

$$v_\theta = -500(\sin 60^\circ) = -433 m/s = r\dot{\theta} = (10000)\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = -0.0433 rad/s$$

$$a = a_0 = 10 m/s^2, a_r = a(\cos 60^\circ) = 10(\cos 60^\circ) = 5 m/s^2 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow \ddot{r} = 5 + r\dot{\theta}^2 = 5 + 10000(-0.0433)^2 \rightarrow \ddot{r} = 23.75 m/s^2$$

$$a_\theta = -a(\sin 60^\circ) = -10(\sin 60^\circ) = -8.66 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

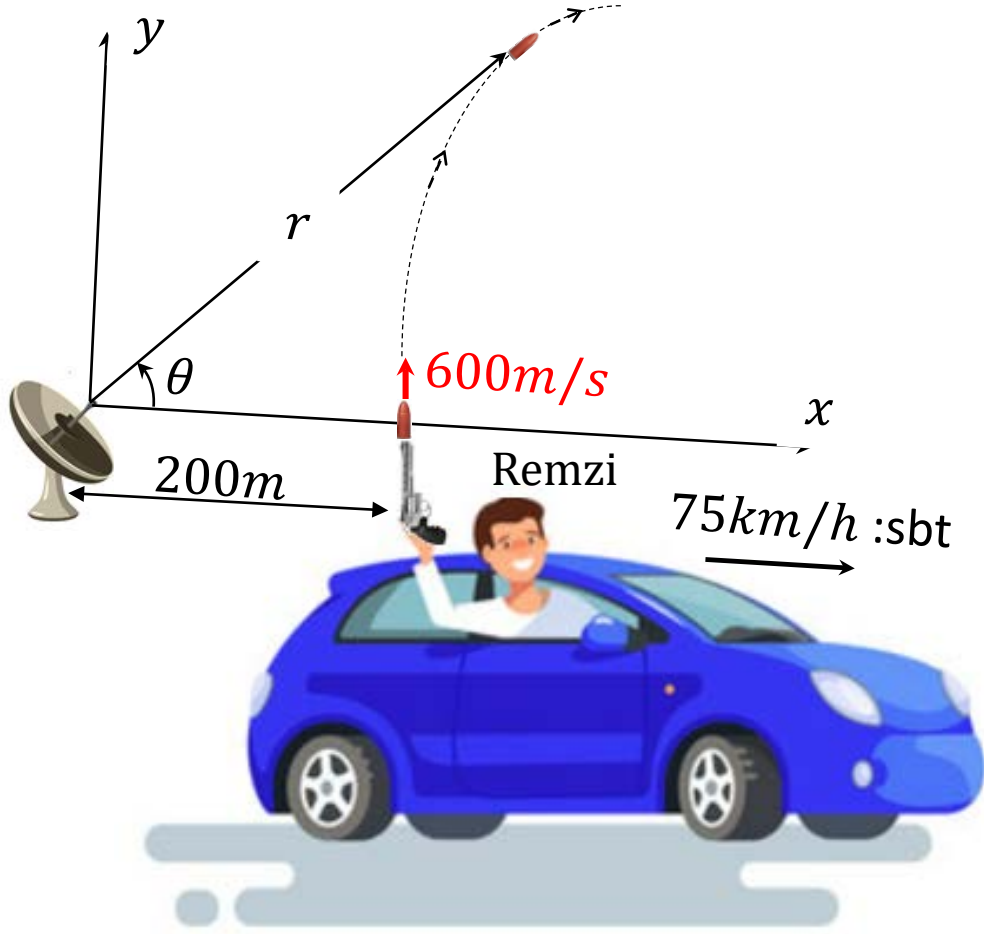
$$-8.66 = (2)(250)(-0.0433) + (10000)\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} \cong 0.0013 rad/s^2$$

$$v_0 = \frac{1394.2}{3.6} = 387.3 m/s$$

$$a_0 = \frac{36}{3.6} = 10 m/s^2$$

Sabit ivmeli doğrusal hareket için geçerlidir.

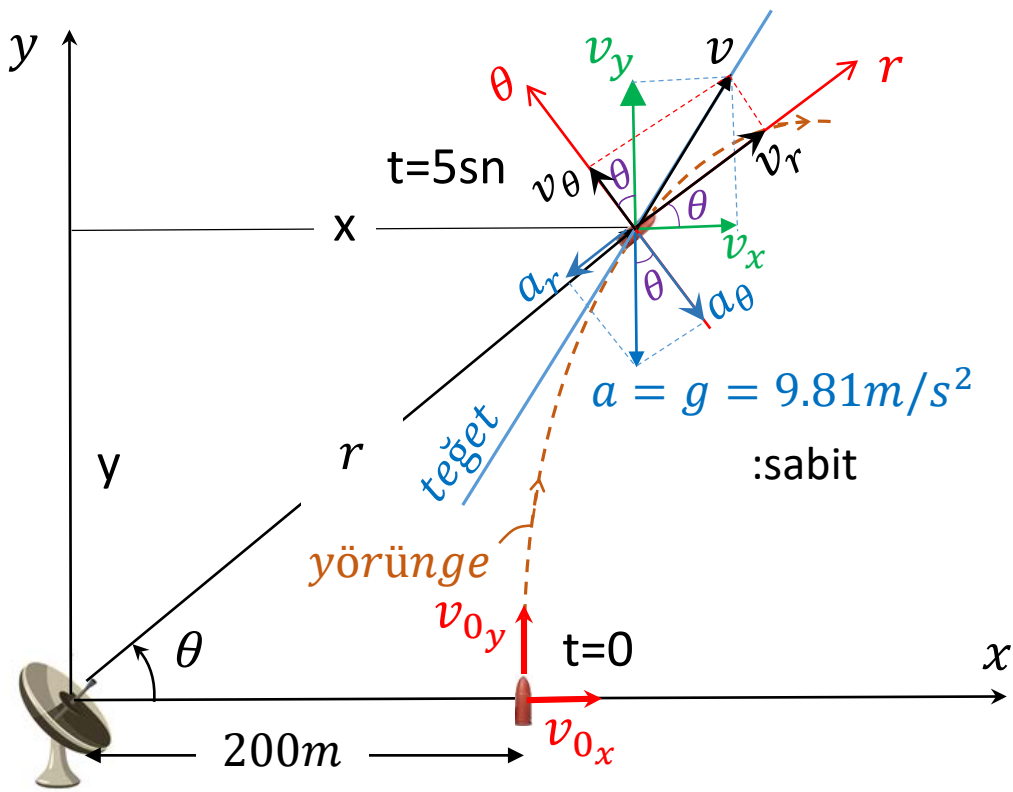




### Örnek 1.2.11

$v_x = 75 \text{ km/h}$  lık sabit hızla hareket eden otomobilde bulunan ve şampiyonluk kutlamalarına kendini fazla kaptıran fanatik taraftar Remzi elindeki silahı düşey olarak yukarıya doğru ateşlemiştir. Merminin namludan düşey doğrultudaki çıkış hızı  $600 \text{ m/s}$  dir. Bu sırada  $200\text{m}$  geride bulunan A noktasındaki radar Remzi yerine mermiyi takip etmektedir. Mermi ateşlendikten  $5$  saniye sonra, Radarın  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  değerlerini bulunuz.  $g=9.81\text{m/s}^2$

**Çözüm:...>>>**



Mermi otomobilin hızı ve kendi hızıyla harekete başlar:  
 $t=0$  anında merminin hız bileşenleri (eğik atış)

$$v_{0y} = 600 \text{ m/s} , v_{0x} = 75 \text{ km/h} = \frac{75000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20.8 \text{ m/s}$$

$$t = 5. \text{ saniyede} \quad v_x = v_{0x} = 20.8 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 600 - (9.81)(5) \rightarrow v_y = 550.95 \text{ m/s}$$

$v_y > 0$  olduğu için mermi yükselme bölgesindedir.

$t = 5. \text{ saniye için}$

$$x = x_0 + v_x \cdot t = 200 + (20.8)(5) = 304 \text{ m}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 600 \times 5 - (0.5)(9.81)5^2 = 2877.375 \text{ m}$$

$$r = \sqrt{304^2 + (2877.375)^2} = 2893.39 \text{ m}$$

$$\tan \theta = y/x = (2877.375)/304 \rightarrow \theta = 83,97^\circ$$

$$v_r = v_x \cdot \cos \theta + v_y \cdot \sin \theta$$

$$= 20.8 \cos(83.97^\circ) + 550.95 \sin(83.97^\circ) \rightarrow v_r = \dot{r} = 550.08 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = -v_x \cdot \sin \theta + v_y \cdot \cos \theta$$

$$= -20.8 \sin(83.97^\circ) + 550.95 \cos(83.97^\circ) \rightarrow v_\theta = 37.19 \text{ m/s}$$

$$a_\theta = g \cdot \cos \theta = -9.81 \cos(83.97^\circ) = -1.03 \text{ m/s}^2$$

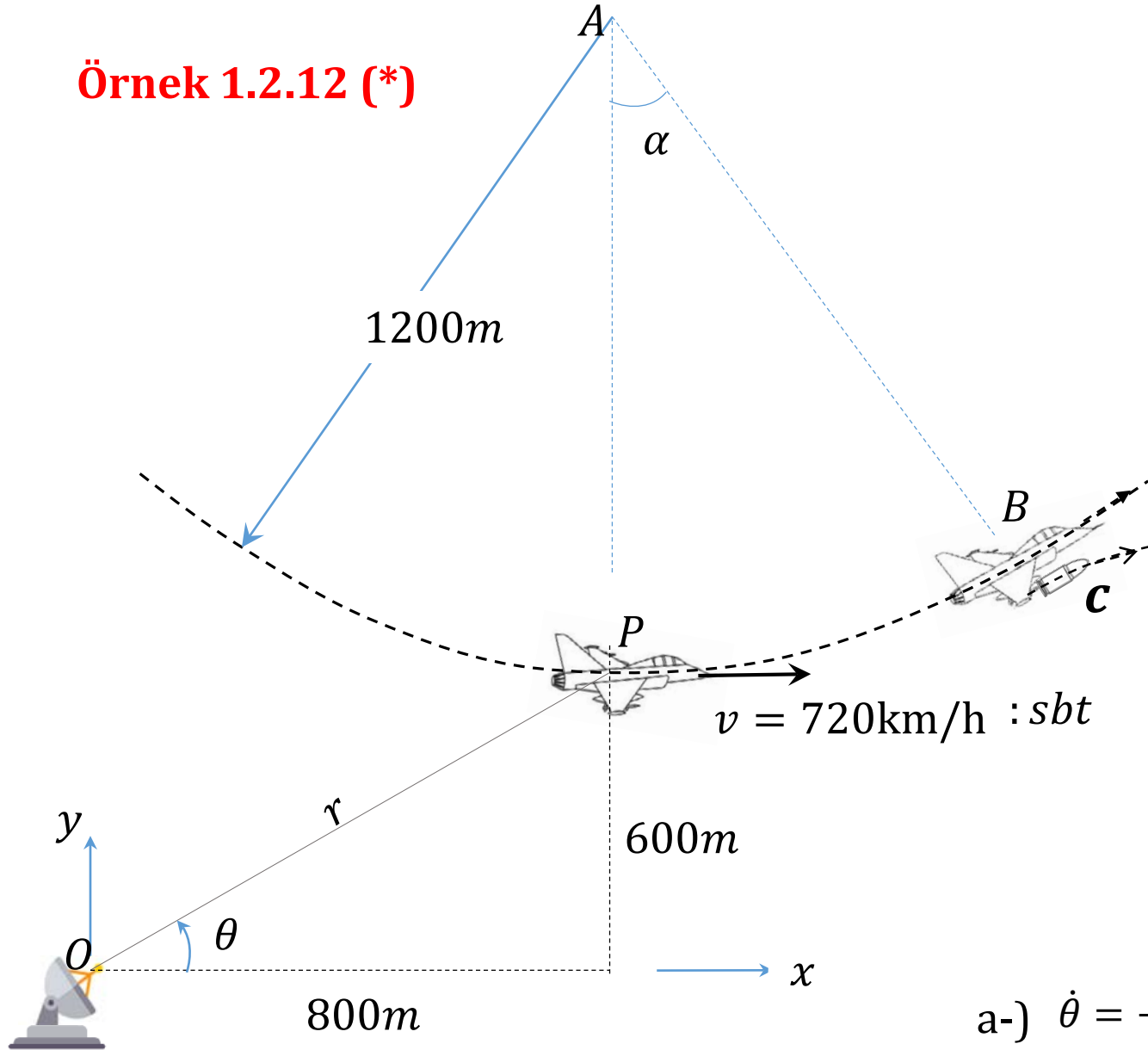
$$a_r = g \cdot \sin \theta = -9.81 \sin(83.97^\circ) = -9.75 \text{ m/s}^2$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = 37.19/2893.39 \rightarrow \dot{\theta} = 0.0128 \text{ rd/s}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \rightarrow \ddot{r} = -9.75 + 2893.39(0.0128)^2 \rightarrow \ddot{r} = -9.27 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-1.03 - 2(550.026)}{2893.39} \rightarrow \ddot{\theta} = -0.38 \text{ rd/s}^2$$

### Örnek 1.2.12 (\*)



Bir savaş uçağı,  $A$  merkezli,  $1200\text{ m}$  yarıçaplı bir çember yörünge etrafında  $v = 720\text{km/h}$  lik sabit hızla dönmektedir.  $O$  noktasındaki radar ise uçağı sürekli takip etmektedir. Buna göre;

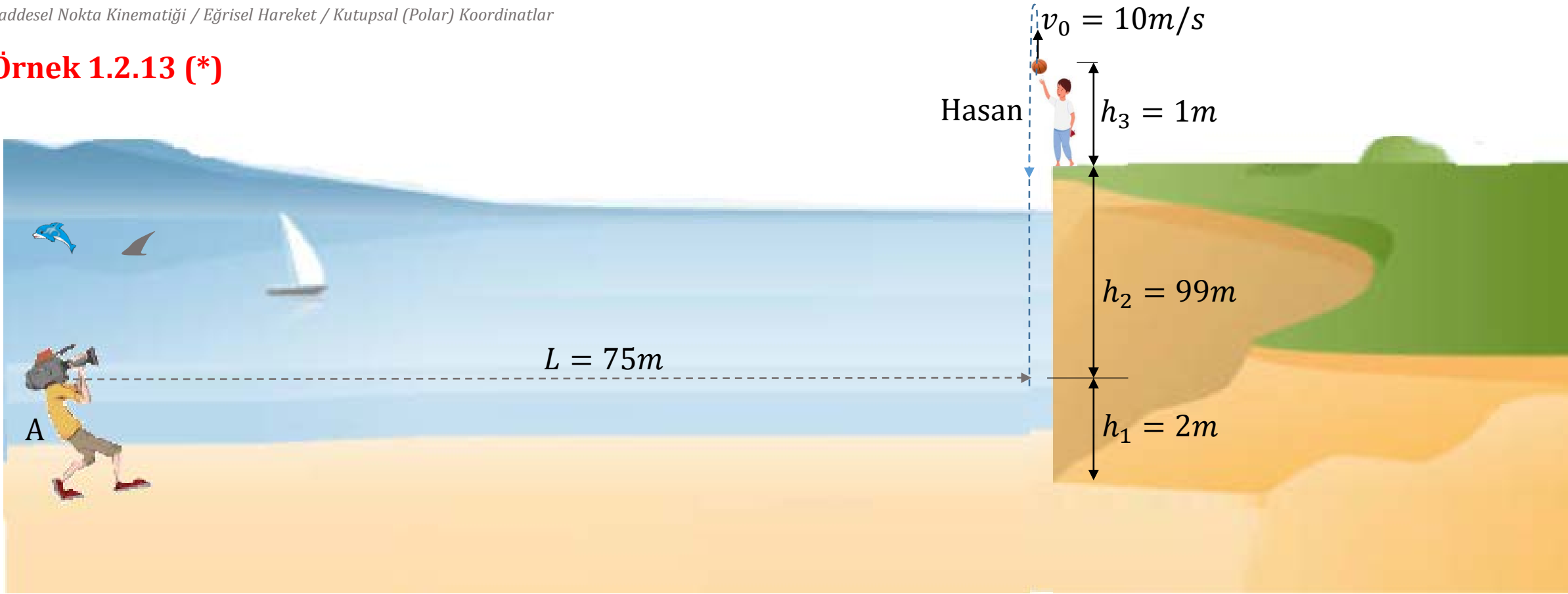
- Uçak yörüngenin en alt noktası  $P$ 'den geçerken;  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{r}$  değerlerini hesaplayınız.
- Uçak  $B$  noktasından geçerken bir  $c$  bombasını bırakıyor.  $c$  bombasının radardan ne kadar uzaklıkta yere çarpacağını hesaplayınız. ( $\alpha = 40^\circ$ )

Cevaplar:

a-)  $\dot{\theta} = -0.12\text{rd/s}$ ,  $\ddot{\theta} = 0.065\text{rd/s}^2$ ,  $\ddot{r} = 34.4\text{m/s}^2$

b-)  $6369.8\text{m}$



**Örnek 1.2.13 (\*)**

Bir yamacın kenarındaki Hasan isimindeki çocuk, elindeki 2N ağırlığındaki topu  $10\text{m/s}$  lik ilk hızla düşey yönde (yukarı doğru) fırlatıyor ve elini geri çekiyor . Bu sırada sahilde A noktasında bulunan babası elindeki kamerayla topun hareketini sürekli filme alıyor. Yerçekimi ivmesini  $g=10\text{m/s}^2$  alarak 5 saniye sonra,

a-) Topun hızını ve yerden yüksekliğini, *(cevap:  $v_5 = -40\text{m/s}$  ;  $h_5 = 27\text{m}$  )*

b-) Kameranın açısal hızı ( $\dot{\theta}$ ) ve açısal ivme ( $\ddot{\theta}$ ) değerlerini hesaplayınız. *(cevap:  $\dot{\theta}_5 = -0.48\text{rd/s}$  ; ;  $\ddot{\theta}_5 = -0.273\text{rd/s}^2$ )*



## 1.2.6 Silindirik Koordinatlara göre eğrisel hareketin incelenmesi: [\(video 1.2.4 b\)](#)

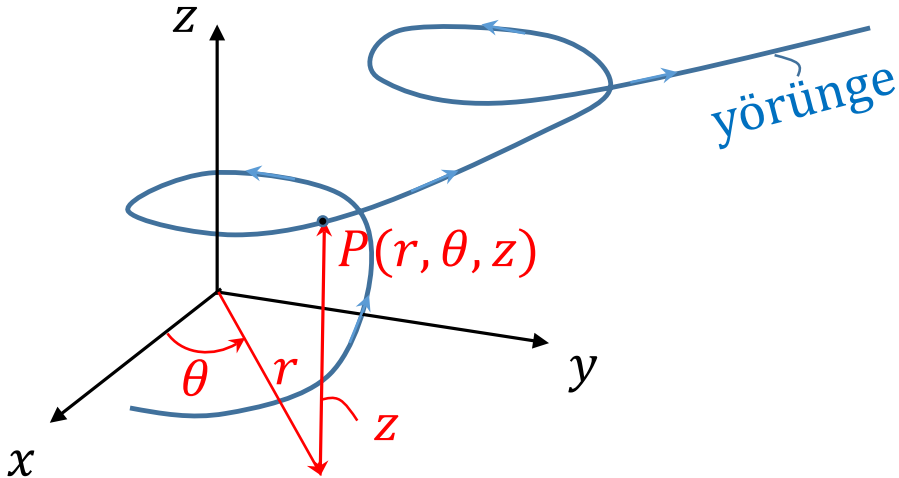
Silindirik Koordinatlar: Kutupsal (polar) koordinatların 3 boyutlu halidir.

$r$ ,  $\theta$  eksenlerinin yanısıra  $z$  eksenini doğrultusunda da hareket söz konusudur.

Polar koordinatlardaki denklemlere ilaveten  $z$  eksenindeki hız ( $\dot{z}$ ) ve ivme  $i$  ( $\ddot{z}$ ) denklemleri de mevcuttur.

Bir  $t$  anındaki konum  $P(r, \theta, z)$  koordinatlarıyla ifade edilir.

$r$  ve  $\theta$  eksenleri  $x, y$  düzleminde olmak kaydıyla  $P$  noktasında ( $t$  anında) :



$$\text{hız: } \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$(D.1.27)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$(D.1.28)$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$(D.1.31)$$

$$\text{ivme: } \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

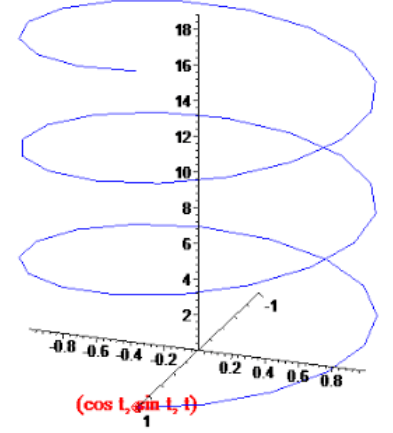
$$(D.1.29)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$(D.1.30)$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$(D.1.32)$$



**Örnek 1.2.14** ([video 1.2.4 b - örnek 1.11](#))

Bir Aqua parktaki kıvrımlı kaydırağın en üst noktasından kaymaya başlayan çocuğun herhangi bir  $t$  anındaki konumu, silindirik koordinatlarda

$$\mathbf{r} = 0.2t^2 - 2t + 6, \quad \theta = \sin(5t) + \cos(20t) + 2t, \quad z = -2.3t + 20$$

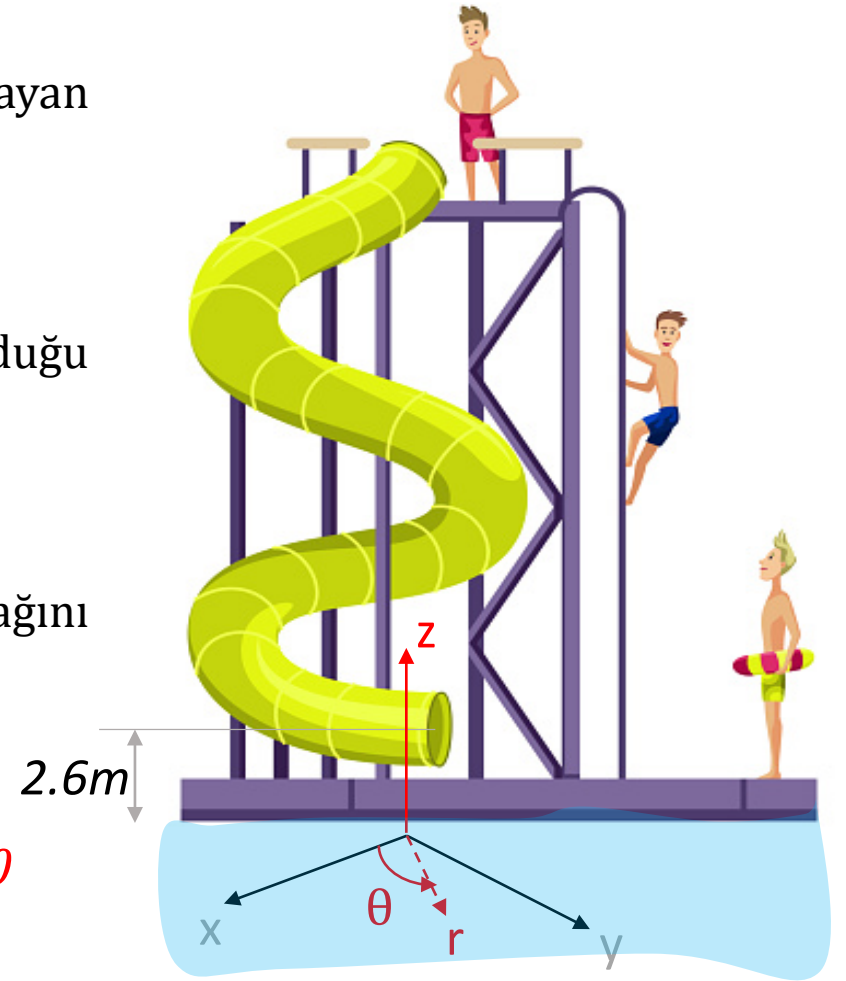
şeklinde ifade edilebiliyor. Kaydırağın en altta havuzdan 2.6m yüksekte olduğu biliniyor. Buna göre,

a-) 5nci saniye çocuğun hız ve ivmesini,

b-) çocuğun havuza düştüğü noktanın kaydıraftan ne kadar uzakta olacağını hesaplayınız.

**Çözüm:**

|                                      |                                              |                  |
|--------------------------------------|----------------------------------------------|------------------|
| $r = 0.2t^2 - 2t + 6$                | $\theta = \sin(5t) + \cos(20t) + 2t$         | $z = -2.3t + 20$ |
| $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0.4t - 2$ | $\dot{\theta} = 5 \cos 5t - 20 \sin 20t + 2$ | $\dot{z} = -2.3$ |
| $\frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r} = 0.4$ | $\ddot{\theta} = -25 \sin 5t - 400 \cos 20t$ | $\ddot{z} = 0$   |





a-)  $t = 5\text{sn}$  için

$$r_5 = 0.2x5^2 - 2x5 + 6 = 1$$
$$\dot{r}_5 = 0.4x5 - 2 = 0$$
$$\ddot{r}_5 = 0.4$$

$$\theta_5 = \sin(5 \times 5) + \cos(20 \times 5) + 2 \times 5 = 10.24$$
$$\dot{\theta}_5 = 5 \cos(5 \times 5) - 20 \times \sin(20 \times 5) + 2 = -13.16 \text{ rd/s}$$
$$\ddot{\theta}_5 = -25 \sin(5 \times 5) - 400 \times \cos(20 \times 5) = 58.89 \text{ rd/s}^2$$

$$z_5 = -2.3x5 + 20 = 8.5\text{m},$$
$$\dot{z}_5 = -2.3$$
$$\ddot{z}_5 = 0$$

(D.1.27'den)

(D.1.28'den)

(D.1.31'den)

$$v_{r_5} = \dot{r}_5 = 0 \quad , \quad v_{\theta_5} = r_5 \cdot \dot{\theta}_5 = 1 \times (-13.16) = -13.16 \text{ m/s} \quad , \quad v_{z_5} = \dot{z}_5 = -2.3 \text{ m/s}$$

$$v_5 = \sqrt{v_{r_5}^2 + v_{\theta_5}^2 + v_{z_5}^2} \quad \Rightarrow \quad v_5 = 13.35 \text{ m/s}$$

(D.1.29'dan)

$$a_{r_5} = \ddot{r}_5 - r_5 \cdot \dot{\theta}_5^2 = 0.4 - 1(-13.16)^2 = -172.78 \text{ m/s}^2$$

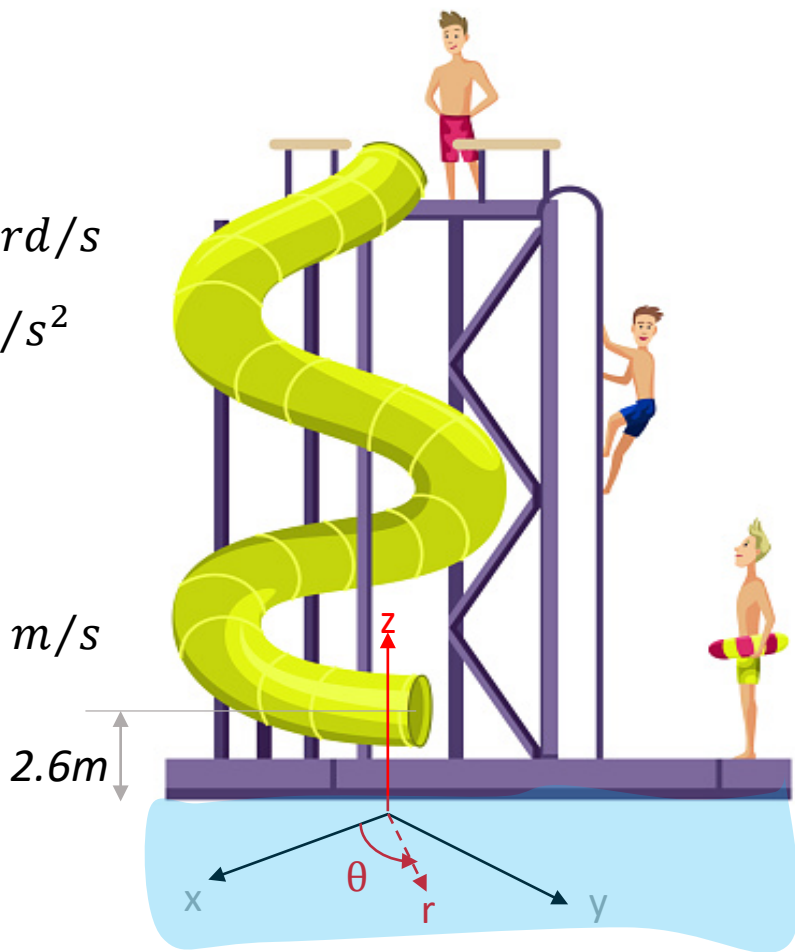
(D.1.30'dan)

$$a_{\theta_5} = r_5 \ddot{\theta}_5 + 2\dot{r}_5 \dot{\theta}_5 = 1(58.89) + (2)(0)(-13.16) = 58.89 \text{ m/s}^2$$

(D.1.32'den)

$$a_{z_5} = \ddot{z}_5 = 0$$

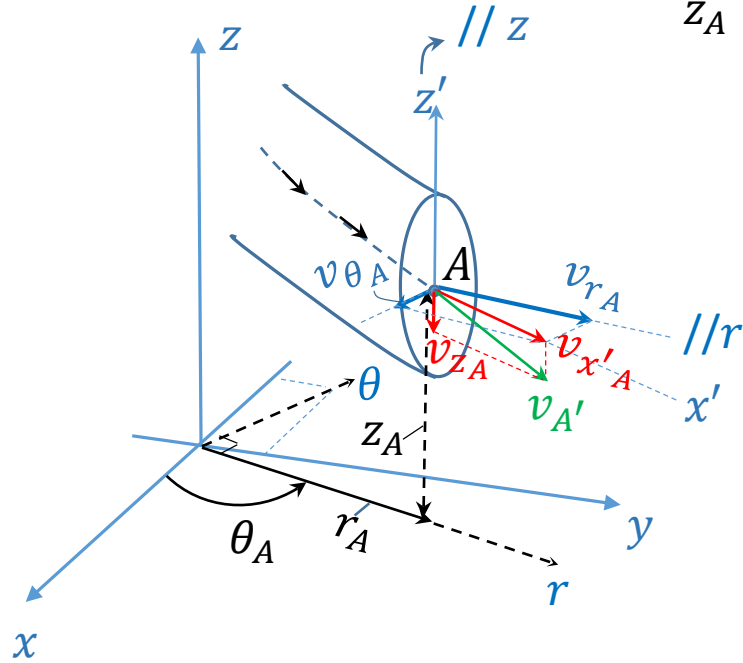
$$a_5 = \sqrt{a_{r_5}^2 + a_{\theta_5}^2 + a_{z_5}^2} \quad \Rightarrow \quad a_5 = 182.54 \text{ m/s}^2$$



a-)  $t=5\text{sn}$  de  $v=?$ ,  $a=?$

**b-)** Çocuğun havuza düştüğü noktanın kaydırağından ne kadar uzakta olacağını hesaplayınız.

Öncelikle kaydırağın sonundaki A noktasında çocuğun hız bileşenlerini bulmalıyız:



$$z_A = 2.6 \text{ m} \rightarrow z_A = -2.3t_A + 20 = 2.6 \rightarrow t_A = 7.56 \text{ sn}$$

$$r_A = 0.2t_A^2 - 2t_A + 6 \rightarrow r_A = 2.31 \text{ m}$$

$$\dot{r}_A = v_{rA} = 0.4t_A - 2 = 0.4 \times 7.56 - 2$$

$$\rightarrow v_{rA} = 1.024 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta}_A = 5 \cos(5t_A) - 20 \sin(20t_A) + 2$$

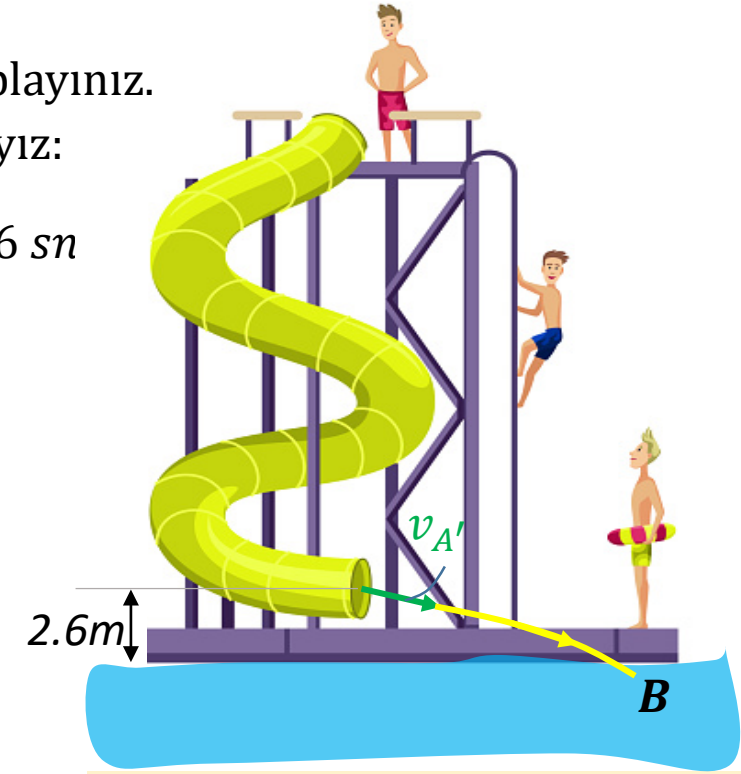
$$\rightarrow \dot{\theta}_A = -3.684 \text{ rd/s}$$

$$v_{\theta A} = r\dot{\theta}_A = 2.31 \times (-3.684) \rightarrow v_{\theta A} = -8.51 \text{ m/s}$$

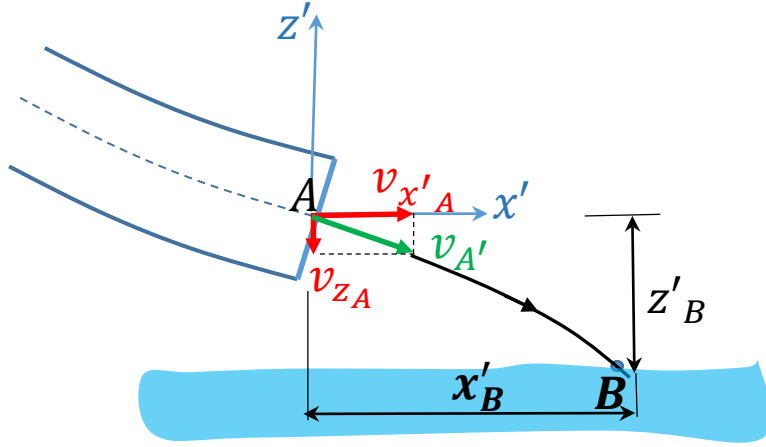
$$v_{x'A} = \sqrt{v_{rA}^2 + v_{\theta A}^2} = \sqrt{1.024^2 + (-8.51)^2} \rightarrow v_{x'A} = 8.57 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow v_{zA} = \dot{z}_A = -2.3 \text{ m/s}$$

A noktasından çıktıktan sonra  $x' - z'$  düzleminde eğik atış söz konusudur.>>



$v_{rA}$  ve  $v_{\theta A}$  hızları, bunların bileşkesi olan  $v_{x'A}$  hızı, ve  $x'$  eksenini,  $x$ - $y$  düzlemine paralel olan bir düzlemde. Bunu şu ana kadar ki bilgilerinizle fark etmelisiniz.



A noktasından çıktıktan sonra hareket :

$x' - z'$  düzleminde Eğik Atış

$$z' = z'_0 + v_{z_A} \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$$

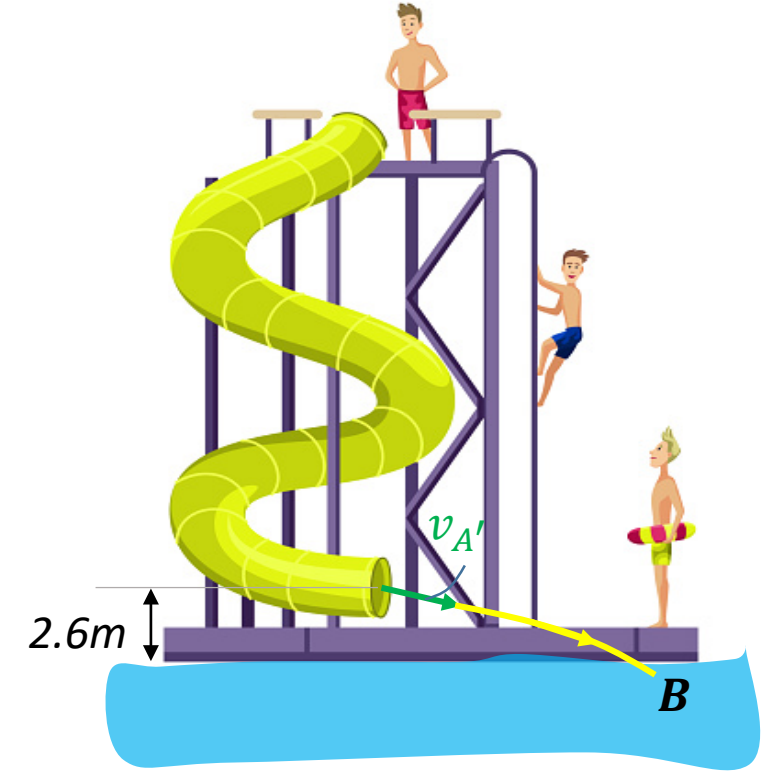
$$z' = z'_B = -2.6m$$

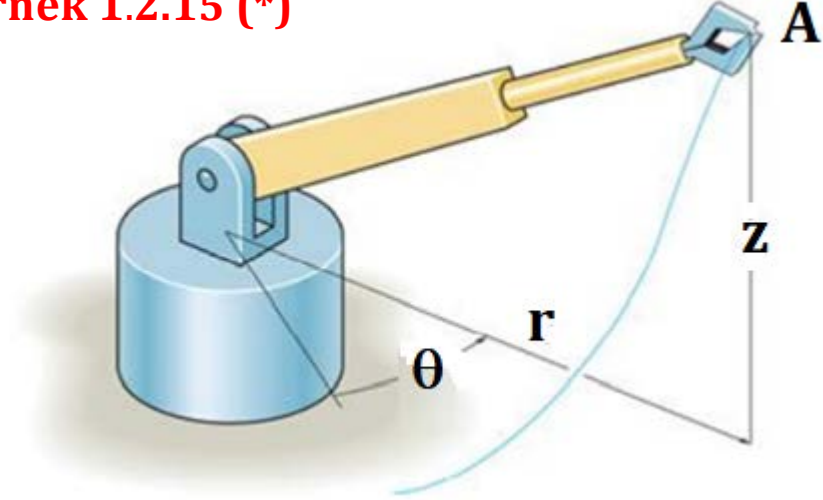
$$-2.6 = 0 - 2.3t_B - \frac{1}{2}9.81t_B^2$$

$$4.905t_B^2 + 2.3t_B - 2.6 = 0$$

$$t_{B_{1,2}} = \frac{-2.3 \mp \sqrt{2.3^2 + 4 \times 4.905 \times 2.6}}{2 \times 4.905} \quad \begin{cases} t_{B_1} < 0 \\ t_{B_2} = 0.53sn = t_B \end{cases}$$

$$x'_B = x_0 + v_{x_A'} \cdot t_B = 0 + 8.57 \times 0.53 \rightarrow x'_B = 4.54m \quad (\text{Havuzla düştüğü noktanın kaydıraktan uzaklığı})$$



**Örnek 1.2.15 (\*)**

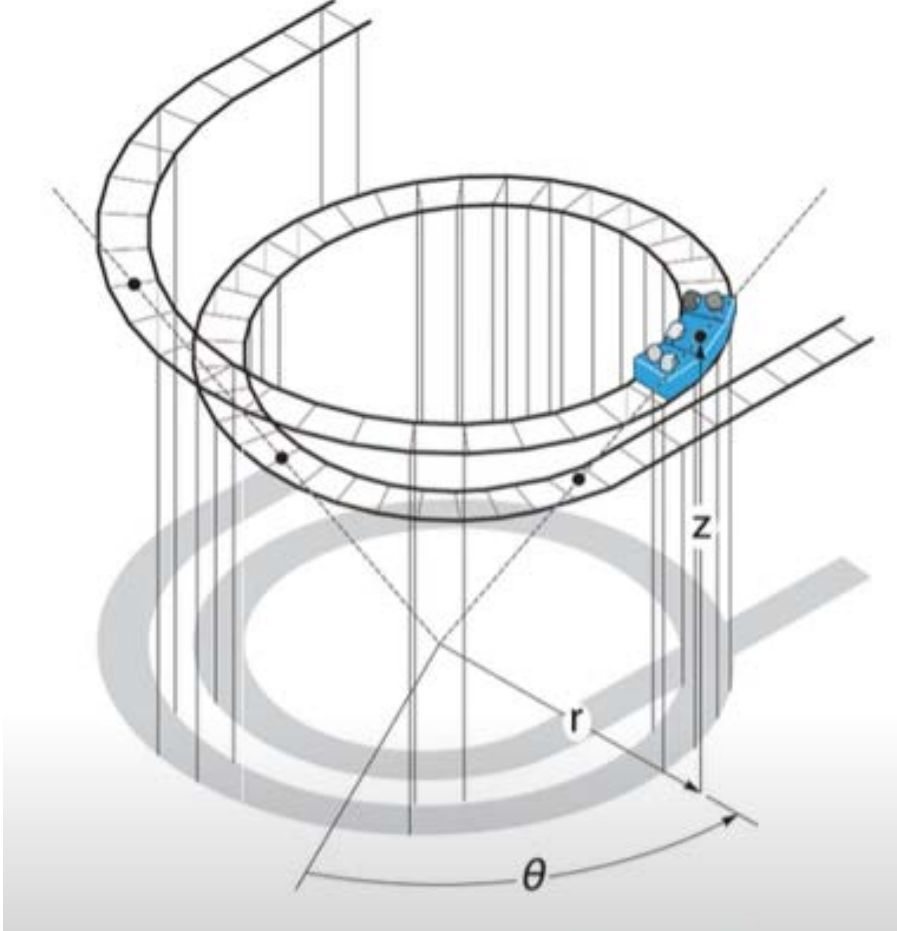
Bir robot kolunun iki koordinatı

$$z = 0.4t^2 \text{ ve } \theta = 1.5t$$

bağıntılarıyla değiştirilirken  $r$  yönündeki hızı  $0.15\text{m/s}$  olacak şekilde arttırılıyor.

$t = 3$ ncü saniyede  $r = 0.3\text{m}$  olduğu bilindiğine göre  $A$  uç noktasının toplam hız ve toplam ivmesini hesaplayınız.

**Cevap:**  $v = 2.45 \text{ m/s}$  ;  $a = 1.14\text{m/s}^2$



**Örnek 1.2.16 (\*):** Lunaparktaki bir hız treni, kısa bir mesafe için konik bir spiral  $r = \frac{3}{4}z$  ile tanımlanan bir yol boyunca hareket etmektedir.  $\theta = -1.5z$  olup, burada  $r$  ve  $z$  metre ve  $\theta$  radyan cinsindendir. Açısal hız  $\dot{\theta} = 1$  rad /s her zaman korunuyorsa,  $z = 6$ m olduğunda trenin ivmesinin bileşenlerini  $(a_r, a_\theta, a_z)$  belirleyin. Tren ve yolcuların toplam kütlesi 200 kg'dır.

**Cevap:**  $a_r = -4.5 \text{ m/s}^2$  ;  $a_\theta = -1 \text{ m/s}^2$  ;  $a_z = 0$



# 1.3

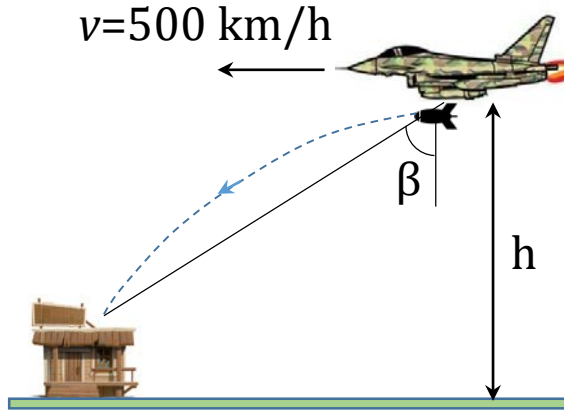
## 1.Bölüm (Maddesel Nokta Kinematiği) ile İlgili Cevaplı Sınav Soruları

- Bu ve diğer bölüm sonlarında soruların sadece cevapların verilmesinin amacı çözüm yaparken yaptığınız hataları fark etmenizi sağlamaktır.
- Bu sebeple cevaplarını bulana kadar soruyla uğraşmaya devam ediniz.
- Yine de cevabı bulamazsanız arkadaşlarınızla soruyu tartışınız.
- Bu size çok şey katacak olan dolaylı bir öğrenme şeklidir.

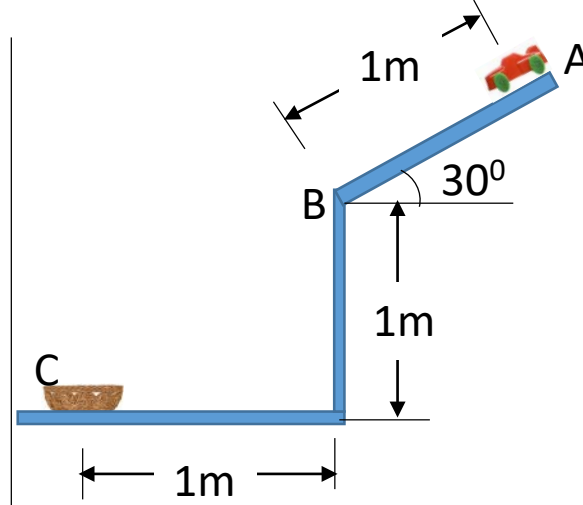
**Soru 1.3.1)** A noktasında duran bir araba,  $1 \text{ m/s}^2$  lik bir ivme ile harekete başlayarak hızı  $70 \text{ km/h}$  değerine erişene kadar yoluna devam ediyor. Bundan sonra bu sabit hızla bir süre ilerliyor ve durmak istediği B noktasından  $60 \text{ m}$  geride iken fren yapmaya başlıyor. Arabanın ortalama hızı  $50 \text{ km/h}$  olduğuna göre; a-) Arabanın A dan B ye gelmesi için gerekli zamanı, b-) A ile B arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

**(Cevaplar: a-)  $44.8 \text{ sn}$ , b-)  $622.2 \text{ m}$  )**

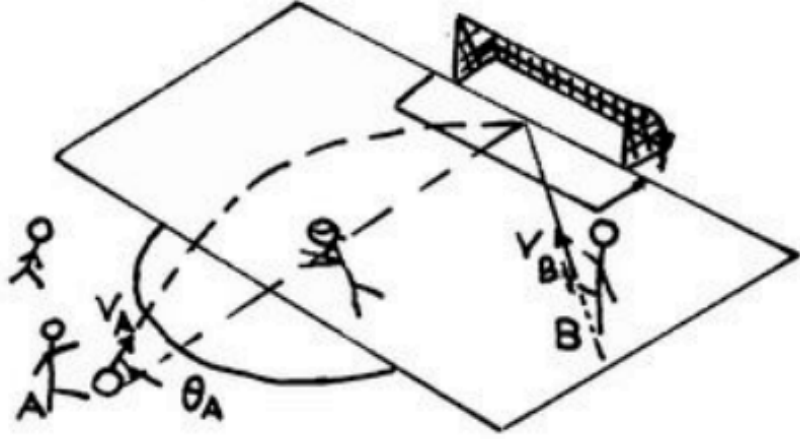




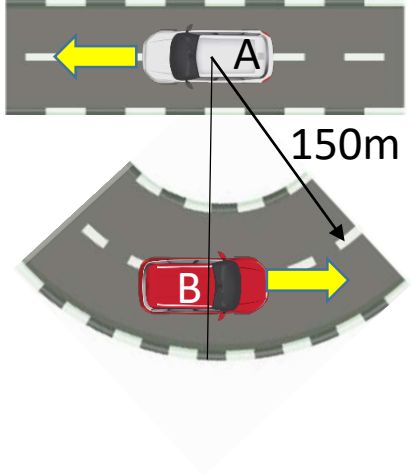
**Soru 1.3.2)** 500 km/h hızla zemine paralel uçan uçak yerdeki barakayı vuracak şekilde bir bomba bırakıyor. Uçak-baraka doğrultusunun düşeyle yaptığı açı  $\beta = 60^\circ$  olduğuna göre uçağın irtifasını ( $h$  yüksekliğini) bulunuz. Barakanın boyutlarının ihmal ediniz. **Cevap: 1313m**



**Soru 1.3.3)**  $30^\circ$  eğimli düzlemin A noktasından ilk hızsız bırakılan oyuncak araba, C noktasındaki sepete düşüyor. A-B düzleminde ivme ile alınan yol arasında  $a = k.s$  şeklinde bir bağıntı olduğuna göre,  $k$  değeri ne olmalıdır? Sepetin ve oyuncakın boyutları ihmal edilecektir. **Cevap:  $k=15.46$**

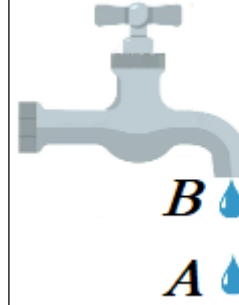


**Soru1.3.4)** A futbolcusu topa  $v_A = 70$  km/h hız ve  $\theta_A = 60^\circ$  lik açı ile vurduğunda top kale çizgisine düşecek şekilde yol alıyor. Buna göre; a-) Geçen zamanı ve A futbolcusunun kaleye olan uzaklığını bulunuz, b-) Golü engellemesi için B futbolcusunun kaleye doğru doğrusal yol boyunca  $v_B = t^2 + 1$  hızıyla kaç metre koşması gerekir ? **Cevaplar: a-) 33.34m, b-) 16.88m**



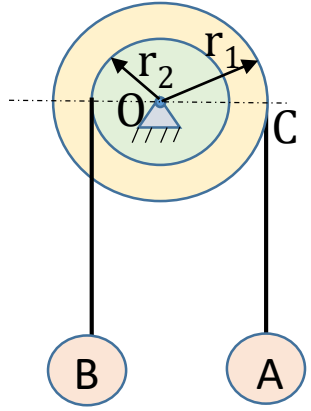
**Soru1.3.5)** A ve B taşıtlarının her ikisi de şekilde gösterilen yönde 50 km/h hızlar ile hareket ederken A'nın hızı saniyede 2 m/sn azalmakta, B'nin hızı ise saniyede 3 m/sn artmaktadır. 150 m yarıçaplı virajı dönmekte olan B taşıtının hız ve ivmesini A'daki bir gözlemciye göre bulunuz.

**Cevap:**  $\vec{v}_{B/A} = 128\vec{i}$  ,  $\vec{a}_{B/A} = \vec{i} + 1.286\vec{j}$



**Soru1.3.6)** Bir çeşmeden su damlaları eşit zaman aralıkları ile damlıyor. Herhangi bir B damlası düşmeye başladığı anda A damlası 25 cm düşmüş bulunmaktadır. A ile B damlaları arasındaki uzaklık 75 cm olduğu anda A'nın çeşmeden uzaklığını hesaplayınız.

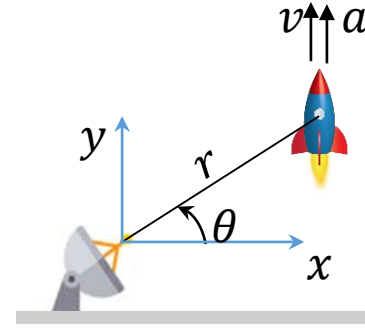
**Cevap:** 99.7cm



**Soru1.3.7)** Bir makara ve iki yük şeklindeki gibi uzamasız iplerle bağlıdır. A yükünün  $3 \text{ m/s}^2$  lik sabit bir ivmesi,  $4.5 \text{ m/s}$  lik bir ilk hızı vardır ve ikisi de yukarı doğrudur. a-)  $t = 0$  da makaranın çevresindeki C noktasının bileşke ivmesini hesaplayınız. b-) 3 saniye sonra B yükünün hızını bulunuz.

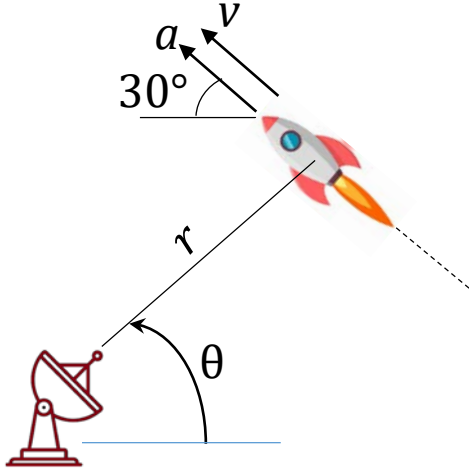
(  $r_1 = 1.5 \text{ m}$  ,  $r_2 = 1 \text{ m}$  )

**Cevap:** a-)  $13.83 \text{ m/s}$ , b-)  $9 \text{ m/s}$



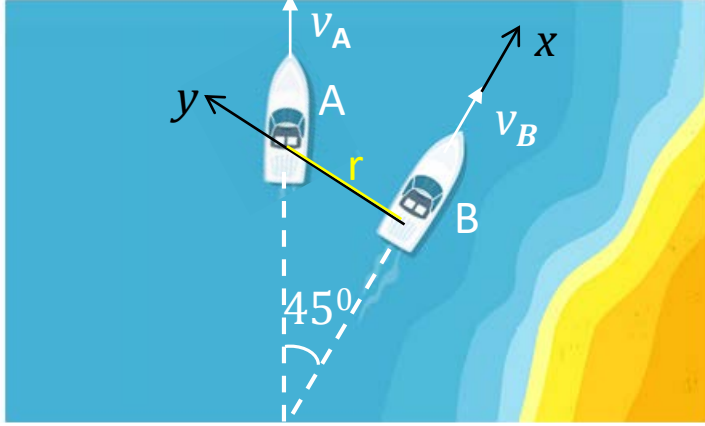
**Soru1.3.9)** Bir roket düşey yönde ateşlenerek, şekilde gösterilen radar anteni ile izlenmektedir.  $\theta = 60^\circ$  olduğu konumda ölçümler  $\dot{\theta} = 0.003 \text{ rad/s}$  ve  $r = 7500 \text{ m}$  değerlerini vermekte ve roketin düşey ivmesi  $a = 20 \text{ m/s}^2$  dir. Bu andaki  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$  ve  $\ddot{\theta}$  değerlerini bulunuz.

**Cevap:**  $\dot{r} = 389.7 \text{ m/s}$ ,  $\ddot{r} = 24.07 \text{ m/s}^2$ ,  
 $\ddot{\theta} = (-1.784)10^{-3} \text{ rad/s}^2$



**Soru1.3.10)** Bir roket yatayla  $30^\circ$  açı yapacak şekilde ateşlenerek doğrusal yörüngede ilerlerken bir radar ile izlenmektedir.  $\theta = 30^\circ$  olduğu konumda ölçümler  $\dot{\theta} = 0.03 \text{ rad/s}$  ve  $r = 5000 \text{ m}$  değerlerini vermekte ve roketin gösterilen yöndeki ivmesi  $a = 15 \text{ m/s}^2$  olduğu bilinmektedir. Bu andaki  $\ddot{r}$  ve  $\ddot{\theta}$  değerlerini bulunuz.

**Cevap:**  $\ddot{r} = -3 \text{ m/s}^2$ ,  $\ddot{\theta} = (3.64)10^{-3} \text{ rad/s}^2$

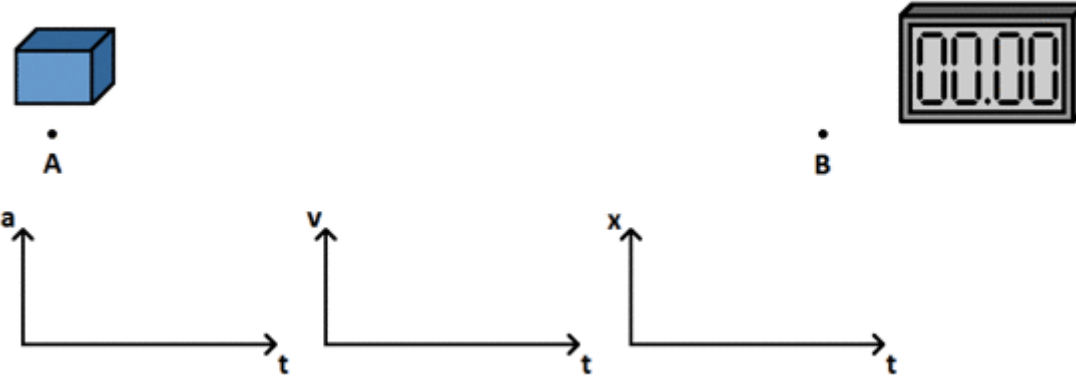


**Soru 1.3.11** A ve B gemileri  $v_A = 50$  km/h,  $v_B = 75$  km/h sabit hızlarla hareket ederken  $r$  doğrultusu  $v_B$  ye dik olduğu anda B gemisinin kaptanı  $r$  uzaklığını 3 km olarak ölçmüştür;

a-) A'nın B'ye göre hız ve ivmesini bulunuz, b-) B'ye göre  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  değerlerini hesaplayınız. **Cevaplar:** a-)  $\vec{v}_{A/B} = -11\vec{i} + 9.82\vec{j}$ ,  $a_{A/B} = 0$

b-)  $\dot{r} = 9.82 \text{ m/s}$ ,  $\ddot{r} = 0.0404 \text{ m/s}^2$ ,  $\dot{\theta} = (3.67)10^{-3} \text{ rad/s}$ ,  $\ddot{\theta} = (-2.4)10^{-5} \text{ rad/s}^2$





# 2 . MADDESEL NOKTA KİNETİĞİ

**Dikkat:** Bölüm Sonundaki 2.5 nolu kısımda tüm 2. bölüm konularıyla ilgili **Cevaplı Sınav Soruları** mevcuttur.



## Kinetik Hesaplamalarla İlgili Genel Bilgiler

- Kinetik; hareketin nedenleri olan dış kuvvetleri de hesaba katarak hesaplamalar yaptığımız dinamiğin alt bilim dalıdır.
- Amacımız bir t anında yine hız, ivme, konum veya dış kuvvetleri belirlemektir.
- Temel denklemimiz Newton'un 2nci kanunu olan  $F=ma$  (Kuvvet = kütle x ivme) denklemidir.
- Problemleri çözerken 3 farklı yöntem kullanırız:

**1.Yöntem: D'alembert Prensibi ile  $F=ma$  denkleminin doğrudan uygulanması:** Bu yöntemde cismin ivmesi doğrudan hesaba katılarak çözümler yapılır. Özellikle dış kuvvetlerin veya ivmenin belirgin olduğu problemlerde tercih edilir.

**2. Yöntem: İş-Enerji Yöntemi:** İvmeyi hesaba katmadan çözüm yaptığımız bir yöntemdir.

**3.Yöntem: İmpuls\_momentum Yöntemi:** Özellikle dış kuvvetlerin zamanla değiştiği problemlerde veya çarpışma problemlerinde tercih edilir. İvmeyi yine hesaba katmamıza gerek kalmadan sonuca gidebiliriz.

Şunu unutmamak gerekir ki; 2. ve 3. yöntemler aslında  $F=ma$  denkleminin farklı şekillerde yorumlanmış

halleridir. Yoksa bağımsız yöntemler değildir. Öyle ki, bir kinetik problemi her 3 yöntemle de çözülebilir. Ancak yukarıda bahsedilen durumlara göre yöntem tercih edilirse daha hızlı ve pratik olarak sonuca gidilir.

Bu 3 yöntem maddesel nokta için uygulanabileceği gibi ileri de 4.konuda rijit cisimler için de ayrıca anlatılacaktır.

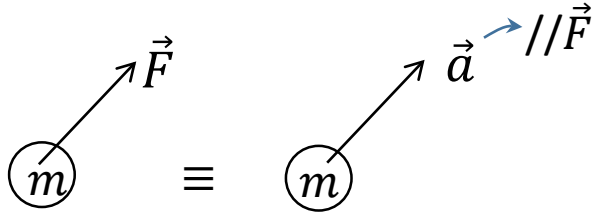
Şimdi bu yöntemleri sırasıyla maddesel nokta kinetiği için inceleyeceğiz ve herbir yöntem için örnekler çözeceğiz..>>

D'Alembert Prensibi ile

# 2.1 $F = m.a$ Denkleminin Doğrudan Uygulanması

Bu konu [Video 2.2.a](#) da anlatılmıştır.

## 2.1 F = ma Denkleminin Doğrudan Uygulanması



Bir cisme etki eden F kuvveti, cisme kendi yönünde bir ivme kazandırır.  
Kuvvet, ivme ve kütle arasında şu şekilde bir bağıntı vardır:

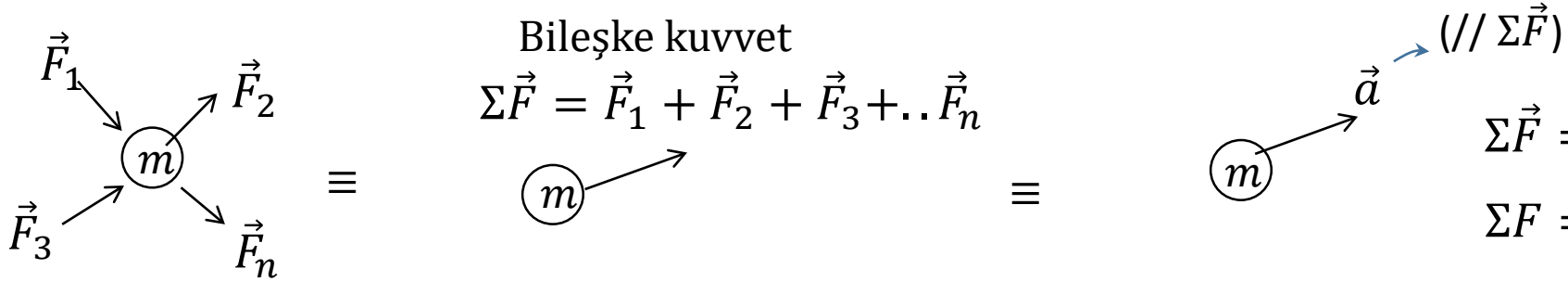
$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (\text{D.2.1.a})$$

Bu bağımsız denkleme Newton'un 2nci kanunu denir.

İvme ve net kuvvet aynı yönde olduklarında bu denklem skaler olarak da yazılabilir:  $F = m a \quad (\text{D.2.1b})$

Bir cisme birden fazla etki eden kuvvetlerin doğrultuları aynı noktada çakışiyorsa, kuvvetlerin toplam momenti sıfırdır ve bu cisim maddesel nokta olarak incelenebilir.

Bileşke kuvvet  
ve bileşke ivme  
arasındaki ilişki:



$$\text{Bileşke kuvvet} \\ \Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_n$$

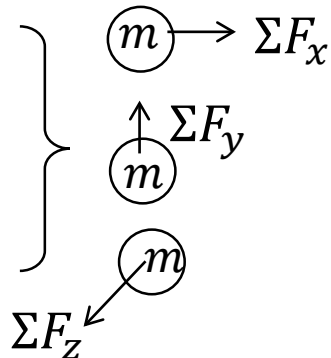
$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \quad (\text{D.2.2.a})$$

$$\Sigma F = m a \quad (\text{D.2.2.b})$$

Bileşenler  
arasındaki  
ilişkiler:

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma F_x \vec{i} + \Sigma F_y \vec{j} + \Sigma F_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$



$$\Sigma F_x = m a_x \quad (\text{D.2.3.a})$$

$$\Sigma F_y = m a_y \quad (\text{D.2.3.b})$$

$$\Sigma F_z = m a_z \quad (\text{D.2.3.c})$$

### 2.1.1 D'Alembert Prensibi:

$F = ma$  denkleminin farklı şekilde yorumlanmış halidir. Problem çözümlerinde kullanacağımız yöntemdir.

**Dış kuvvetler sistemi:** Cisme etki eden dış kuvvetlerin gösterildiği şekildir. Veya Cismin Serbest Cisim Diyagramıdır.

**Efektif kuvvetler sistemi:**  $m.a$  (kütle x İvme) terimlerine efektif kuvvetler ismi verilir. Sağ tarafta çizilir.

Sonuçta  $x, y$  ve  $z$  doğrultularının herbirisi için, bir  $t$  anındaki Dış Kuvvetler Sistemi, Efektif kuvvetler Sistemine eşitlenir, D2.3 denklemlerinden, bilinmeyen değerler (kuvvet veya ivme) elde edilir.

|                              |                                                          |          |                                                    |                                                 |
|------------------------------|----------------------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                              | Dış kuvvetler sistemi                                    | $\equiv$ | Efektif kuvvetler sistemi.                         |                                                 |
| a-) Kartezyen Koordinatlarda | $\xrightarrow{+x} \quad \bigcirc \rightarrow \Sigma F_x$ | $\equiv$ | $\xrightarrow{+x} \quad \bigcirc \rightarrow ma_x$ | $\Rightarrow \Sigma F_x = ma_x \quad (D.2.3.a)$ |
|                              | $\uparrow +y \quad \bigcirc \uparrow \Sigma F_y$         | $\equiv$ | $\uparrow +y \quad \bigcirc \uparrow ma_y$         | $\Rightarrow \Sigma F_y = ma_y \quad (D.2.3.b)$ |
|                              | $\swarrow +z \quad \bigcirc \swarrow \Sigma F_z$         | $\equiv$ | $\swarrow +z \quad \bigcirc \swarrow ma_z$         | $\Rightarrow \Sigma F_z = ma_z \quad (D.2.3.c)$ |

**Buradaki püf noktaları:** 1-Dış kuvvetler sisteminde ve Efektif kuvvetler sisteminde pozitif yönler aynı seçilir.  
2- Hesaplamaların bir  $t$  anı için yapıldığının farkında olmak gerekir.

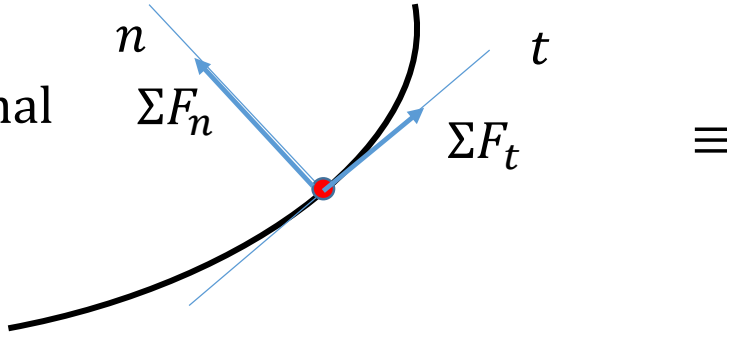
## Diğer Koordinat Sistemlerinde D'Alembert İlkesi:

Dış kuvvetler sistemi

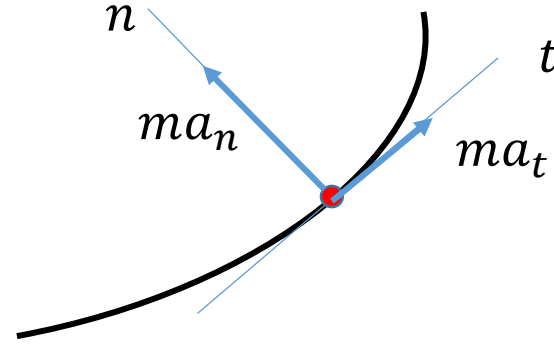
$\equiv$

Efektif kuvvetler sist.

**b-) Teğetsel-Normal Koordinatlar**



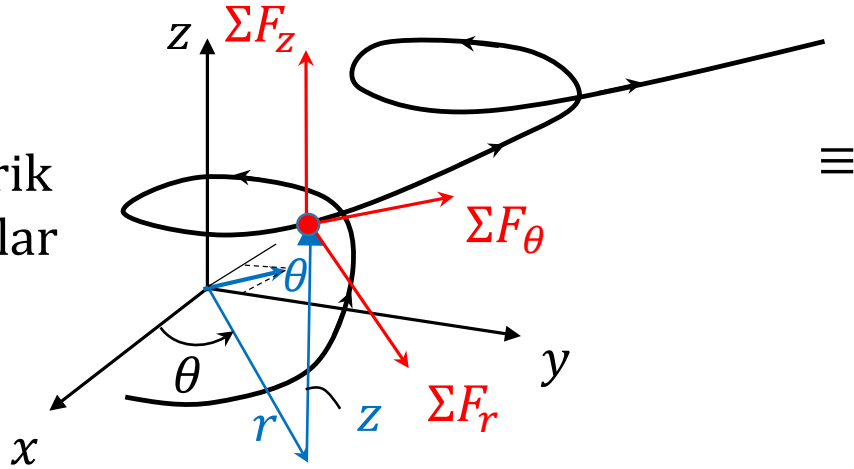
$\equiv$



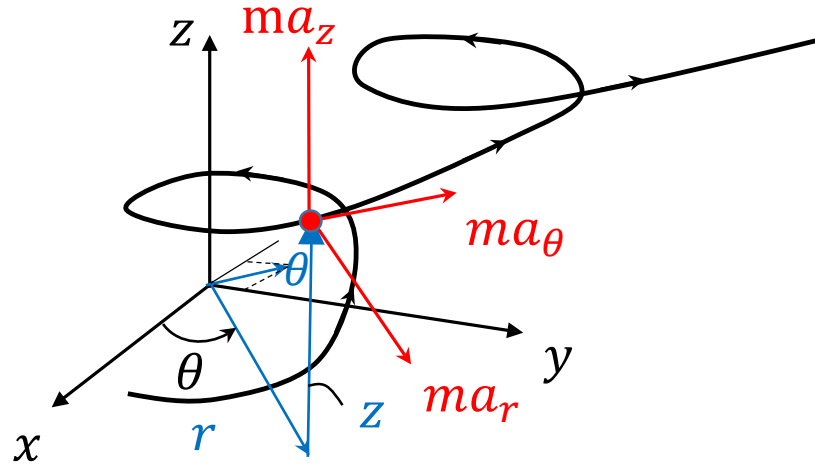
$$\Sigma F_t = ma_t \quad (\text{D.2.4.a})$$

$$\Sigma F_n = ma_n \quad (\text{D.2.4.b})$$

**c-) Silindirik Koordinatlar**



$\equiv$



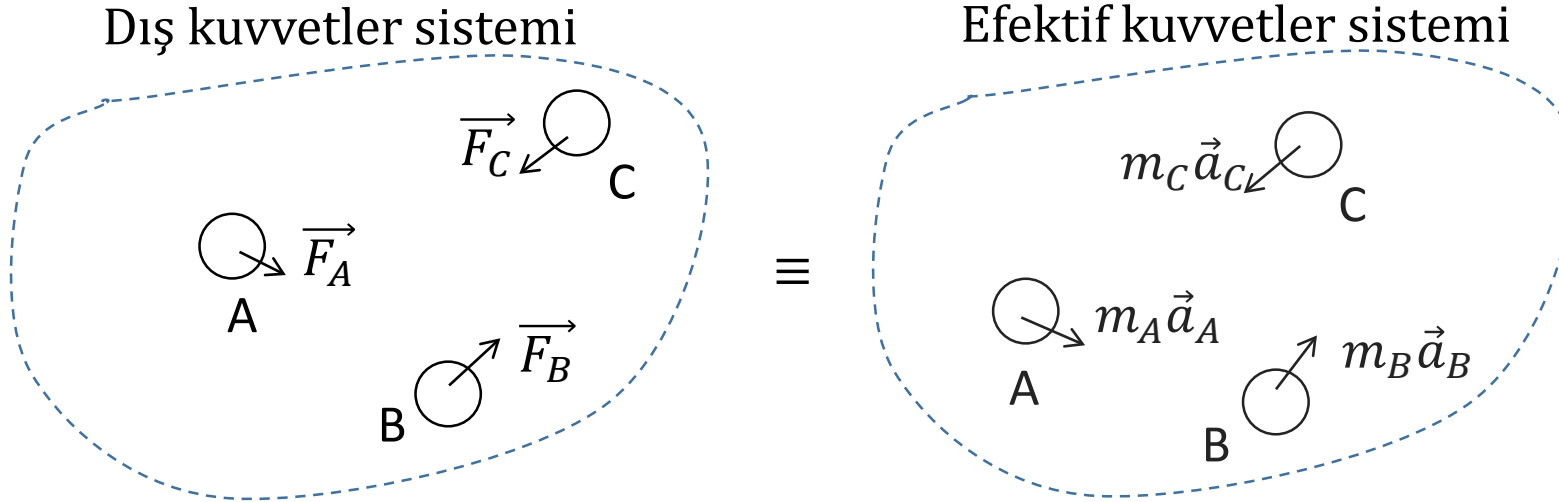
$$\Sigma F_r = ma_r \quad (\text{D.2.5.a})$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta \quad (\text{D.2.5.b})$$

$$\Sigma F_z = ma_z \quad (\text{D.2.5.c})$$

## 2.1.2 Maddesel Noktalar Sistemi için D'Alembert İlkesi:

Birden fazla maddesel noktadan oluşan bir sisteme maddesel noktalar sistemi denir. D'Alembert Prensibi bu sistem için de uygulanabilir.



Vektörel:

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma m_i \vec{a}_i \rightarrow \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \dots = m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B + m_C \vec{a}_C + \dots \quad (D.2.6)$$

Skaler:

$$\Sigma F_x = \Sigma m_i a_{ix} \rightarrow F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} + \dots = m_A a_{Ax} + m_B a_{Bx} + m_C a_{Cx} + \dots \quad (D.2.7.a)$$

$$\Sigma F_y = \Sigma m_i a_{iy} \rightarrow F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} + \dots = m_A a_{Ay} + m_B a_{By} + m_C a_{Cy} + \dots \quad (D.2.7.b)$$

$$\Sigma F_z = \Sigma m_i a_{iz} \rightarrow F_{Az} + F_{Bz} + F_{Cz} + \dots = m_A a_{Az} + m_B a_{Bz} + m_C a_{Cz} + \dots \quad (D.2.7.c)$$

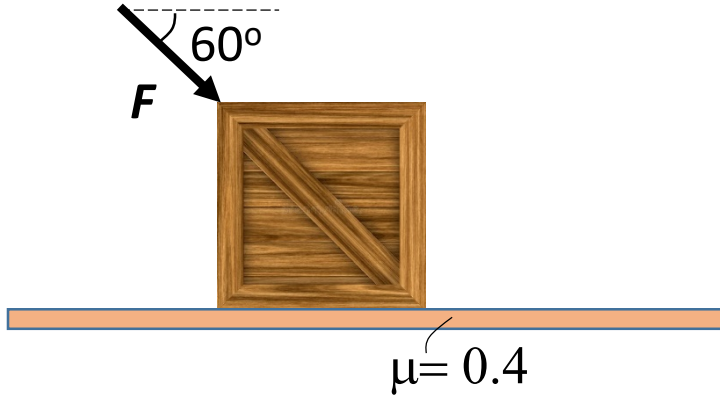
27.10.2023

**Not-1:** 2nci çözüm alternatifi:  
D'Alembert prensibi yerine 2.3 denklemlerinde sağ taraftaki terimler sola atılarak çözüme gidilir. Bu durumda  $m \cdot a$  çarpımı atalet kuvvetidir.

|                           |   |                                     |           |
|---------------------------|---|-------------------------------------|-----------|
| Dinamik denge denklemleri | } | Atalet kuvvetleri                   |           |
|                           |   | $\Sigma F_x - \overbrace{ma_x} = 0$ | (D.2.8.a) |
|                           |   | $\Sigma F_y - ma_y = 0$             | (D.2.8.b) |
|                           |   | $\Sigma F_z - ma_z = 0$             | (D.2.8.c) |

\* Bu notlarda ise biz D'Alembert prensibi ile çözümler yapacağız.

\*Rijit cisimler için bu yöntemde ilaveten moment denklemleri geleceği şimdiden aklımızda olsun.

**Örnek 2.1.1** [\(Video 2.1 - Örnek 2.1\)](#)

Hareketsiz halde bulunan 400 N ağırlığındaki sandığa, yatayla  $60^\circ$  açı yapacak şekilde 2kN luk bir  $F$  kuvveti etki ediyor. Sandık yatay yönde harekete başlıyor. Sandık ile yüzey arasındaki hareket sırasında kinetik sürtünme katsayısı 0.4 olduğuna göre,

**a-)** sandığın ivmesini ve

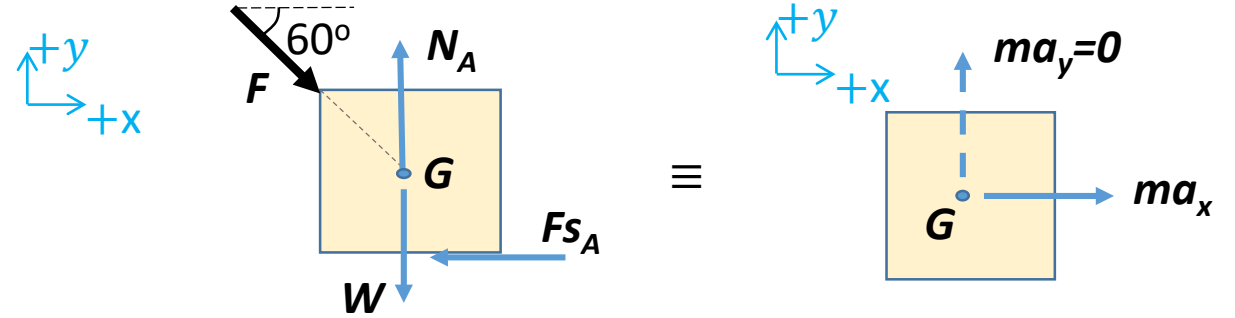
**b-)** 10 saniye sonra sandığın ilk konumundan ne kadar uzaklaştığını ve bu andaki hızını hesaplayınız.

**Çözüm:**

y yönünde hareket olmadığı için  $a_y = 0$

**a-)**

Dış kuvvetler sistemi  $\equiv$  Efektif kuvvetler sistemi



$$\Sigma F_y = ma_y = 0$$

$$\rightarrow N_A - W - F \sin 60 = N_A - 400 - 2000 \sin 60^\circ = 0 \rightarrow N_A = 2132 \text{ N}$$

$$\text{Sürtünme kuvveti: } F_{sA} = \mu_k N_A = (0.4)(2132) \rightarrow F_{sA} = 852.8 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

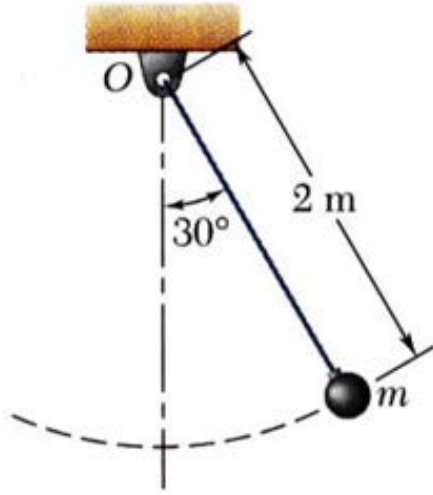
$$F \cos 60^\circ - F_{sA} = \frac{W}{g} a_x \rightarrow 2000 \cos 60^\circ - 852.8 = \frac{400}{9.81} a_x \rightarrow a_x = 3.61 \text{ m/s}^2$$

**b-)** Sabit ivmeli doğrusal hareket (DDDH) :

$$s = s_0^0 + v_0^0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$t = 10 \text{ sn} \rightarrow s = \frac{1}{2} 3.61 \times 10^2 \rightarrow s = 180.5 \text{ m} \text{ uzaklaşmıştır.}$$

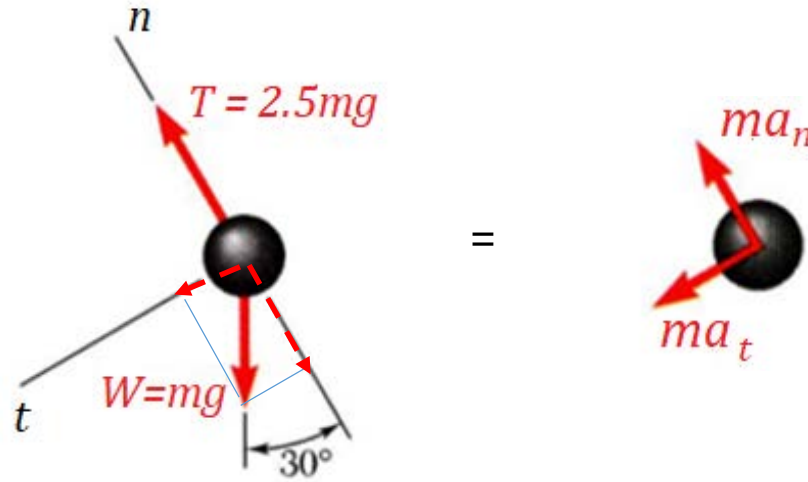
$$\text{hızı: } v = v_0^0 + a_x 10 = 3.61 \times 10 \rightarrow v = 36.1 \text{ m/s}$$

**Örnek 2.1.2**

Şekildeki  $m$  kütleli top bir ipe bağlanarak bir sarkaç oluşturulmuştur. Sarkaç  $30^\circ$  lik konumdan geçerken ipteki  $T$  kuvveti, top ağırlığının 2.5 katıdır. Buna göre bu konumda topun ivme bileşenlerini ve hızını hesaplayınız.  $g=9.8\text{m/s}^2$

**Çözüm**

Dış Kuvvetler Sist. = Efektif Kuvvetler Sist.



$$\sum F_t = ma_t$$

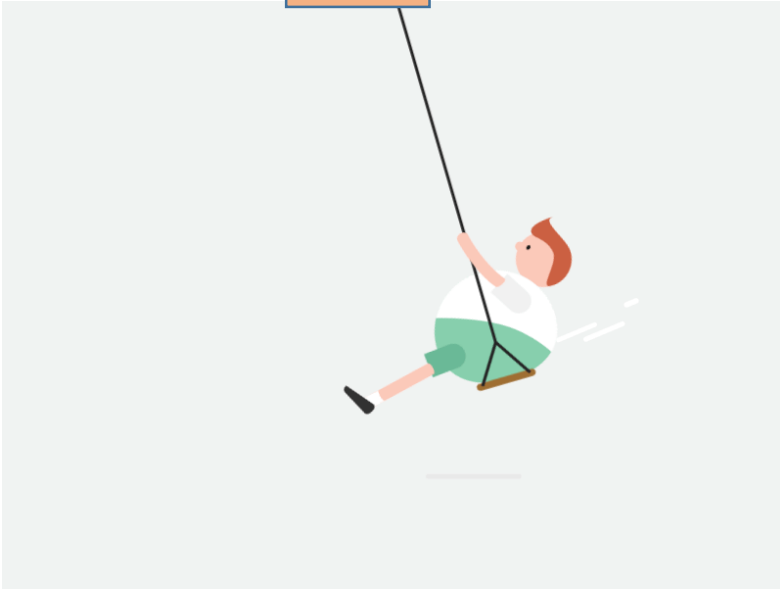
$$mg \sin 30^\circ = ma_t \rightarrow a_t = 9.8 \sin 30^\circ \rightarrow a_t = 4.9 \text{ m/s}^2$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$2.5mg - mg \cos 30^\circ = ma_n \rightarrow a_n = 9.8(2.5 - \cos 30^\circ) \rightarrow a_n = 16.01 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow v = \sqrt{\rho a_n} = \sqrt{(2\text{m})(16.01 \text{ m/s}^2)} \rightarrow v = \pm 5.66 \text{ m/s}$$



**Örnek 2.1.3**[\(Video 2.1 - Örnek 2.2\)](#)

40kg ağırlığında bir çocuk, 2 metrelik zincire sahip bir salıncakta sallanıyor. Salıncak aşağı doğru hareket ederken zincirin düşeyle yaptığı açı  $60^\circ$  ve salıncığın hızı  $4\text{m/s}$  dir. Bu konumda çocuğun toplam ivmesini ve salıncak zincirlerinden birisindeki kuvveti hesaplayınız. Salıncak tahtasının ağırlığını ihmal ediniz. ( $g = 10\text{m/s}^2$ )

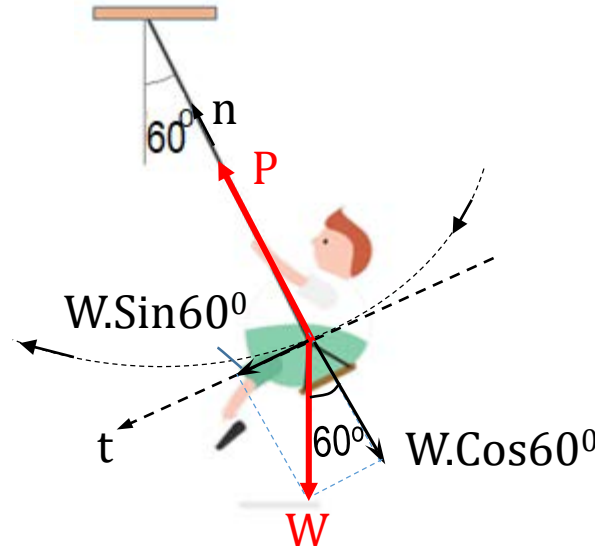
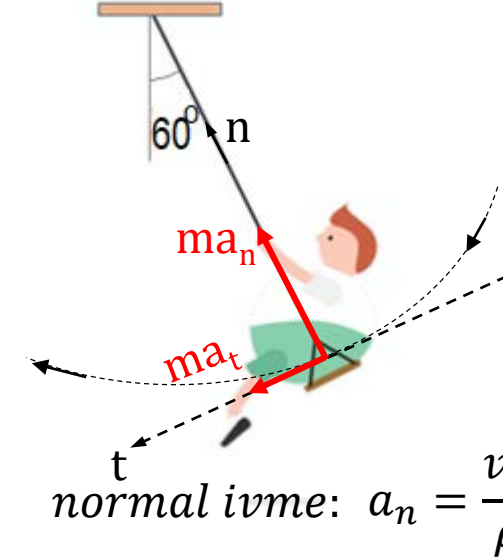
**Çözüm:**

Teğetsel ve Normal Eksen Takımında,

Dış kuvvetler sistemi

 $\equiv$ 

Efektif kuvvetler sistemi

 $\equiv$ 

$$\text{normal ivme: } a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ m/s}^2$$

$$\Sigma F_t = ma_t$$

$$W \sin 60^\circ = \frac{W}{g} a_t$$

$$\Sigma F_n = ma_n$$

$$P - W \cos 60^\circ = \frac{W}{g} \cdot 8$$

$$a_t = g \sin 60^\circ = 10(\sin 60^\circ)$$

$$a_t = 8.66 \text{ m/s}^2$$

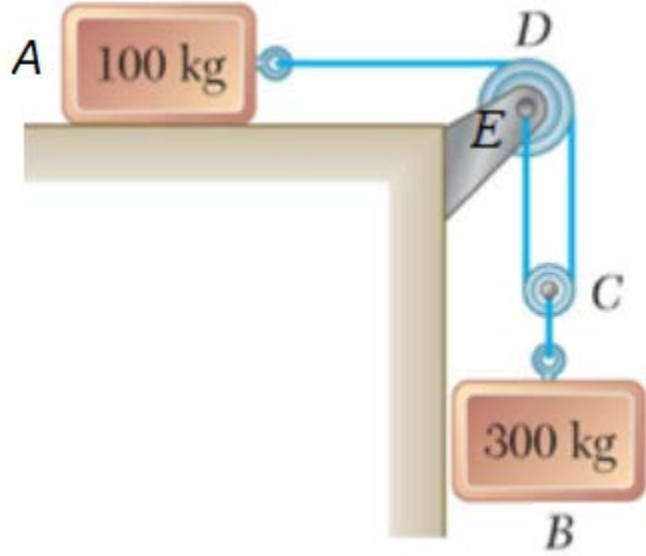
$$P - 40(10)(\cos 60^\circ) = \frac{40(10)}{10}(8)$$

$$\rightarrow P = 520 \text{ N} \quad \rightarrow P/2 = 260 \text{ N}$$

Bir zincirdeki kuvvet

$$\text{Toplam ivme: } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \rightarrow a = 11.79 \text{ m/s}^2$$

## Örnek 2.1.4

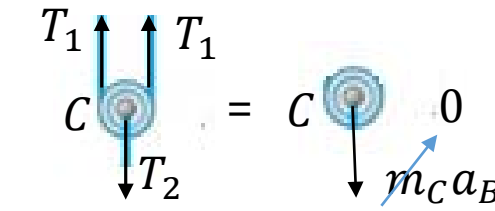


Şekildeki sistem hareketsiz halde iken serbest bırakılıyor. C ve D makaralarının ağırlığını ve sürtünmeleri ihmal ederek;

**a-)** A ve B bloklarının ivmelerini ve iplerdeki kuvvetleri bulunuz.

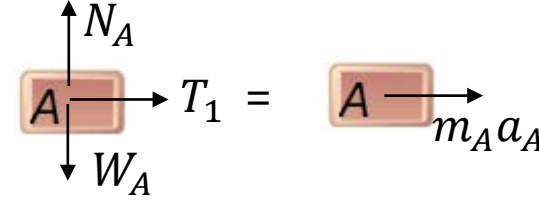
**b-)** 2 saniye sonra A bloğunun ne kadar sürüklendiğini hesaplayınız.

*Püf noktası: Bir ipten tek germe kuvveti olur. ADCE tek iptir ve germe kuvveti  $T_1$  dir. CB ayrı bir iptir. Germe kuvveti  $T_2$  alınmıştır.*



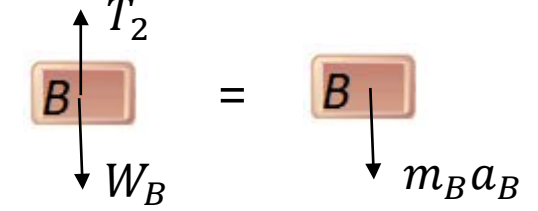
$$\Sigma F_y = 2T_1 - T_2 = m_C a_B = 0$$

$$2T_1 = T_2 \quad (2)$$



$$\Sigma F_x = T_1 = m_A a_A$$

$$T_1 = 100(2a_B) \quad (3)$$



$$\Sigma F_y = T_2 - W_B = m_B a_B$$

$$T_2 - (300)(9.81) = 300a_B \quad (4)$$

$$(1), (2), (3) \text{ ve } (4) \left\{ \begin{array}{l} a_B = 4.2 \text{ m/s}^2, a_A = 8.4 \text{ m/s}^2, T_1 = 840 \text{ N}, T_2 = 1680 \text{ N} \end{array} \right.$$

**b-)**  $t = 2$  .saniyede A bloğunun aldığı yol:  $s_{A-2} = v_0 + a_A t = 0 + (8.4)2 = 16.8 \text{ m}$

## Çözüm:

**a-)** herhangi bir t anında

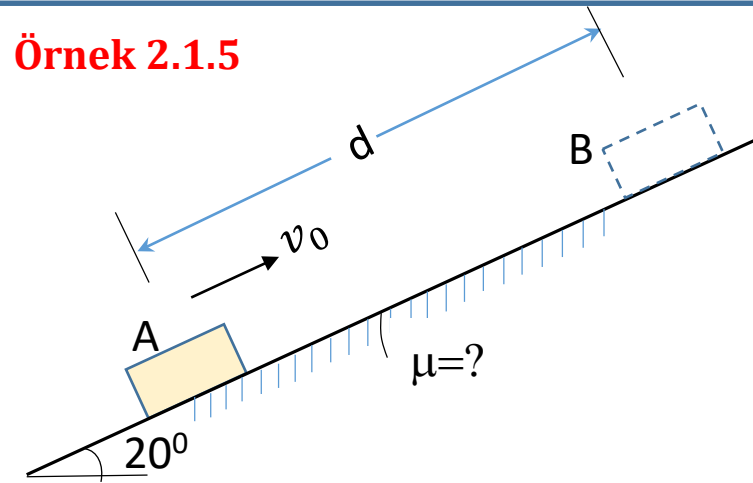
- $x_A$  ve  $y_B$ : kütlelerin konumlarıdır.

İpin toplam boyu değişmez:  $|x_A| + 2|y_B| = \text{sbt}$

Konumların zamana göre 2nci türevleri ivmelere eşittir.  $|\ddot{x}_A| + 2|\ddot{y}_B| = 0$

$$|a_A| + 2|a_B| = 0 \rightarrow a_A = 2a_B \quad (1)$$

Dış Kuvvetler Sist. = Efektif Kuvvetler Sist.

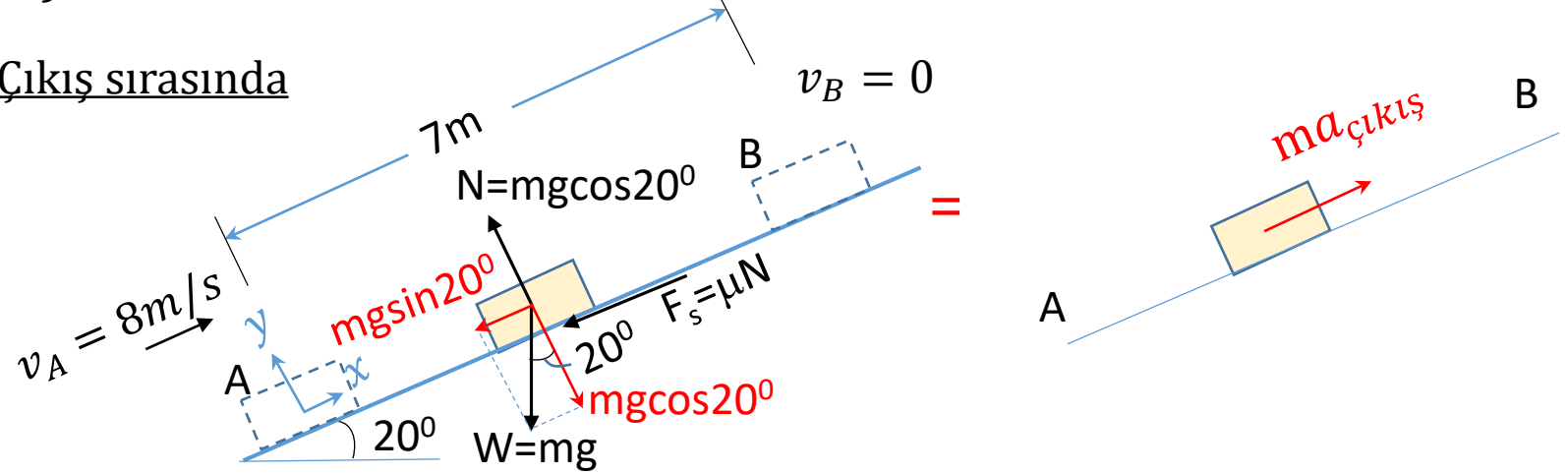
**Örnek 2.1.5**

Bir paket  $20^\circ$  eğimli bir rampa üzerinde  $8 \text{ m/s}$  lik ilk hız ile yukarı doğru itiliyor. Paket rampa üzerinde B noktasına geldikten sonra tekrar A noktasına geriye kayıyor. A ve B noktaları arasındaki  $d$  uzaklığı  $7 \text{ m}$  olduğuna göre; a-) Rampa ile paket arasında sürtünme katsayısını, b-) Geri dönüşte A ya geldiği zaman paketin hızını hesaplayınız

**Çözüm:**

a-)

Dış Kuvvetler Sist. = Efektif Kuvvetler Sist.

Çıkış sırasında

y yönünde hareket olmadığı için o yönde statik denge sağlanır:  $N = mg \cos 20^\circ$   
Eksen takımını A noktasına yerleştirelim.

Dış kuvvetleri ve efektif kuvvetleri yönlerine ve işaretlerine dikkat ederek yazarız:

$$\rightarrow +x : \sum F_x = ma_{\text{çıkış}} \rightarrow -mg \sin 20^\circ - F_s = ma_{\text{çıkış}}$$

$$\rightarrow -mg \sin 20^\circ - \mu \cdot mg \cos 20^\circ = ma_{\text{çıkış}} \rightarrow a_{\text{çıkış}} = -9.81(\sin 20^\circ + \mu \cos 20^\circ)$$

Sabit ivmeli doğrusal harekette geçerli olan ( D.1.9 nolu ) zamansız hız formülü:

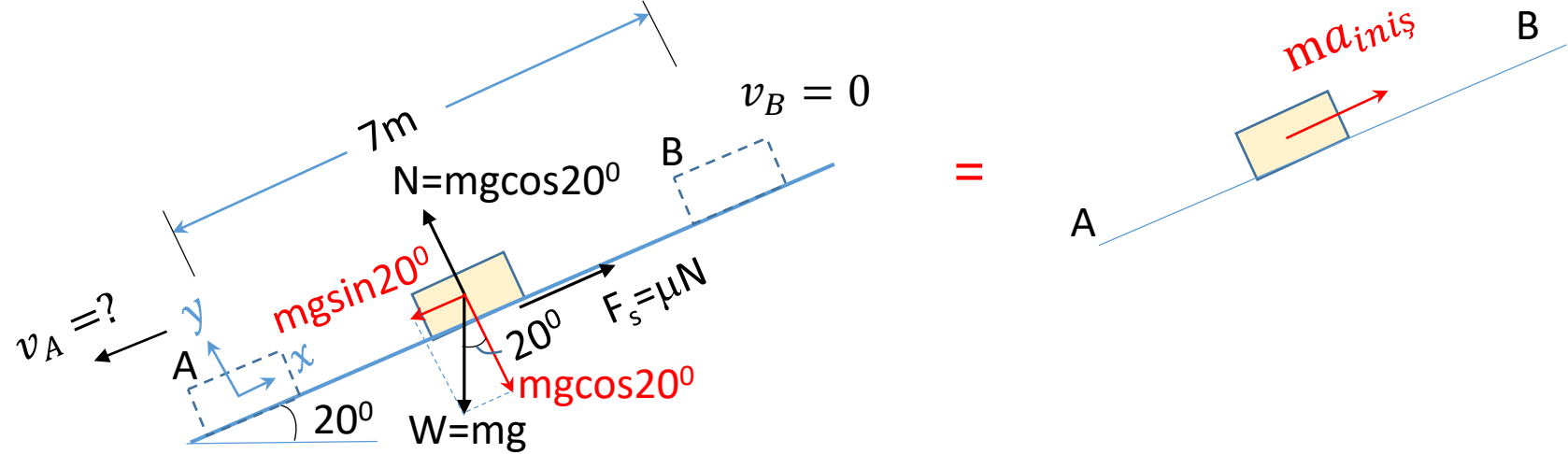
$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_{\text{çıkış}}(x_B - x_A)$$

$$\rightarrow 0^2 = 8^2 + 2(-9.81)(\sin 20^\circ + \mu \cos 20^\circ)(7 - 0) \rightarrow \mu = 0.132 \quad \text{Kinetik sürt. katsayısı}$$

*İvme  $+x$  yönünde kabul edilmiştir. Dikkat edilirse işareti negatif çıkar. Bu seçtiğimiz yönün tersinde olduğunu gösterir. Yerçekimi ivmesi pozitif kabul edilerek işlemler yazılmıştır.*

b-)

Dış Kuvvetler Sist. = Efektif Kuvvetler Sist.

İniş sırasındabenzer işlemleri uygulayarak  $v_A$  hızını bulacağız.İniş sırasında tüm kuvvetler aynı değerde olup, sadece  $F_s$  kuvveti harekete zıt yönde yani  $+x$  yönünde olacaktır.

$$\rightarrow +x : \quad \sum F_x = ma_{\text{iniş}}$$

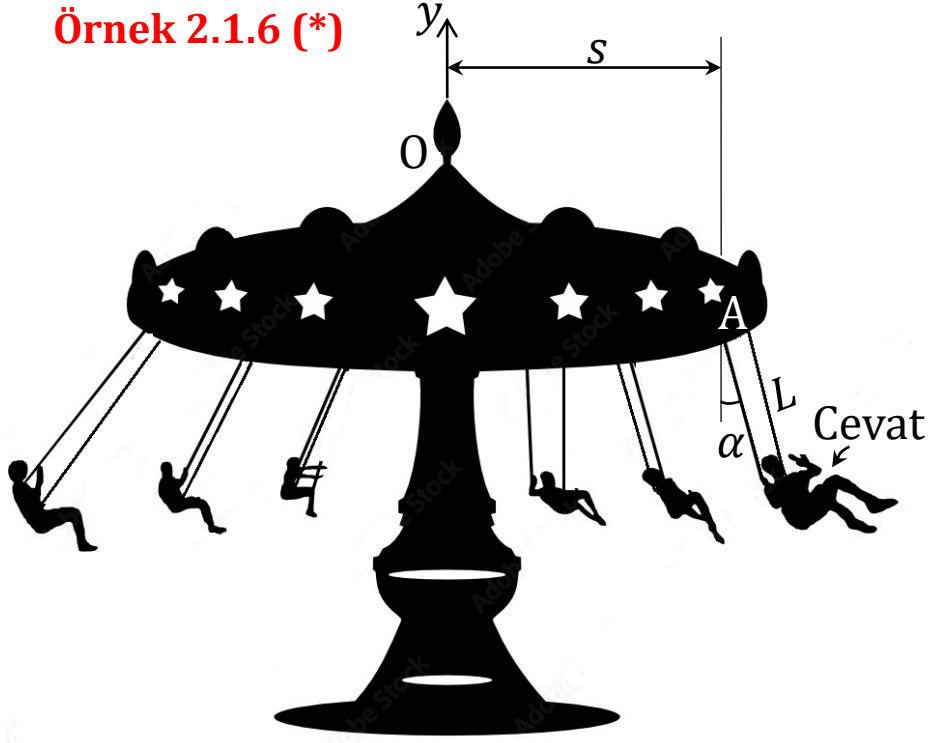
$$\rightarrow -mg \sin 20^\circ + F_s = -mg \sin 20^\circ + \mu \cdot mg \cdot \cos 20^\circ = ma_{\text{iniş}} \quad \rightarrow a_{\text{iniş}} = 9.81(-\sin 20^\circ + 0.132 \cos 20^\circ)$$

$$\rightarrow a_{\text{iniş}} = -2.138 \text{ m/s}^2$$

Zamansız hız formülünü bu sefer ilk konum B, son konum A olacak şekilde uyguluyoruz:

$$v_A^2 = v_B^2 + 2a_{\text{iniş}}(x_A - x_B) = 0^2 + (2)(-2.138)(0 - 7)$$

$$\rightarrow v_A = -5.47 \text{ m/s}$$

**Örnek 2.1.6 (\*)**

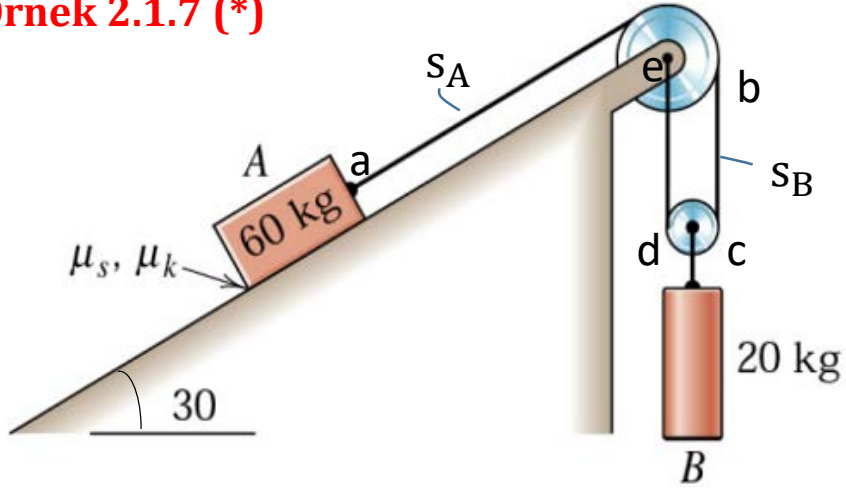
Sınavların bitmesiyle stress atmak isteyen Cevat ve arkadaşları lunaparka gidip uçan salıncağa binerler. Uçan salıncak  $y$  eksenini etrafında dönerken, salıncağın her bir zinciri düşeyle  $\alpha$  açısı yapmaktadır. Sandalye ve zincirlerin ağırlığını ihmal ederek;

a-) Cevat'ı taşıyan iki zincirde toplam ne kadarlık kuvvet oluştuğunu bulunuz.

b-) Cevat'ın dönüş hızını hesaplayınız.

( $L=10\text{m}$ ,  $s= 5\text{m}$ ,  $\alpha = 60^\circ$   $g=10\text{m/s}^2$  ve Cevat'ın ağırlığı:  $90\text{kg}$  )

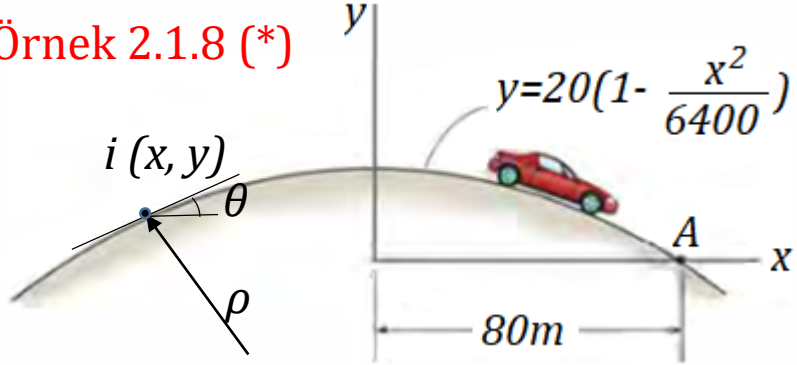
Cevap: **a-)  $T = 1800\text{N}$  , b-)  $v = 15.38\text{m/s}^2$**

**Örnek 2.1.7 (\*)**

Şekildeki hareketsiz tutulan sistemde, A kütlesi ile  $30^\circ$  lik eğik düzlem arasında kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k=0.20$ , statik sürtünme katsayısı  $\mu_s=0.25$  dir. Sistem durağan halden serbest bırakıldığında **a-)** sistemin sürtünmeleri yenip hareket edip etmeyeceğini kontrol ediniz. **b-)** Hareket ederse A kütlesine bağlı ve her iki makaradan geçirilmiş ipteki (abcde ipindeki) kuvveti ve her bir kütlenin ivmesini hesaplayınız.

**Cevaplar**

$$T = 105.35\text{N}, a_B \downarrow = 0.725\text{m/s}^2, a_A = 1.45\text{m/s}^2$$

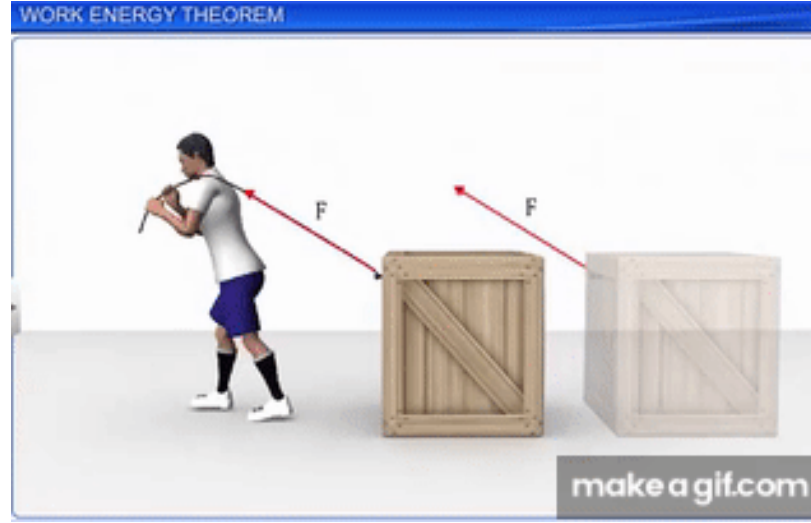
**Örnek 2.1.8 (\*)**

800kg ağırlığındaki otomobil şekilde denklemleri verilen parabolik bir eğrisel yüzey üzerinde  $3\text{m/s}^2$  sabit ivme ile sağa doğru hızını arttırarak hareket etmektedir. A noktasından geçerken hızı  $9\text{m/s}$  ise Otomobile A noktasında zeminden gelen normal kuvveti ve sürtünme kuvvetini hesaplayınız.

Yol gösterme: Bir eğrinin herhangi bir  $i(x, y)$  noktasındaki eğrilik yarıçapı ve

eğim açısı :  $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$  ; eğrilik yarıçapı:  $\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{(d^2y/dx^2)}$

Cevap:  $N=6.73\text{kN}$  ,  $F_s=1.11\text{kN}$



## 2 . Maddesel Nokta Kinetiği

# 2 .2 İş-Enerji İlkesi [Video 2.2.a](#)

## ve Enerjinin Korunumu [Video 2.2.b](#)



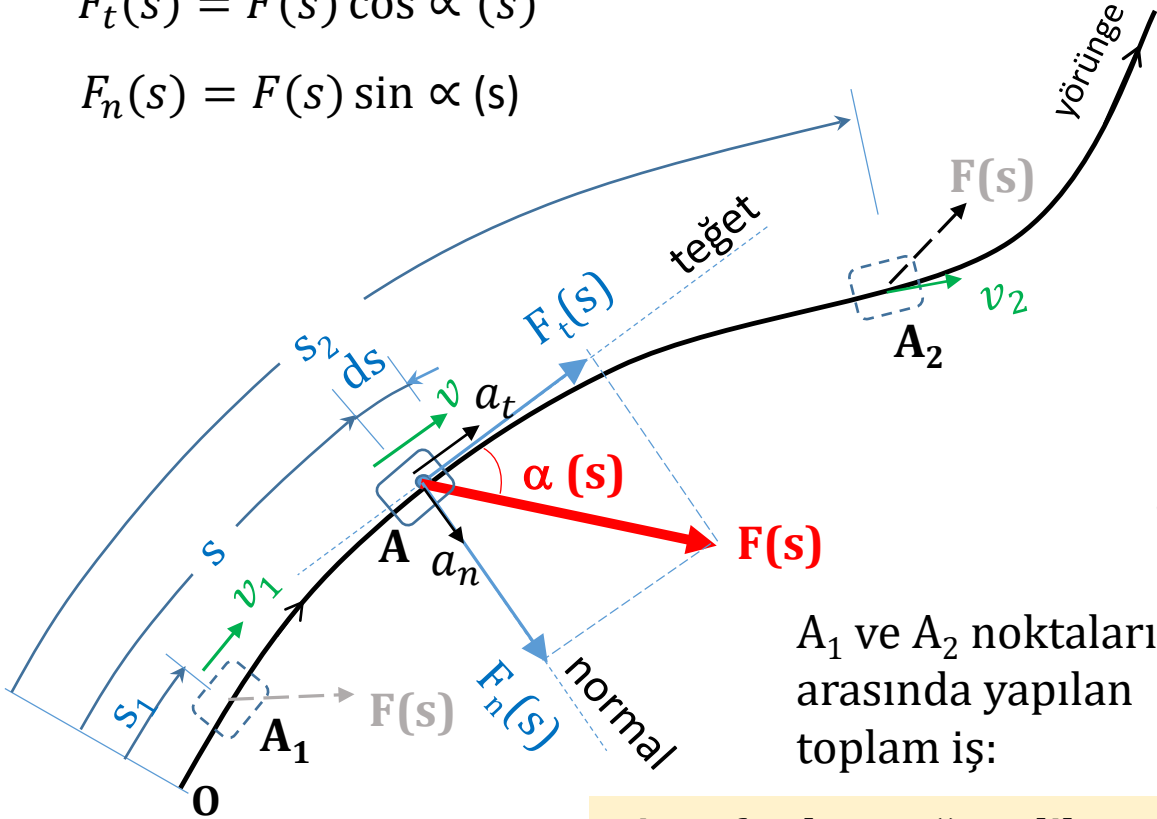
### 2.2.1 İş -Enerji Yönteminin temel özellikleri:

1. **İş-Enerji ilkesi** aslında  $F = ma$  temel denkleminin farklı şekilde yorumlanmış bir halidir.
2. Bu yöntemde ivmenin hesaba katılmasına gerek kalmadan, hız, konum veya kuvvet hesapları yapılabilir.
3. Enerjinin Korunumu ise İş-Enerji Yönteminin özel halidir.
4. Püf Noktası: Denklemler hareketin iki farklı konumu için yazılır.

### 2.2.2 En genel durumda Değişken Bir Kuvvetin İş :

$$F_t(s) = F(s) \cos \alpha(s)$$

$$F_n(s) = F(s) \sin \alpha(s)$$



En genel durumda, Bir maddesel nokta 3 boyutlu eğrisel bir yörüngede hareket ederken üzerine etki eden  $F$  kuvvetinin şiddeti ve yönü yörünge ( $s$ ) boyunca değişkendir:  $F(s)$

**İş** = Kuvvet x Kuvvet yönünde alınan net yol

tanımından hareketle,

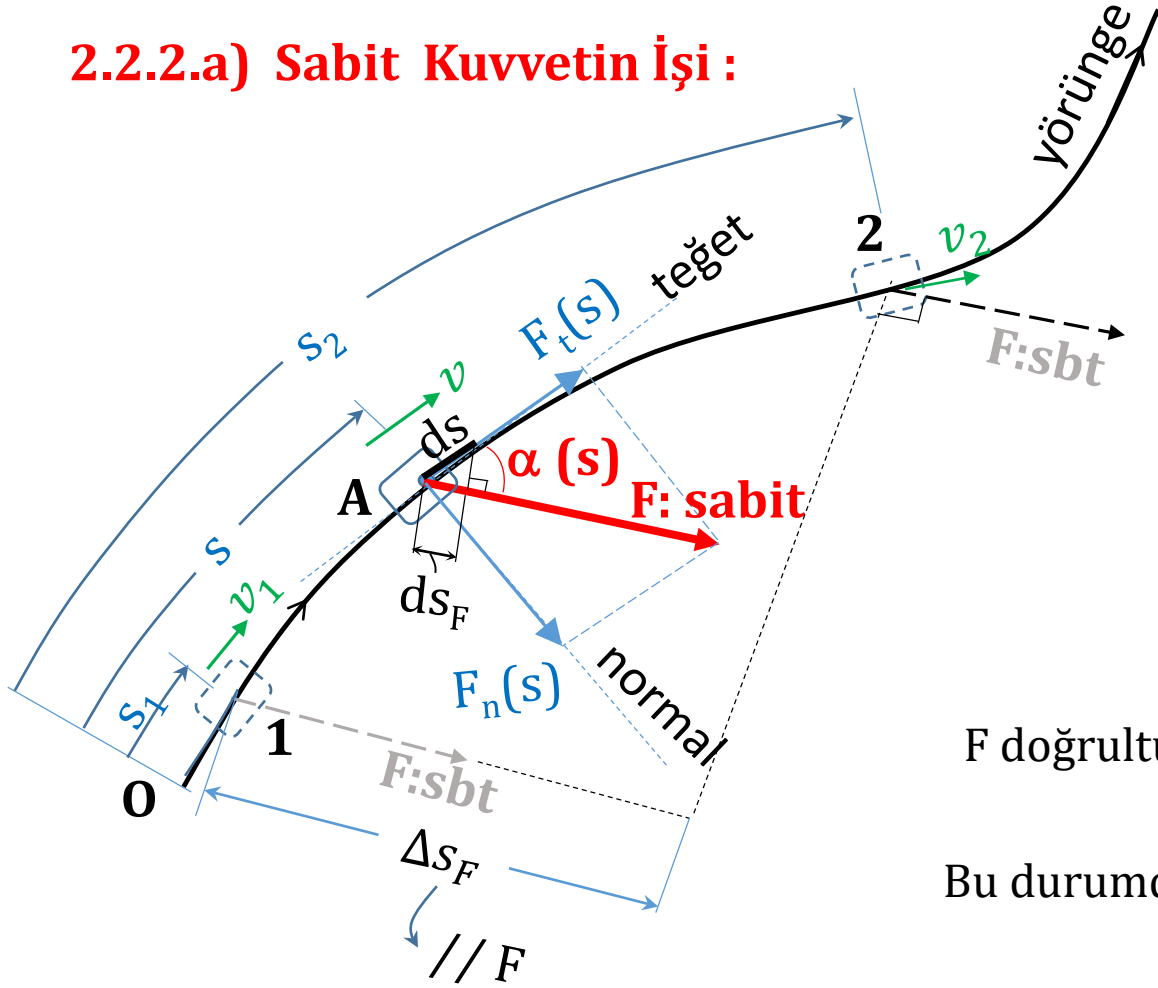
- Herbir  $t$  anında teğet yönünde hareket edildiğinden sadece kuvvetin teğetsel bileşenleri  $F_t(s)$  iş yapar.
- Hiçbir  $t$  anında normal doğrultuda yol alınmaz ve  $F_n(s)$  bileşenleri iş yapmaz.
- A gibi bir konumda alınan diferansiyel yol  $ds$  olup, yapılan diferansiyel iş:  $du = F_t(s)ds$  (D.2.9)

$A_1$  ve  $A_2$  noktaları arasında yapılan toplam iş:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} du = \int_{s_1}^{s_2} F_t(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cos \alpha(s) ds \quad (D.2.10)$$

**Bir Püf noktası öğrendik:** Bir kuvvet doğrultusunda yol alınmıyorsa o kuvvet iş yapmaz. ( $F_n(s)$  gibi.)

### 2.2.2.a) Sabit Kuvvetin İş:



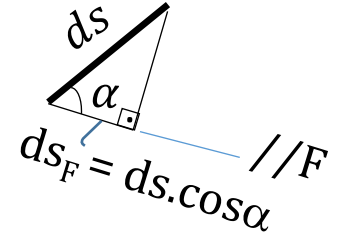
Bir maddesel nokta 3 boyutlu eğrisel bir yörüngede hareket ederken üzerine etki eden, şiddeti ve yönü sabit olan bir  $F$  kuvvetinin 1-2 konumları arasındaki yaptığı işi bulmak istiyoruz.

$F$ : sabit       $\alpha(s)$ : değişken (yörünge eğrisel olduğundan)

Kuvvetin teğetsel bileşeni:  $F_t(s) = F \cdot \cos \alpha(s)$ : Değişken olur

D.2.10 genel denklemini düşünürsek:

$$U_{1-2}^F = \int F_t(s) ds = F \int_{s_1}^{s_2} \cos \alpha ds$$



$F$  doğrultusunda alınan diferansiyel yol:  $ds_F$  (F doğrultusunda alınan net yoldur)

Bu durumda:  $\int_{s_1}^{s_2} \cos \alpha ds = \int_{s_1}^{s_2} ds_F = \Delta s_F \rightarrow U_{1-2}^F = F \cdot \Delta s_F$  (D.2.11)

**F Sabit kuvvetinin işi:**

Kuvvet x Kuvvet doğrultusunda alınan net yol

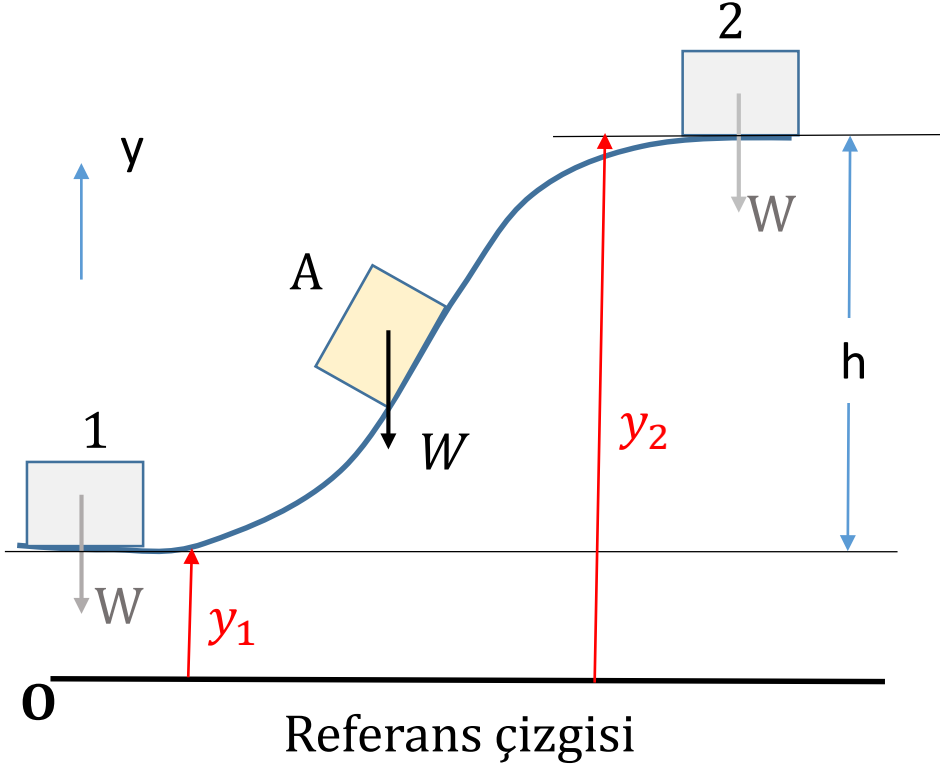
**İşin İşaretini belirlemek için Genel kaide:** Kuvvetin yönünde yol alınıyorsa o kuvvetin işi pozitif aksi halde negatiftir. Yukarıda şekilde, 1 den 2 ye gidilmekte, dolayısıyla  $\Delta s_F$  ile  $F$  yönleri aynı olmaktadır. Yani  $F$  Kuvveti yönünde yol alınmaktadır. Bu sebeple  $F$  kuvvetinin işi pozitif olur ( $U_{1-2}^F > 0$ ).

**2.2.2.b) Ağırlık kuvvetinin işi:**

Ağırlık kuvvetinin şiddeti ve yönü hareket boyunca değişmediğinden sabit kuvvettir.

0 halde D.2.11 denklemini uygulayabiliriz.

Ağırlık Kuvvetinin İş = Kuvvet x Kuvvet yönünde alınan net yol



**1.Alternatif:**

$$(U^W_{1-2}) = -W \cdot h \quad (\text{D.2.12.a})$$

**İşin İşaretini şu yorumla belirleriz:** Sistemdeki tüm kuvvetlerin etkisi ile 1 konumundan 2 konumuna doğru gidilmiştir. (W : yukarıdan aşağı, alınan yol : aşağıdan yukarı)

W nin zıt yönünde yol alındığından ağırlık kuvvetinin işi negatif alınır. Başa eksi işareti koyulur. (2 den 1 e gidilseydi ağırlık kuvvetinin işi pozitif olurdu. - işareti olmazdı.)

**2nci alternatif:**

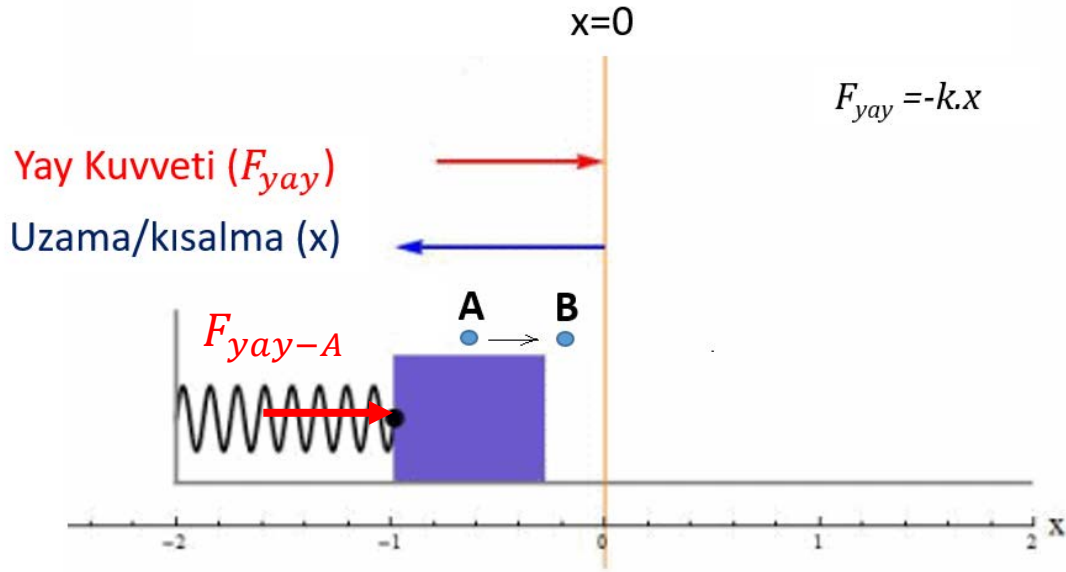
$$(U^W_{1-2}) = W \cdot (y_1 - y_2) \quad (\text{D.2.12.b})$$

**İşin İşareti :** D.1.2.b denklemi doğru yazılırsa işin işaretide kendiliğinde ortaya çıkar. Sonradan üstteki yorumum yapılmasına gerek kalmaz. (Ama yapılmasında yine de fayda vardır.)

**Dikkat:** 1: Daima hareketin ilk konumu, 2: ikinci konum olarak yazılmalıdır.

- Üstteki şekilde aşağıdan yukarıya gidildiği için 1 altta 2 üsttedir.  $y_1 < y_2$  olduğundan iş negatif çıkar. Yukarıdan aşağıya gidilseydi, 1 :üst, 2 alt konum olurdu.  $y_1 > y_2$  olacaktı ve iş pozitif çıkacaktı.

**Şimdiden aklımızda olsun:** Ağırlık Kuvvetinin İş Potansiyel Enerjiye eşittir. Denklemler de ikisinden birisi yazılır. Her ikisi yazılırsa aynı terim iki kez yazılmış olur ki bu yanlış olur. Potansiyel enerji kavramı enerjinin korunumu konusunda karşımıza çıkacaktır.

**2.2.2.c) Yay Kuvvetinin İş:****Yay kuvveti ( $F_{yay}$ ):**

- yayın uzama veya kısılması durumunda ortaya çıkar.
- Yay doğrultusunda daima etki eder.
- şiddeti uzama miktarı ( $x$ ) ile doğru orantılı olup, yönü  $x$  uzama yönüne zıttır. Dolayısıyla değişken bir kuvvettir.

**Yay katsayısı  $k$ :** yayın cinsine ve malzemesine bağlı özelliğidir.

Birim uzama için yaya uygulanması gereken kuvvet olarak tanımlanır. Birimi N/m dir.  $k$  değeri büyük olan yaylar daha serttir ve bunları uzatmak için daha büyük kuvvet gerekir.

Yörünge ve  $F_{yay}$  aynı doğrultuda olduklarından her durum için yay kuvveti teğet yönündedir ve  $F_{yay} = F_t(s)$  dir.

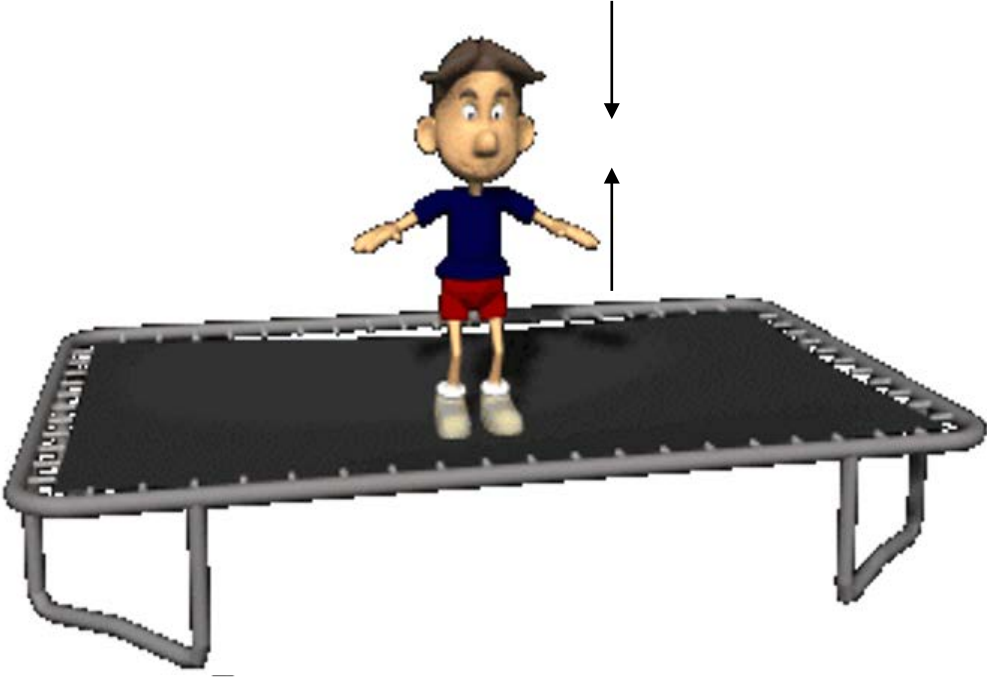
- $F_{yay}$  değişken olduğu için yaptığı iş D.2.10 genel denkleminde aşağıdaki şekilde bulunur:

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t(s) ds \rightarrow U_{1-2}^{F_{yay}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{yay} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx \rightarrow U_{1-2}^{F_{yay}} = \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_2^2) \quad (D.2.13)$$

**İşin İşareti:** D.2.13 denklemi doğru yazılırsa, işin işareti de kendiliğinden ortaya çıkmış olur. 1 : ilk konum, 2: ikinci konum  
Bununla birlikte şu kontrol de yapılır: 1-2 arasında yay kuvveti yönünde yol alınıyorsa, iş pozitif, aksi halde negatiftir.

*Örneğin: üstteki Sistemde hareket A dan B'ye doğru iken A:1 konumu, B: 2 konumu olacaktır. A da yay sıkışmış vaziyette olduğundan B'ye doğru cismi itecektir. O halde  $F_{yay}$  hareket yönündedir ve yaptığı iş pozitif olur.  $|x_1| > |x_2|$  olduğundan D.2.13 denkleminde de  $U_{1-2}^{F_{yay}} > 0$  çıkar, denklem bize işin işaretini de vermiş olur. (Hareket B den A'ya (sola) doğru iken işin negatif çıkacağını yorumlamaya çalışınız. )*

**Dikkat:** Yay kuvvetinin işi, enerjinin korunumu konusunda «elastik potansiyel enerji ( $U_e$ ) » olarak karşımıza çıkacaktır.  $U_e$  yazıldığında yay kuvvetinin işi tekrar yazılmamalıdır.



### Örnek 2.2.1

Şekildeki trambolin bir yay olarak düşünölebilir. Çocuk trambolinde yukarı aşağı zıplamaktadır. Buna göre, çocuk

a-) yukarıdan aşağıya düşerken,

b-) aşağıdan yukarıya fırlarken,

«trambolinin» ve «çocuğun ağırlığının» yaptığı işlerin işaretleri ne olur?

### Cevaplar:

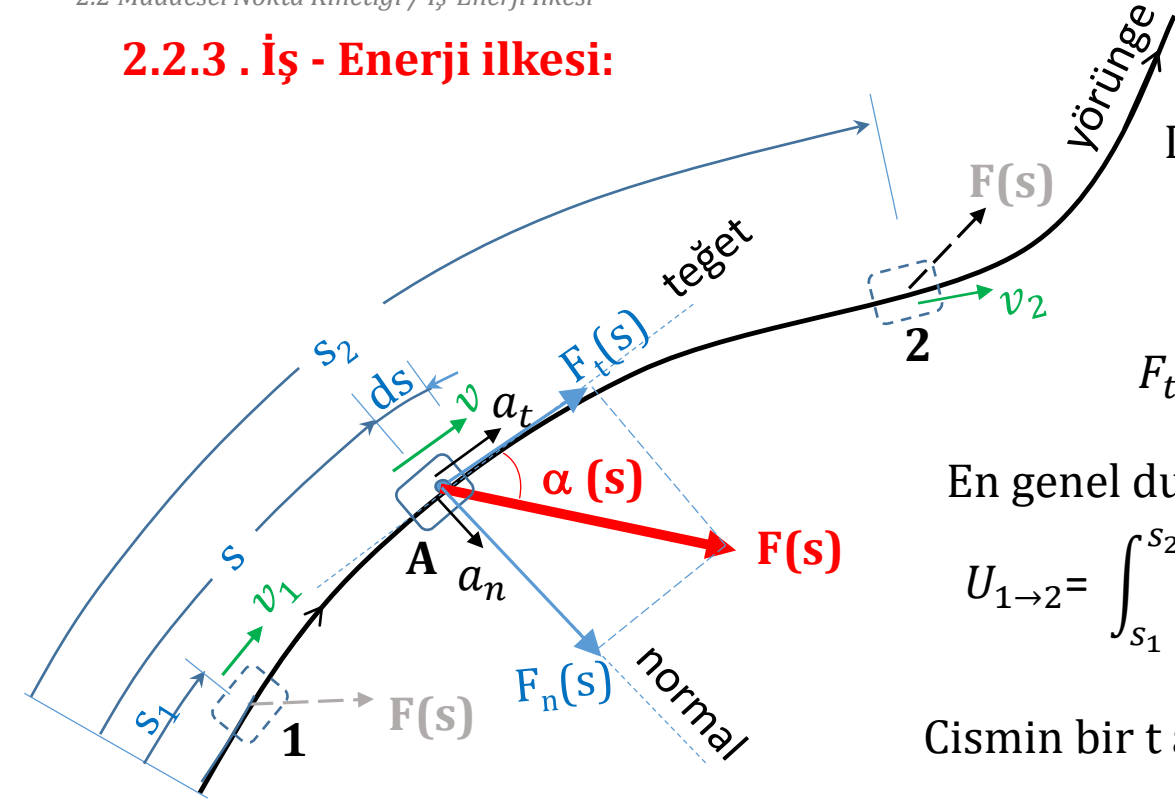
a-) Ağırlık Kuvveti Pozitif, trambolin negatif iş yapar.

b-) Ağırlık Kuvveti Negatif, trambolin pozitif iş yapar.

Cevapları aranızda tartışınız.

İş denklemlerini de yazmaya çalışınız.

## 2.2.3 . İş - Enerji ilkesi:



Eğrisel Hareket için biliyoruz ki:

D.2.4.a denkleminde, D.1.17 denkleminde, D.1.13 denkleminde

$$F_t = ma_t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds}$$

En genel durumda değişken kuvvetin işini tekrar yazalım (D.2.10 denklemini):

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} mv \frac{dv}{ds} ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

$\underbrace{\frac{1}{2} mv_2^2}_{T_2} - \underbrace{\frac{1}{2} mv_1^2}_{T_1}$

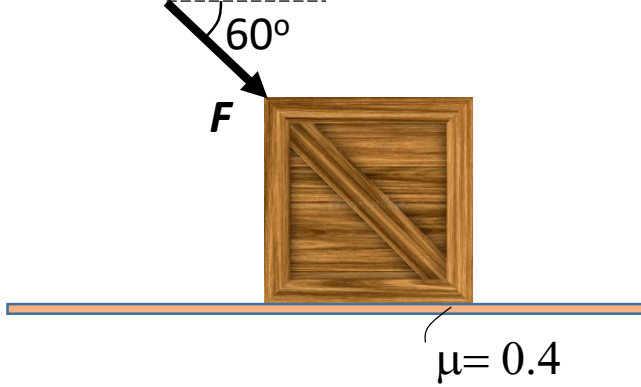
Cismin bir t anındaki kinetik enerjisi:  $T = \frac{1}{2} mv^2$ 

$$\Rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \Rightarrow \text{İş-Enerji Denklemi: } \boxed{T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2} \quad (\text{D.2.14})$$

- D.2.14 denklemi bize şunu söyler: 1 konumundaki cismin kinetik enerjisi + dış kuvvetlerin yaptığı toplam iş = 2 konumundaki kinetik enerjiyi verir.
- Ağırlık ve yay kuvvetlerinin, sürtünme kuvvetlerinin ve diğer tüm dış kuvvetlerin işleri  $U_{1 \rightarrow 2}$  teriminde dahildir. Herbirisini negatif veya pozitif iş yapar. Pozitif net iş enerjinin artmasına sebep olur.
- Bu denklemde potansiyel enerji terimleri ayrıca yazılmaz. Çünkü onlar ağırlık veya yay kuvvetlerinin işlerinin kendisidir.
- Enerjinin korunumu denklemi D.2.14 denkleminin özel halidir.
- Denklem çıkarımlarından da görüldüğü gibi İş-enerjisi ilkesi  $F=ma$  kanunun farklı şekilde yorumlanmış halidir. Yoksa bağımsız bir kanun değildir.

**Örnek 2.2.2** [\(Video 2.2.a- Örnek 2.3\)](#)

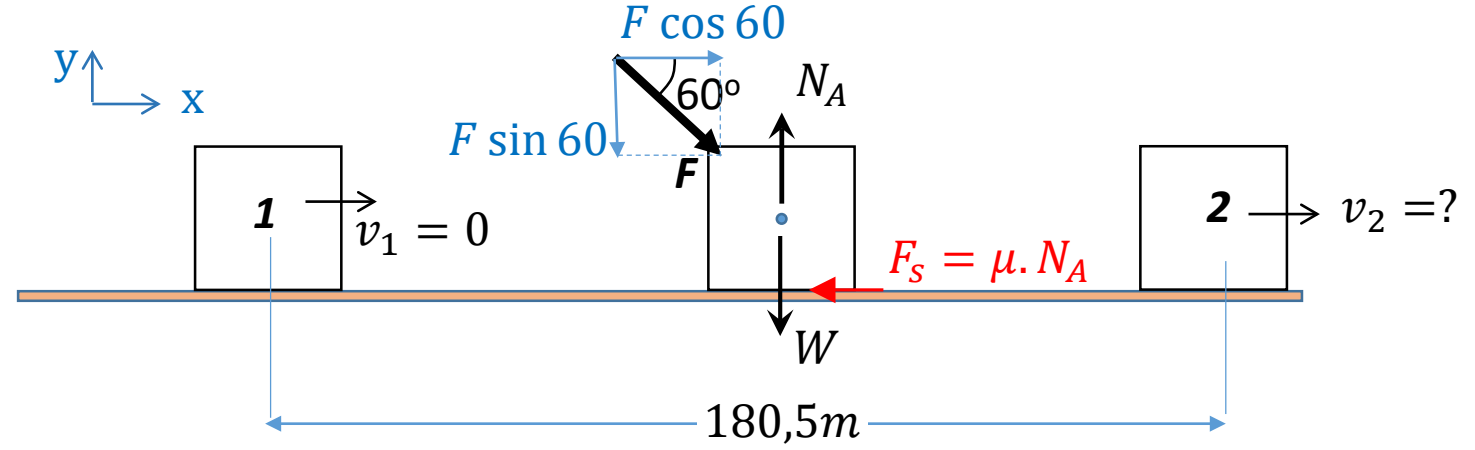
Örnek 2.1.1'in iş-enerji yöntemi ile çözümü.



Hareketsiz halde bulunan 400 N ağırlığındaki sandığa, yatayla  $60^\circ$  açı yapacak şekilde 2kN luk bir  $F$  kuvveti etki ediyor. Sandık yatay yönde harekete başlıyor. Sandık ile yüzey arasındaki hareket sırasında kinetik sürtünme katsayısı 0.4 olduğuna göre, **İş-Enerji yöntemini kullanarak** sandığın ilk konumundan 180.5 m uzaklaştığı konumdaki hızını hesaplayınız.

**Çözüm:**

*Hareket sırasında etki eden kuvvetler*



y yönünde hareket olmadığı için :  $a_y = 0$

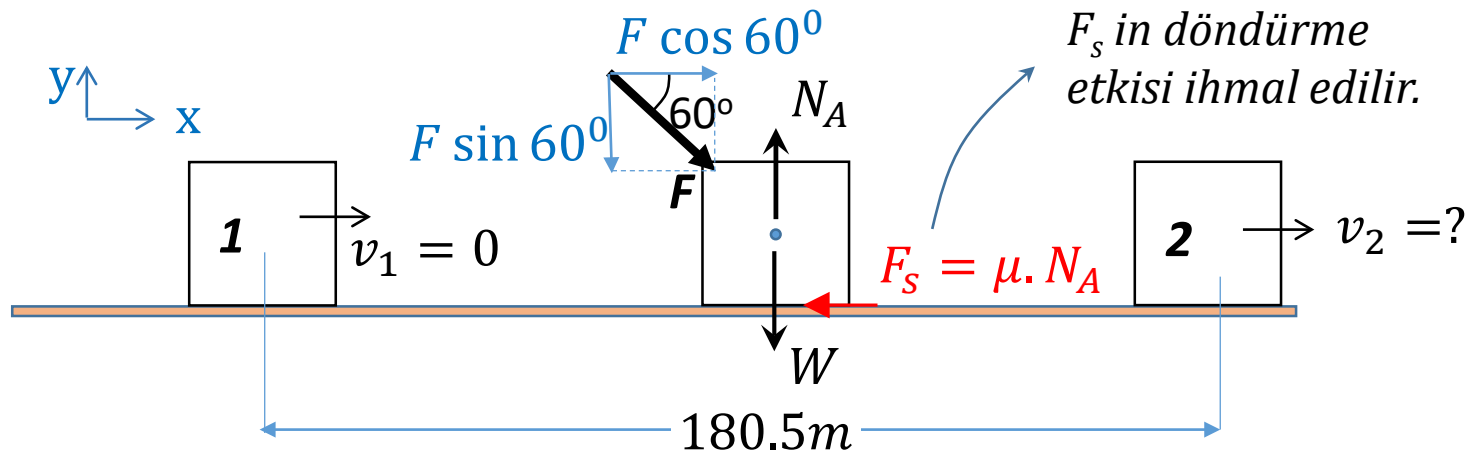
$$\Sigma F_y = ma_y = 0$$

$$N_A - W - F \sin 60^\circ = N_A - 400 - 2000 \sin 60^\circ = 0 \rightarrow N_A = 2132 \text{ N}$$

**Kinetik Enerjiler:**  $T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$  ,

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{400}{9.81} v_2^2 = 20.39 v_2^2$$





Sürtünme Kuvveti:

$$F_s = \mu \cdot N_A = 0.4(2132)$$

$$\rightarrow F_s = 852.8 \text{ N}$$

**Toplam İş ( $U_{1 \rightarrow 2}$ ) hesabı:** Hareket yönüyle aynı yönde olan  $F$  kuvvetinin  $F \cos 60^\circ$  bileşeni pozitif iş yapar. Harekete zıt yönde olan  $F_s$  sürtünme kuvveti negatif iş yapar. Düşey doğrultuda hareket olmadığı için, o doğrultudaki  $F \sin 60^\circ$  bileşeni, ayrıca  $N_A$  ve  $W$  kuvvetleri iş yapmaz. İş yapan kuvvetler ( $F \cos 60^\circ$ ,  $F_s$ ) sabit kuvvetler olup, yaptıkları iş D.2.11 denkleminde bulunur. Kendi yönlerinde alınan net yol 180.5 m dir. Buna göre:

$$U_{1-2}^F = F \cos 60^\circ \times 180,5 = 2000 \cos 60^\circ \times 180.5 = 180500 \text{ Nm}$$

$$U_{1-2}^{F_s} = -F_s 180.5 = -852.8 (180.5) = -153930.4 \text{ Nm}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = U_{1-2}^F + U_{1-2}^{F_s} = 180500 - 153930,4 \rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = 26569.6 \text{ Nm}$$

(D.2.14) İş-Enerji Denklemi'nden:  $T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \rightarrow 0 + 26569.6 = 20.39 v_2^2 \rightarrow v_2 = 36.1 \text{ m/s}$



**F kuvvetinin işini şu mantıkla da bulabilirdik. :** 2.1.2.a konusunda anlatıldığı üzere D.2.11 denkleminde

sabit kuvvetin işi = Kuvvet x kuvvet doğrultusunda alınan net yol :

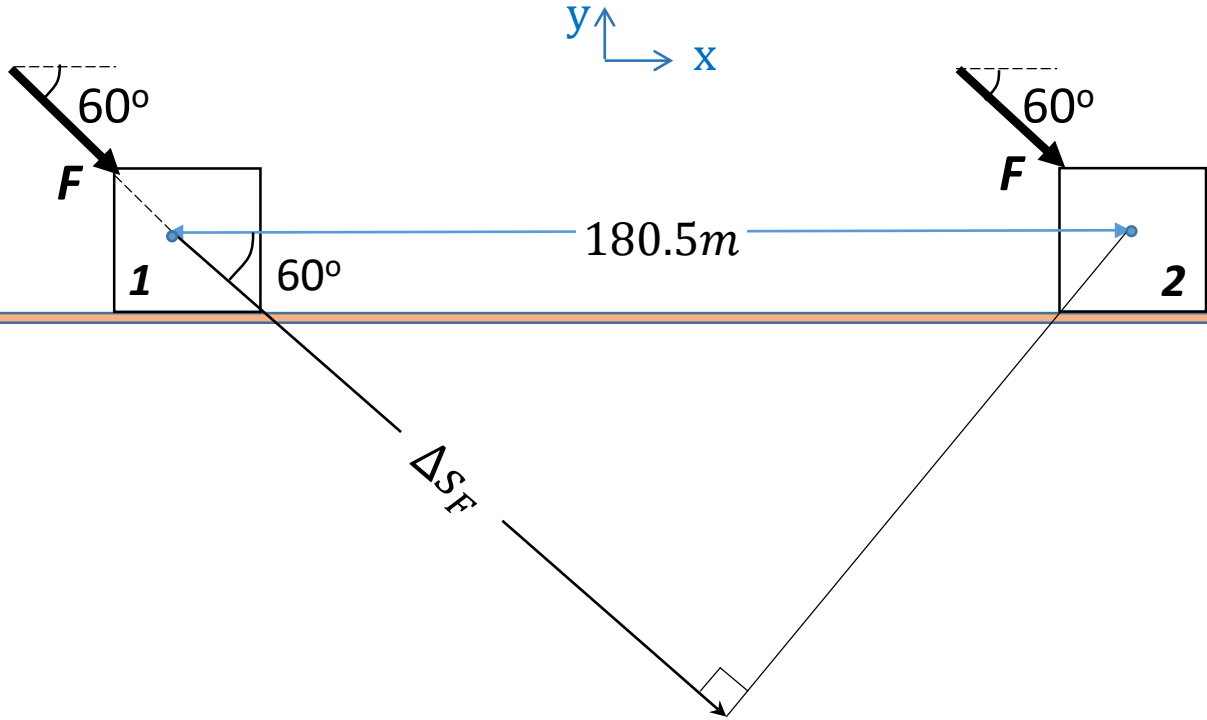
$$U^F_{1-2} = F \times \Delta S_F$$

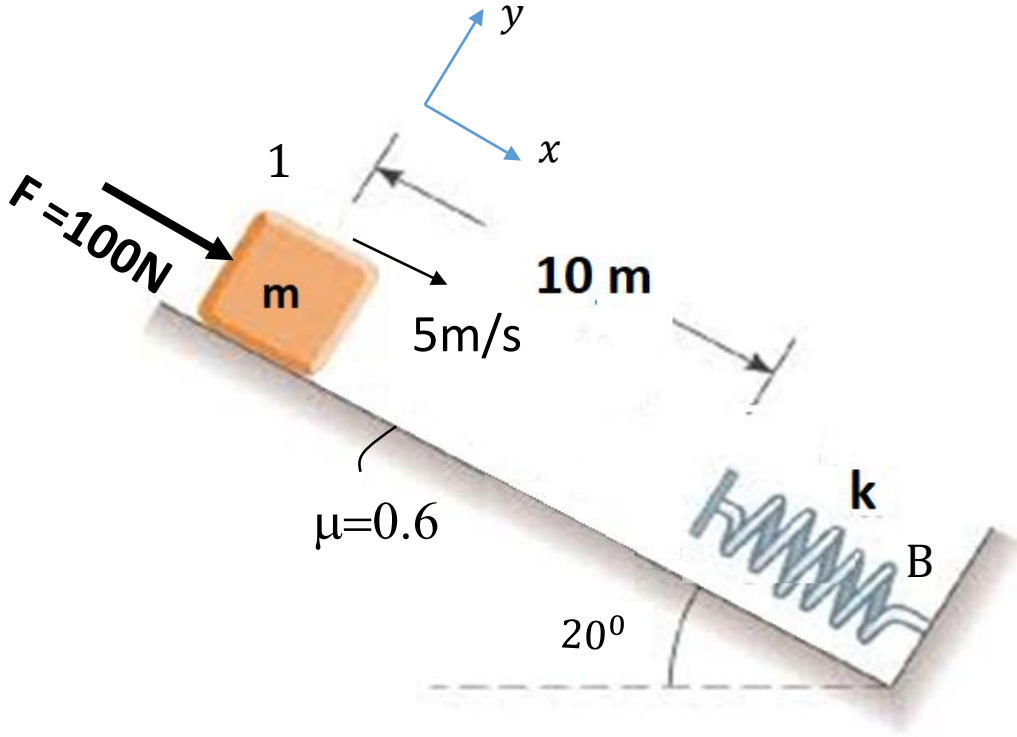
$$\Delta S_F = 180.5 (\cos 60^\circ)$$

$$U^F_{1-2} = (2000)(180.5)(\cos 60^\circ)$$

$$U^F_{1-2} = 180500 \text{ Nm}$$

- 1 den 2 ye gidildiği için  $\Delta S_F$  yolu F yönündedir. Bu sebeple yapılan iş pozitiftir.
- Bir önceki sayfadaki aynı sonucu elde ettiğimizi farkedin.
- Tüm sabit kuvvetlerin işini bu mantıkla düşünebiliriz.





### Örnek 2.2.3 [\(Video 2.2.a- Örnek 2.4\)](#)

2kg kütleli bir kutu  $20^\circ$  lik bir eğik düzlemin 1 noktasından aşağı doğru 5m/s hızla geçerken, kutuya düzleme paralel 100 N luk bir F kuvveti etki etmeye başlıyor. Kutuyla yüzey arasındaki kinetik sürtünme katsayısı 0.6 olduğuna göre, eğik düzlemin sonundaki katsayısı  $k=3\text{N/mm}$  olan B yayının maksimum sıkışma miktarını hesaplayınız. ( $g = 9.81\text{ m/s}^2$ )

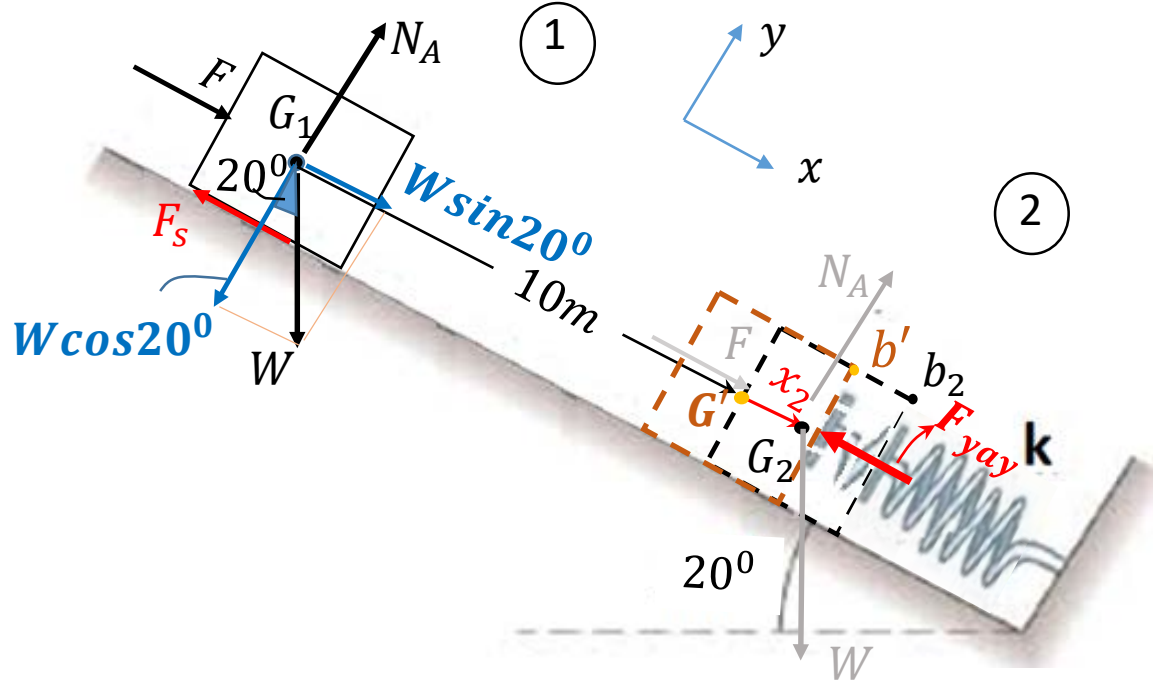
#### Çözüm:

- $W = 2 \times 9.81 = 19,62\text{ N}$
- Dinamikte N, m, sn birimlerini kullanıyoruz. Bu sebeple öncelikle yay katsayısı için birim dönüşümü yapalım:

$$k = \frac{3\text{ N}}{\text{mm}} = \frac{3\text{ N}}{10^{-3}\text{ m}} = 3000\text{ N/m}$$

- Şimdi 1 konumu ile yayın maksimum sıkışma noktası (2 konumu) arasında iş-enerji ilkesini uygulayacağız:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad \dots >>$$



Öncelikle bazı terimleri bulmalıyız:

Cisim  $G_1$  den yaya temas ettiği ilk konum olan  $G'$  konumuna geldikten sonra  $x_2$  kadar yayı sıkıştırır ve  $G'$  den  $G_2$  'ye gelir.

$$\overline{G'G_2} = \overline{b'b_2} = x_2$$

y yönünde hareket olmadığı için :  $a_y = 0$

$$\rightarrow \Sigma F_y = N_A - W \cos 20^\circ = ma_y = 0$$

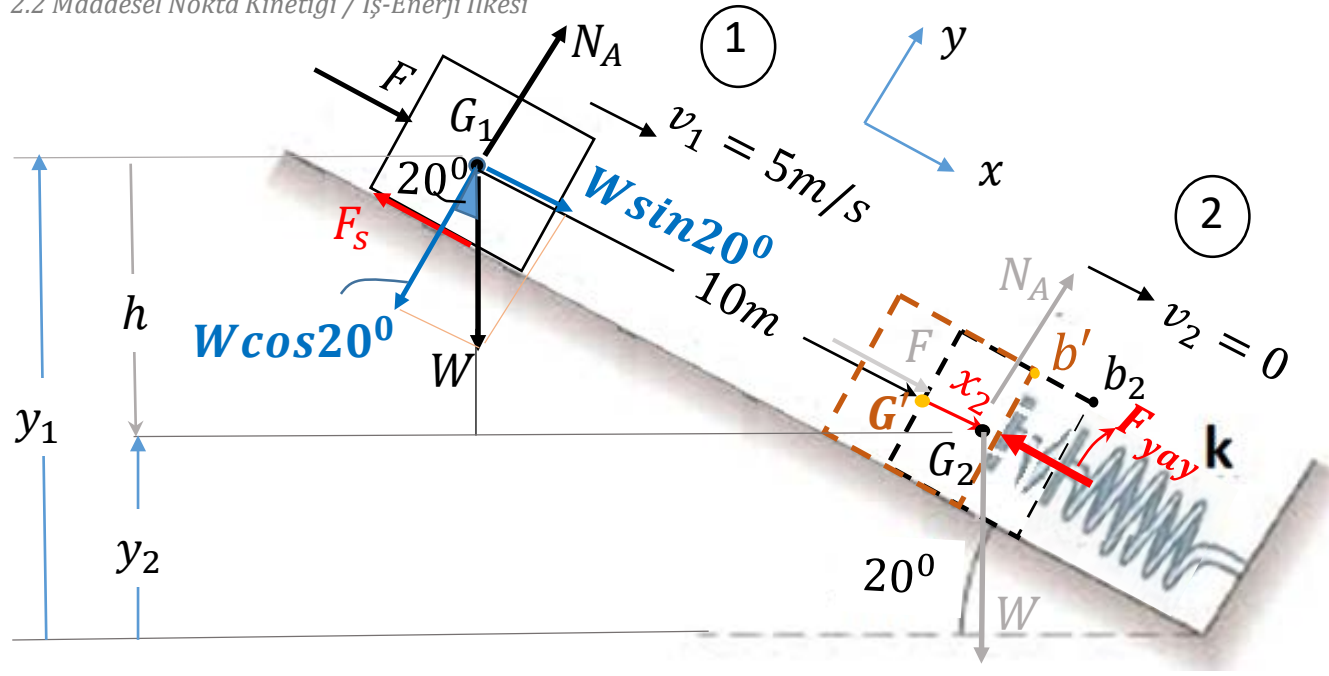
$$W = 2 \times 9.81 = 19.62N \rightarrow N_A = 19.62 \times \cos 20^\circ = 18.43N$$

$$\text{Sürtünme Kuvveti: } \rightarrow F_s = \mu \cdot N_A = 0.6 \times 18.43 = 11.06N$$

İş yapan tüm kuvvetler ( $W$ ,  $F_s$  ve  $F_{yay}$ ) sabit kuvvetlerdir. Bu sebeple;

İş = Kuvvet x Kuvvet doğrultusunda alınan net yol olarak bulunur.

Yayın sıkışmasını da göze alarak alınan net yolları yazarız.



$F$  yönünde yol alındığı için  $F$ 'in işi pozitiftir.

$$U_{1-2}^F = F(10 + x_2) = 100(10 + x_2) > 0$$

$F_s$  nin zıt yönünde yol alınıyor.  $F_s$ 'in işi negatiftir.

$$U_{1-2}^{F_s} = -F_s(10 + x_2) = -11.6(10 + x_2) < 0$$

$F_{yay}$  Cismi durdurmaya zorlar ve harekete zıt yöndedir. İş negatiftir. İlk anda sıkışma yoktur. ( $x_1=0$ )

$$U_{1-2}^{F_{yay}} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) = -\frac{1}{2}kx_2^2 = -\frac{1}{2}3000x_2^2 < 0$$

W Ağırlık kuvvetinin işi için alternatifler:

**1-Eğik düzleme paralel bileşen ( $W\sin 20^\circ$ )** yönünde yol alındığından iş pozitiftir.

**iş yapan yatay bileşen x net alınan yol**

$$U_{1-2}^W = W\sin 20^\circ x(10 + x_2) = 19.62(\sin 20^\circ)[(10 + x_2)] > 0$$

\*dik yönde yol alınmaz, bu nedenle dik bileşen ( $W\cos 20^\circ$ ) ve  $N_A$  kuvveti iş yapmaz.

**2-Veya** D.2.12.a denkleminde bulunur. Aşağı ( $W$  yönünde) gidiliyor. İş Pozitiftir.

$$U_{1-2}^W = Wh = 19.62[(10 + x_2) \sin 20^\circ] > 0$$

**3- Veya** D.2.12.b denkleminde bulunur.  $y_1 > y_2$  olduğundan iş pozitif çıkar.

$$(U_{1-2}^W) = W(y_1 - y_2) = 19.62 [(10 + x_2) \sin 20^\circ] > 0$$

$$\begin{aligned}\text{Toplam İş: } U_{1 \rightarrow 2} &= U^F_{1 \rightarrow 2} + U^{F_s}_{1 \rightarrow 2} + U^{F_{yay}}_{1 \rightarrow 2} + U^W_{1 \rightarrow 2} \\ &= 100(10 + x_2) - 11,6(10 + x_2) - \frac{1}{2} 3000 x_2^2 + 19.62 x \sin 20^\circ [(10 + x_2)]\end{aligned}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = 951.1 + 95.11 x_2 - 1500 x_2^2$$

1 konumunda kinetik enerji:  $T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 2 \times 5^2 = 25 \text{ Nm}$

2 konumundaki kinetik enerji:  $T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = 0$

İş Enerji İlkesi:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 = 0$$

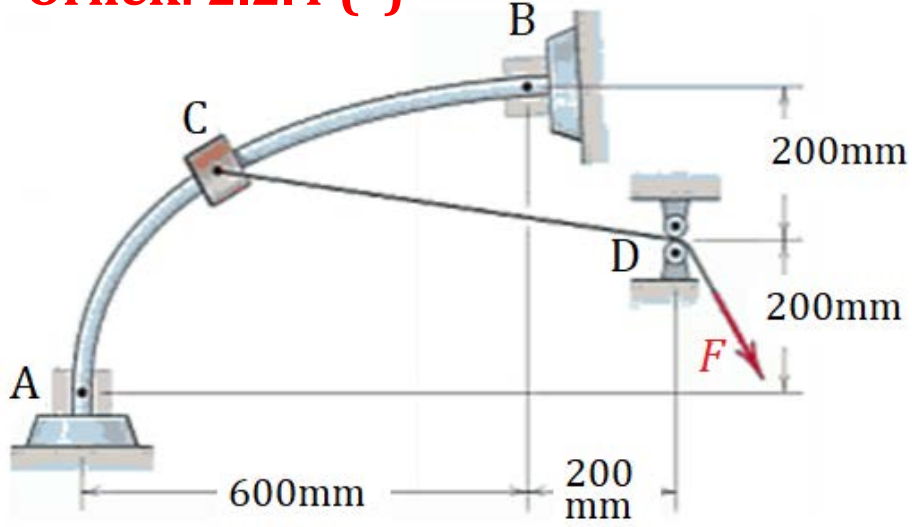
$$\rightarrow 25 + 951.1 + 95.11 x_2 - 1500 x_2^2 = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{1500 x_2^2}_a - \underbrace{95.11 x_2}_b - \underbrace{976.1}_c = 0$$

$$(x_2)_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{95.11 \mp \sqrt{95.11^2 - 4 \times 1500(-976.1)}}{2 \times 1500} = \frac{95.11 \mp 2421.9}{3000}$$

$\nearrow (x_2)_1 = -0,77$   
 $\searrow (x_2)_2 \cong 0,84$

pozitif kök alınır:  $\rightarrow x_2 = 0,84 \text{ m}$  (yayın sıkışma miktarı)

**Örnek: 2.2.4 (\*)**

0.60 kg kütleli şekildeki C bileziği, düşey düzlemde yer alan eğrisel AB çubuğuna geçirilmiştir. D deki küçük makaralardan geçen ipteki sabit  $F$  çekme kuvvetinin tesiri altında C bileziği ihmal edilebilir bir sürtünme ile eğrisel çubuk üzerinde kaymaktadır. Bilezik A dan ilk hızsız olarak harekete başlamıştır. Bileziğin B noktasındaki sabit duvara 4 m/s lik bir hızla çarpması için  $F$  sabit kuvvetinin ne olması gerektiğini hesaplayınız. **Cevap:**  $F=13.2\text{N}$

### 2.2.4 Konservatif kuvvetler ve Potansiyel Enerji:

(Enerjinin korunumu ilkesinin anlaşılması için bu kavramın öncelikle anlaşılması gerekir.)

Bir sistemde yapılan iş gidilen yoldan bağımsız ise; (yani 1 den 2 ye hangi yoldan gidilirse gidilsin yapılan iş değişmiyorsa), işi yapan kuvvetlere konservatif kuvvetler denir. Bu durumda yapılan iş, sistemin bir özelliğinin (potansiyel enerjisinin) değişimine eşittir. Ağırlık ve yay kuvvetleri konservatif kuvvetlerdir.

#### 2.2.4.1 Ağırlık Potansiyel Enerjisi ( $V_g$ ):

Bir cisim  $A_1$  noktasından  $A_2$  ye 1,2 veya 3 nolu yolların (veya daha farklı bir yolun) hangisinden giderse gitsin  $W$  ağırlık kuvvetinin işi değişmez:

$$(U^W_{1-2}) = W \cdot (y_1 - y_2) = -W \cdot h = -mgh$$

O halde Ağırlık kuvveti konservatif kuvvettir.

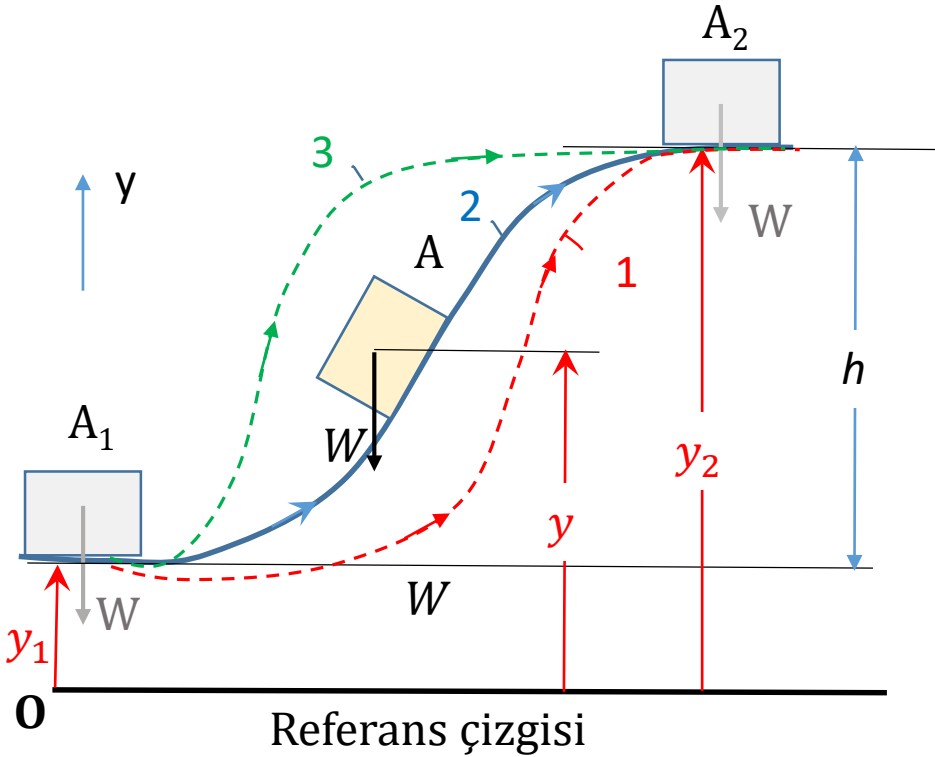
Bir A konumunda Ağırlık potansiyel enerjisi :  $V_g = W \cdot y$  (D.2.15)

$A_1$  konumunda Ağırlık potansiyel enerjisi :  $V_{g1} = W \cdot y_1$

$A_2$  konumunda Ağırlık potansiyel enerjisi :  $V_{g2} = W \cdot y_2$

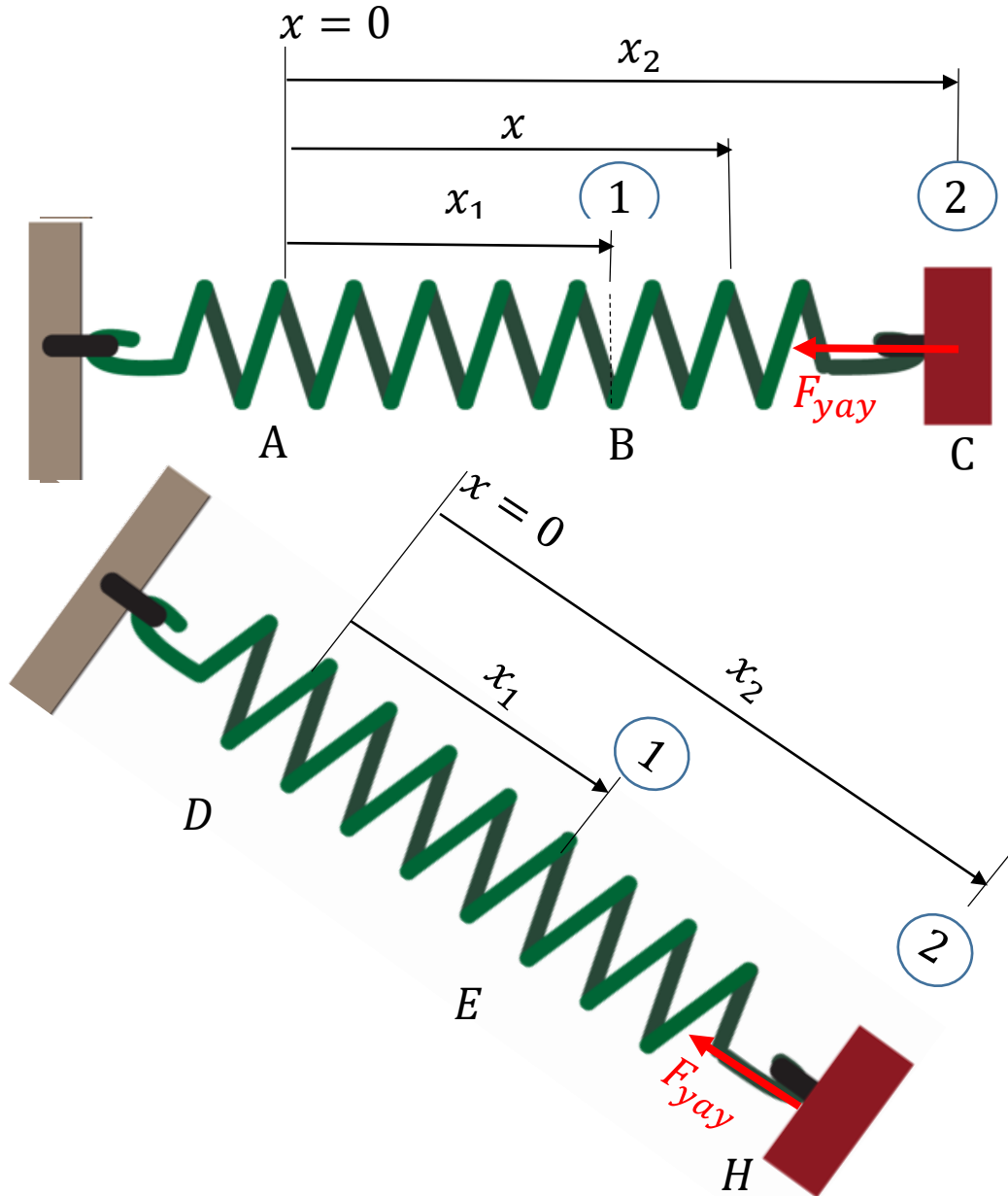
Bu denklemlerden şunu çıkarırız:

$A_1$ - $A_2$  noktaları arasında ağırlık kuvveti tarafından yapılan iş bu noktalar arasındaki ağırlık potansiyel enerji farkına eşittir:  $U^W_{1-2} = V_{g1} - V_{g2}$  (D.2.16)



Ağırlık potansiyel enerji farkı, aynı zamanda ağırlık kuvvetinin yaptığı işdir. İkisi aynı anda denklemlerde yazılmaz.





### 2.2.4.2 Elastik Potansiyel Enerjisi ( $V_e$ ):

(D.2.13) Denkleminde (1 -2 konumları arasında)

$F_{yay}$  kuvvetinin yaptığı iş:  $U_{1-2}^{F_{yay}} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$  olarak bulunmuştu.

Yay hareket sırasında ister ABC yatay yörüngesinde, isterse DEH yörüngesinde hareket etsin  $F_{yay}$  kuvveti daima yay eksenini (doğrultusunda), yani uzama yönünde kalır ve dolayısıyla aynı uzama miktarları ( $x_1$  ile  $x_2$ ) arasında yapılan iş aynı çıkar.

Hatta, hareket sırasında yay döndürülse ve uzama doğrultusu değiştirilse bile sonuç değişmez. Çünkü  $F_{yay}$  kuvveti de yayla birlikte dönecektir.

0 halde yapılan iş gidilen yoldan bağımsızdır ve dolayısıyla  $F_{yay}$  kuvveti konservatif kuvvettir. Şimdi bir tanımlama yapıyoruz:

Herhangi bir  $x$  uzama konumunda yaydaki **Elastik Potansiyel Enerji:**

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (D.2.17)$$

1 konumundaki Elastik potansiyel Enerji:  $V_{e_1} = \frac{1}{2}kx_1^2$

2 konumundaki Elastik potansiyel Enerji:  $V_{e_2} = \frac{1}{2}kx_2^2$

Bu durumda  $F_{yay}$  kuvvetinin yaptığı iş:  $U_{1-2}^{F_{yay}} = V_{e_1} - V_{e_2}$  (D.2.18)  
(1 -2 arasındaki Elastik Enerji farkına eşittir.)

**Unutmayın: Elastik potansiyel enerji farkı, aynı zamanda yay kuvvetinin yaptığı iştir. İkisi aynı anda denklemlerde yazılmaz.**



### 2.2.5 Enerjinin korunumu:

Bir cisimde veya sistemde iş yapan kuvvetler sadece konservatif kuvvetler (ağırlık ve/veya yay kuvvetleri) ise yapılan iş iki konum arasındaki potansiyel enerji farkına eşittir. Bu durumda cismin veya sistemin toplam mekanik enerjisi değişmez yani korunur. Bunu şu şekilde ispatlayabiliriz:

Toplam Potansiyel Enerji = Ağırlık Potansiyel Enerjisi + Elastik Potansiyel Enerjisi

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ V & = & V_g + V_e \\ & & \downarrow \end{array}$$

Sadece ağırlık ve yay kuvvetleri iş yapıyorsa yapılan toplam iş:

$$U_{1 \rightarrow 2} = U_{1-2}^W + U_{1-2}^{F_{yay}}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_{g_1} - V_{g_2}) + (V_{e_1} - V_{e_2}) = \underbrace{(V_{g_1} + V_{e_1})}_{V_1} - \underbrace{(V_{g_2} + V_{e_2})}_{V_2} \rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2$$

1 konumunda Toplam Potansiyel Enerji :  $V_1$

2 konumunda Toplam Potansiyel Enerji :  $V_2$

İş - Enerji İlkesini uygularsak:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$T_1 + V_1 - V_2 = T_2$$

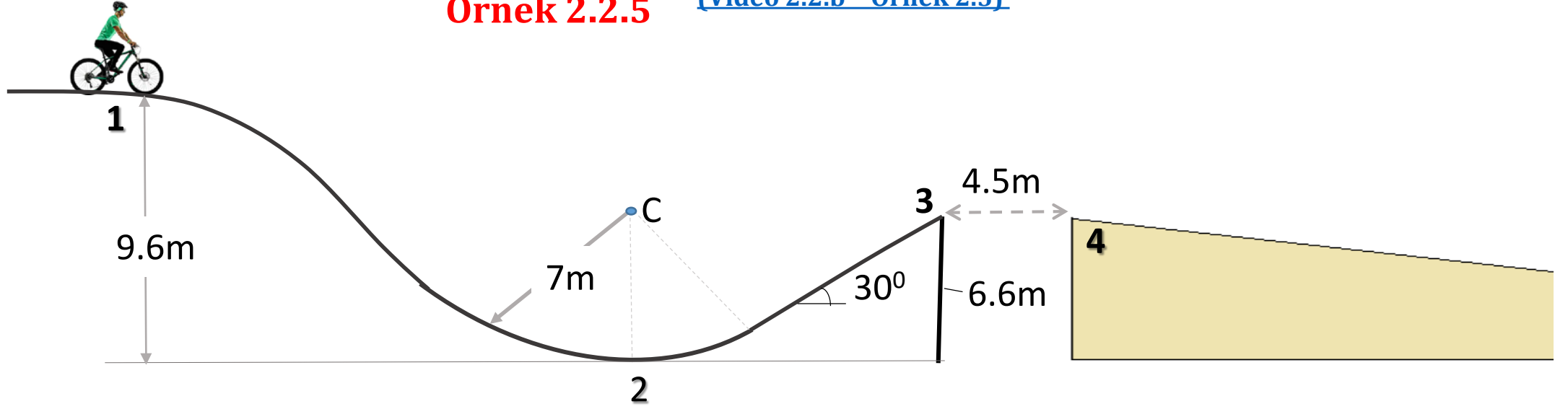


$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (D.2.19)$$

Enerjinin korunumu denklemi

(İş yapan kuvvetler sadece ağırlık ve/veya yay kuvvetleri ise geçerlidir.)

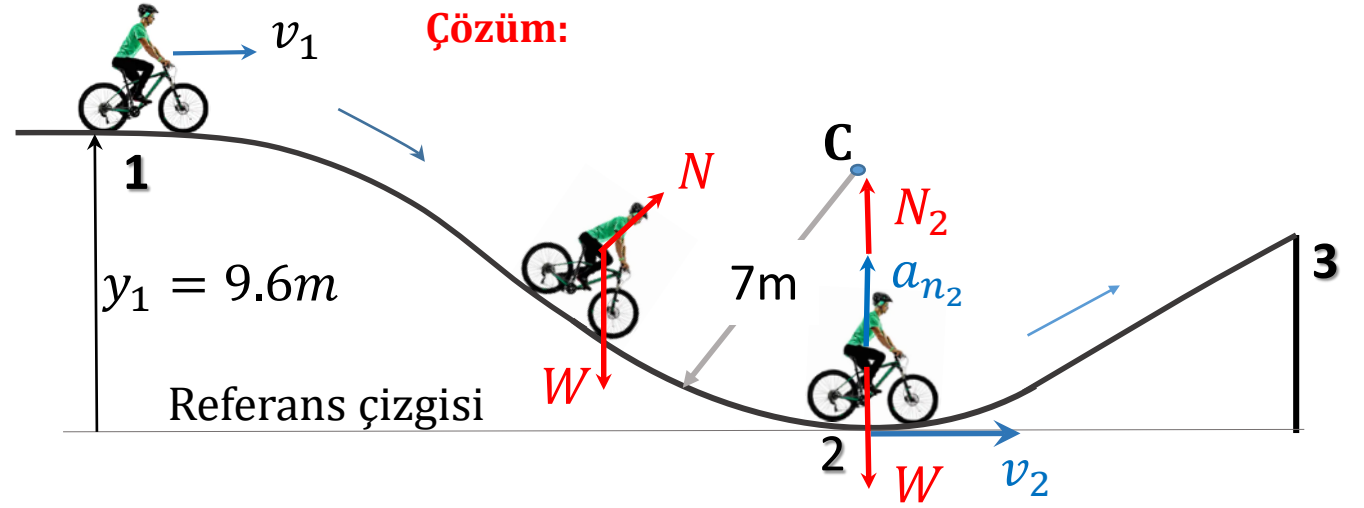
(Dikkat: Potansiyel Enerji sembolü :  $V$  , hız sembolü ise  $v$  dir. Birbirleriyle karıştırılmamalıdır.)

**Örnek 2.2.5**[\(Video 2.2.b - Örnek 2.5\)](#)

9.6 m yükseklikteki bir eğrisel rampanın 1 noktasına yatay 2m/s lik hızla giren bir bisikletli, pedal çevirmeden kendi ağırlığının etkisi ile eğrisel yörüngede yol alıyor, 3 noktasından yörüngeyi terk ediyor. Bisiklet ve Sürücüsünün toplam ağırlığı 800N olduğuna göre, sürtünmelerin etkisini ihmal ederek;

- a-)** eğrilik yarıçapı 7m olan 2 noktasından geçerken bisikletin toplam ivmesini ve yerden bisiklete gelen tepki kuvvetini,
- b-)** Bisikletin karşı taraftaki 4 platformuna erişip erişemeyeceğini bulunuz. ( $g=10\text{m/s}^2$ )

- Her t anında teğet yönde yol alınır, normal yönde yol alınmaz. Bu sebeple yol boyunca etki eden N normal kuvveti iş yapmaz.
- Teğet boyunca etki eden sürtünme kuvvetlerinin etkisi de ihmal edildiğinden sadece ağırlık kuvveti iş yapar.
- Bu durumda hareket boyunca enerji korunur.



a-) 1-2 arasında enerjinin korunumu::

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_{g1} = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_{g2}$$

Ağırlık potansiyel enerjileri:

$$V_{g1} = W \cdot y_1 = 800 \times 9.6, \quad V_{g2} = W \cdot y_2 = 0$$

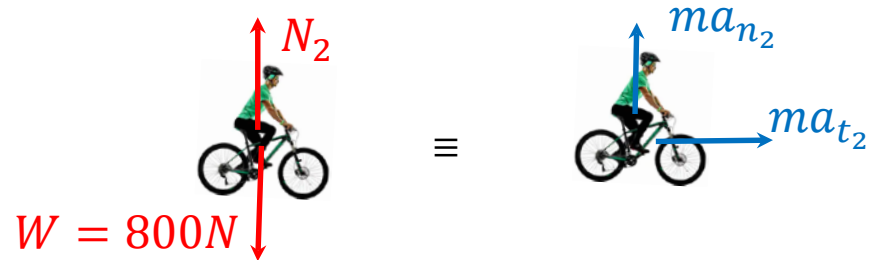
$$\frac{1}{2}m2^2 + (m10) \times 9.6 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 \rightarrow v_2 = 14 \text{ m/s},$$

2 konumundaki:  
normal ivme

$$a_{n2} = \frac{v_2^2}{\rho} = \frac{14^2}{7} \rightarrow a_{n2} = 28 \text{ m/s}^2$$

2 konumunda

Dış Kuvvetler Sist.  $\equiv$  Efektif Kuvvetler Sist.



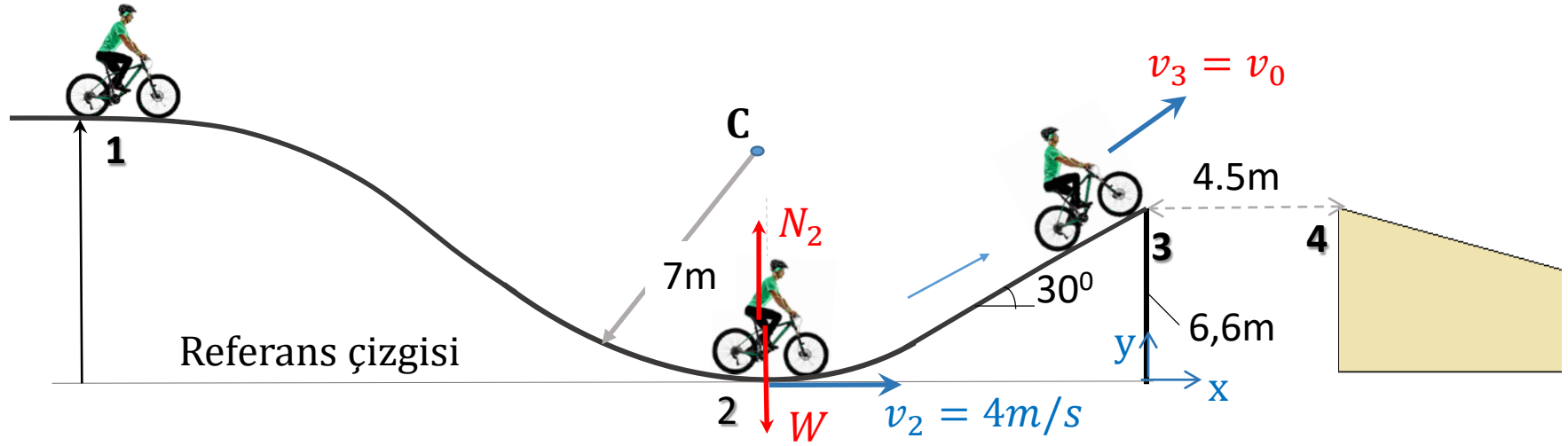
$$\Sigma F_n = ma_{n2}$$

$$N_2 - W = \frac{W}{g} a_{n2} \rightarrow N_2 = 800 + \frac{800}{10} 28 \rightarrow N_2 = 3040N$$

$$\Sigma F_t = ma_{t2} \rightarrow 0 = ma_{t2} = 0 \rightarrow a_{t2} = 0$$

Toplam ivme:  $\rightarrow a_2 = a_{n2} = 28 \text{ m/s}^2$

Teğetsel ivme



**b-)** 2-3 arasında enerjinin korunumu

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg \cdot y_3$$

$$\frac{1}{2}14^2 = \frac{1}{2}v_3^2 + 10 \times 6.6$$

$$\rightarrow v_3 = 8 \text{ m/s}$$

3-4 arasında Eğik Atış ;  $v_3 = v_0$

$$y_4 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 6.6 = 6.6 + 8 \sin(30^\circ)t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 4t = 0$$

$$\rightarrow t(5t - 4) = 0$$

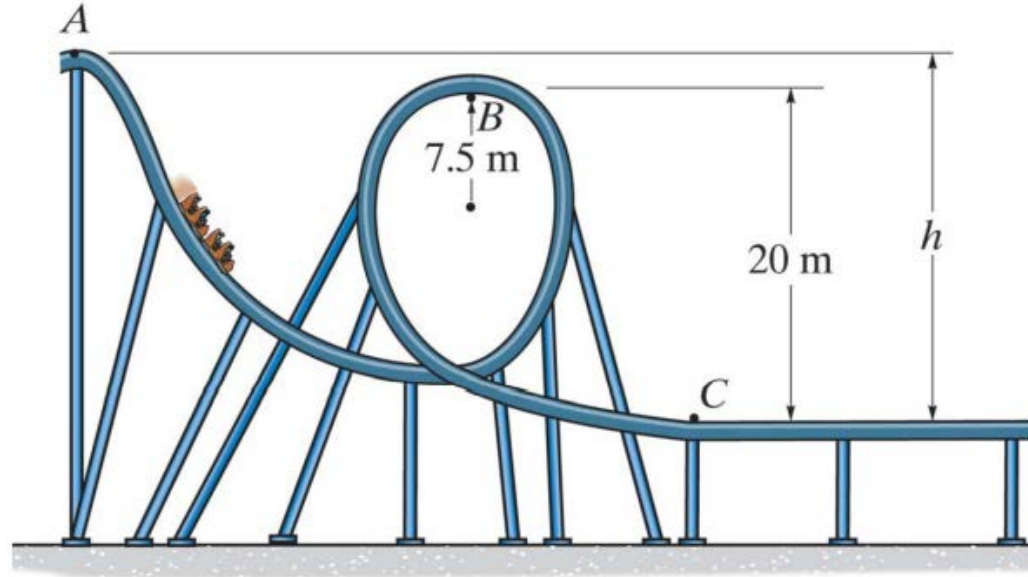
Bu son denklemin sağlanması 2 şekilde mümkündür:

$t = 0$  olabilir. Bu 3 nolu konumu gösterir.

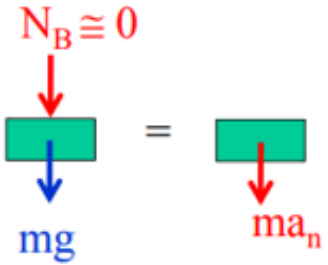
$5t - 4 = 0$  olabilir. Bu durumda:  $t = 0.8 \rightarrow 4$  nolu konumu gösterir

$$x_4 = (v_{0x})t = 8 \cos 30^\circ \times 0.8 \rightarrow x_4 = 5.5 \text{ m}$$

$x_4 > 4.5 \text{ m}$  olduğundan bisiklet platforma erişir.



- a-) B noktası için:  
Dış Kuvvetler Sist. = Efektif Kuvveler Sist.



B noktasında aracın raylardan ayrılmaması için raylardan gelen normal tepki ( $N_B$ ) sınır durumunda sıfır olur.

$$\sum F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \rightarrow 800(9.81) = 800 \frac{(v_B)^2}{7.5}$$

$$\Rightarrow v_B = 8.578 \text{ m/s}$$

Trenin raylardan ayrılmaması için B noktasında olması gereken minimum hız.

**Örnek 2.2.6** Lunaparktaki 800kg ağırlığındaki bir hız treni A noktasında durağan halde iken sürtünmesi ihmal edilen raylar üzerinden aşağı doğru serbest bırakılıyor.

- a) Trenin B noktasına eriştiğinde raylardan ayrılmaması için h yüksekliği minimum ne kadar olmalıdır?  
b) a şıkkındaki bulunan minimum h değerini alarak, trenin C noktasından geçerken hızını hesaplayınız.

**Çözüm:**

Sürtünme ihmal edildiği için iş yapan kuvvetler sadece ağırlık kuvvetleridir. Bu nedenle hareket boyunca enerji korunur.

A-B arasında

$$T_A + V_A = T_B + V_B \rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(20)$$

$$(800)(9.81)h = \frac{1}{2}800(8.578)^2 + (800)(9.81)(20)$$

$$\Rightarrow h_B = 23.75 \text{ m}$$

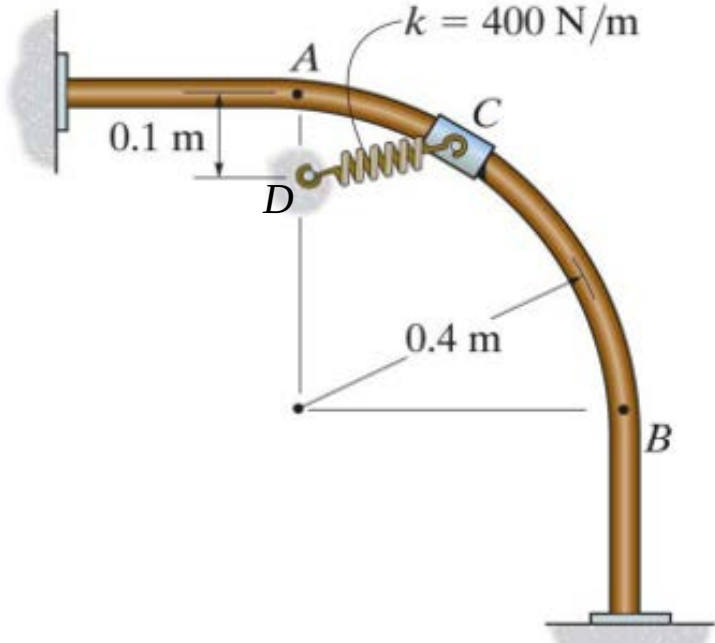
(Trenin raylardan ayrılmaması için A noktasının minimum yüksekliği)

**b-)**

A-C arasında

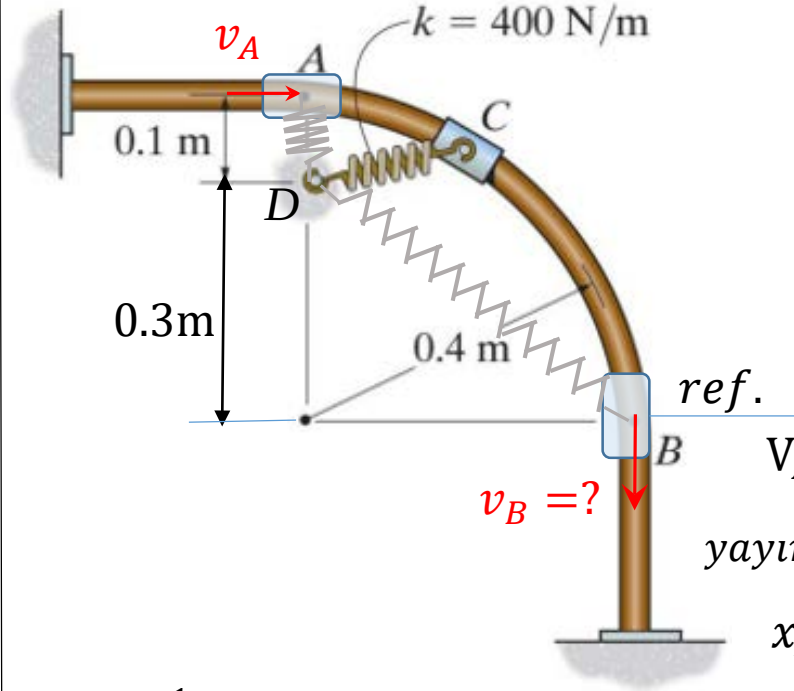
$$T_A + V_A = T_C + V_C \rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(0)$$

$$(800)(9.81)23.75 = \frac{1}{2}800v_C^2 + 0 \Rightarrow v_C \cong 21.6 \text{ m/s}$$



Eğik, sürtünmesiz bir çubuğa geçirilmiş olan 4kg ağırlığındaki C bileziğine bir ucu D de sabitlenmiş olan bir yay bağlıdır. Bilezik A konumundan geçerken 2m/s lik hızla aşağı doğru kaymaktadır. Yayın, katsayısı 400N/m ve uzamamış boyu 0.2m dir. Buna göre B noktasından geçerken C bileziğinin hızını hesaplayınız.

**Çözüm:** Sadece yay ve ağırlık kuvvetleri iş yaptığından enerji korunur.



$$T_A + V_A = T_B + V_B \quad (1)$$

Kinetik Enerjiler:

$$T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}(4)2^2 = 8Nm$$

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}(4)v_B^2$$

Potansiyel Enerjiler:

$$V_A = (V_A)_e + (V_A)_g = \frac{1}{2}k(x_A)^2 + mgh_A$$

yayın (son boyu - ilk boyu)

$$x_A = |AD - 0.2| = |0.1 - 0.2| = 0.1m$$

$$V_A = \frac{1}{2}(400)(0.1)^2 + (4)(9.81)(0.4) \rightarrow V_A = 17.696Nm$$

$$V_B = (V_B)_e + (V_B)_g = \frac{1}{2}k(x_B)^2 + mgh_B$$

$$V_B = \frac{1}{2}(400)(0.3)^2 + 0$$

$$x_B = DB - 0.2 = \sqrt{0.4^2 + 0.3^2} - 0.2 = 0.3m$$

$$V_B = 18Nm$$

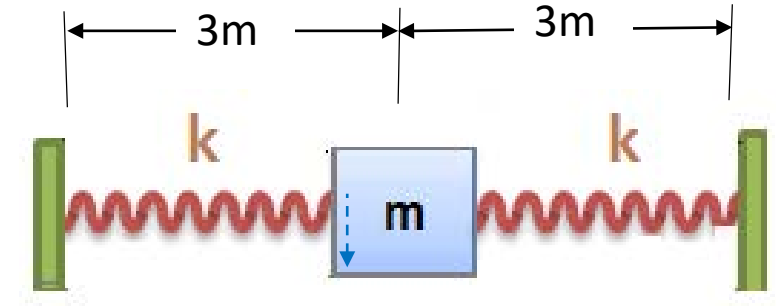
Değerleri (1) denkleminde yerine koyarsak:

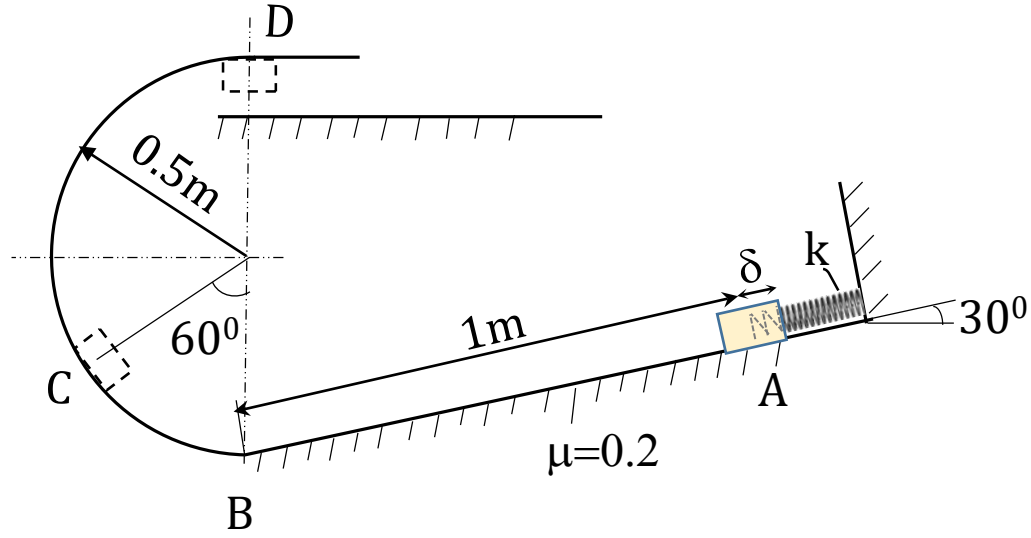
$$8 + 17.696 = \frac{1}{2}(4)v_B^2 + 18$$

$$\Rightarrow v_B = 1.96m/s$$

**Örnek 2.2.8 (\*)** (Video 2.2.b – Örnek 2.6)

20kg kütleli bir kutu yanlarından iki yaya bağlı iken şekildeki yatay konumda sabit tutulmaktadır. Yayların uzamamış boyları 3'er metredir ve katsayıları ise  $k=156 \text{ N/m}$  dir. Kutu bu konumdan serbest bırakılıyor. Kutu ilk konumundan itibaren 4 m aşağıya indiği zaman hızını hesaplayınız. Kutunun boyutlarını ihmal ediniz. (Cevap :  $v_2 = 4 \text{ m/s}$ )





**Örnek2.2.9(\*):** Ağırlığı  $W=10\text{N}$  olan küçük bir paket A noktasında katsayısı  $k = 5000\text{N/m}$  olan yayı  $\delta$  kadar sıkıştırmıştır. Yayın serbest bırakılmasıyla paket önce AB sürtünmeli eğik yüzeyinde, sonra BCD eğrisel yörüngesinde yol alıyor. Buna göre;

a-) Paketin D noktasına ulaşabilmesi için yayın minimum ne kadar sıkıştırılması gerektiğini hesaplayınız ( $\delta_{\min}=?$ )

b-) Paket C noktasından geçerken yoldan pakete gelen normal kuvveti bulunuz. ( $N_c=?$ )

**Cevaplar a-)  $\delta_{\min} = 6.07\text{cm}$  , b-)  $N_c = 44.83\text{N}$**







**Maddesel Nokta Kinetiği**

# **2 . 3 İmpuls-Momentum Yöntemi**

**2.3.1 Genel Açıklama:** İmpuls-Momentum yöntemi  $F = ma$  denkleminin yine farklı şekilde yorumlanmış hali olup, özellikle kuvvetin zamana bağlı bir fonksiyon olarak tanımlandığı durumlarda veya çok kısa süreli etki ettiği çarpışma problemlerinde işe yarar ve sonuca daha kolay ulaşmamızı sağlar. Amacımız yine, kinetik analizlerle bir  $t$  anındaki cismin konum, hız, ivmesini veya dış kuvvetlerden bilinmeyenleri tespit etmektir.

### 2.3.2 İmpuls ve Momentum Kavramları:

Newton'un 2.kanunu  $F=ma$  denklemini vektörel olarak yazıp aşağıdaki işlem adımlarıyla farklı bir formata sokabiliriz:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \text{○} \nearrow \vec{F} & \equiv & \text{○} \nearrow m\vec{a} \\
 \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 \vec{F} dt = m d\vec{v}
 \end{array}
 \end{array}$$

Kuvvetin zamana bağlı değiştiğini düşünelim:  $\vec{F}(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

Bir  $t$  anında cismin

(Doğrusal) impulsu:  $\overrightarrow{\text{Imp}}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt,$

(Doğrusal) momentumu :  $m\vec{v}$

Sonuç olarak...>>

**2.3.1 Genel Açıklama:** İmpuls-Momentum yöntemi  $F = ma$  denkleminin yine farklı şekilde yorumlanmış hali olup, özellikle kuvvetin zamana bağlı bir fonksiyon olarak tanımlandığı durumlarda veya çok kısa süreli etki ettiği çarpışma problemlerinde işe yarar ve sonuca daha kolay ulaşmamızı sağlar. Amacımız yine, kinetik analizlerle bir  $t$  anındaki cismin konum, hız, ivmesini veya dış kuvvetlerden bilinmeyenleri tespit etmektir.

### 2.3.2 İmpuls ve Momentum Kavramları:

Newton'un 2.kanunu  $F=ma$  denklemini vektörel olarak yazıp aşağıdaki işlem adımlarıyla farklı bir formata sokabiliriz:

$$\vec{F} \equiv m\vec{a}$$

Kuvvetin zamana değişkense:  $\vec{F}(t)$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{F} dt = m d\vec{v} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

Bir  $t$  anında cismin

- (Doğrusal) impulsu:  $\overrightarrow{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt,$
- (Doğrusal) momentumu:  $m\vec{v}$

}  $\overrightarrow{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$  **(I)**

(I) denklemini biraz daha düzenlersek ..>>

### 2.3.3 İmpuls-Momentum Denklemleri:

a-) Tek Maddesel Nokta için:

$$m\vec{v}_1 + \vec{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2$$

$$\vec{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$m\vec{v}_1 + \vec{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2$$

Daha açık ifadesiyle

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = m\vec{v}_2 \quad (\text{D.2.20})$$

- Başlangıçtaki momentum + Dış kuvvetlerin impulsu = Son durumdaki Momentuma eşittir.
- Bir başka ifadeyle dış kuvvetlerin impulsu cismin momentumunun değişmesine sebep olur.

- Bu son D.2.20 vektörel denklemi herbir kartezyen ekseninde skaler olarak 3 bağımsız denkleme indirgenebilir:

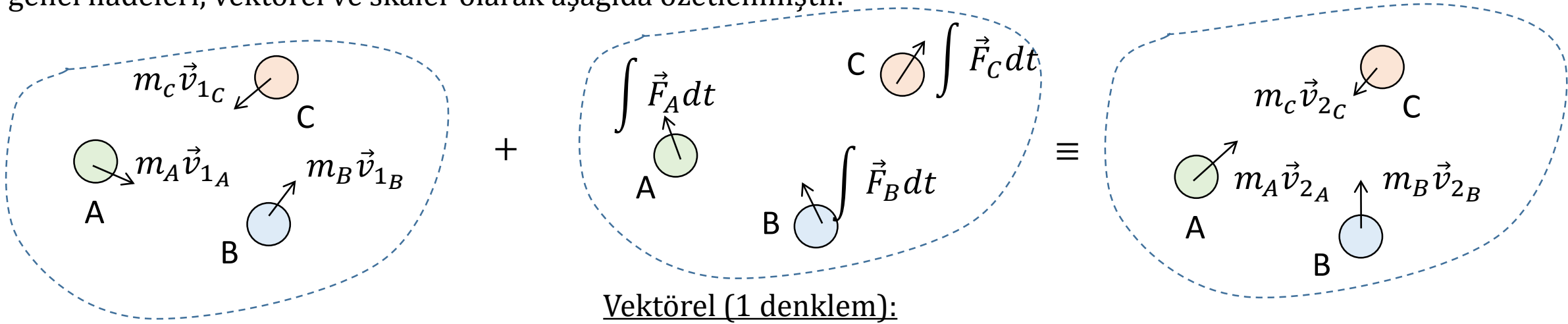
$$mv_{1_x} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2_x} , \quad (\text{D.2.21a})$$

$$mv_{1_y} + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2_y} , \quad (\text{D.2.21b})$$

$$mv_{1_z} + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2_z} \quad (\text{D.2.21c})$$

**b-) Maddesel Noktalar Sistemi İçin:**

Birden fazla maddesel noktanın birleşmesiyle oluşmuş bir sistemde impuls-momentum denklemlerinin açın ve genel ifadeleri, vektörel ve skaler olarak aşağıda özetlenmiştir.



$$m_A \vec{v}_{1A} + m_B \vec{v}_{1B} + m_C \vec{v}_{1C} + \dots \int \vec{F}_A dt + \int \vec{F}_B dt + \int \vec{F}_C dt + \dots = m_A \vec{v}_{2A} + m_B \vec{v}_{2B} + m_C \vec{v}_{2C} + \dots$$

$$\Sigma m_i \vec{v}_{1i} + \Sigma \int \vec{F}_i dt = \Sigma m_i \vec{v}_{2i} \quad (\text{D.2.22.a})$$

Skaler (3 denklem)

(x yönün için):  $m_A v_{x1A} + m_B v_{x1B} + m_C v_{x1C} + \dots \int F_{xA} dt + \int F_{xB} dt + \int F_{xC} dt + \dots = m_A v_{x2A} + m_B v_{x2B} + m_C v_{x2C} + \dots$

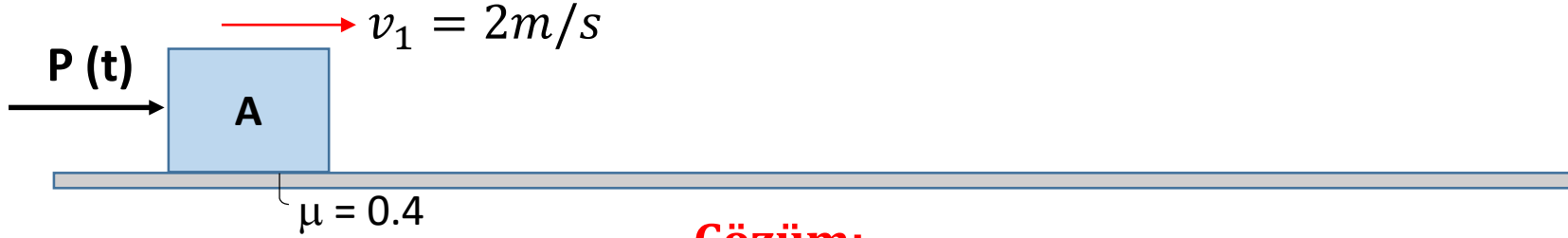
$$\Sigma m_i v_{x1i} + \Sigma \int F_{xi} dt = \Sigma m_i v_{x2i}$$

$$\Sigma m_i v_{y1i} + \Sigma \int F_{yi} dt = \Sigma m_i v_{y2i}$$

$$\Sigma m_i v_{z1i} + \Sigma \int F_{zi} dt = \Sigma m_i v_{z2i} \quad (\text{D.2.22.b,c,d})$$

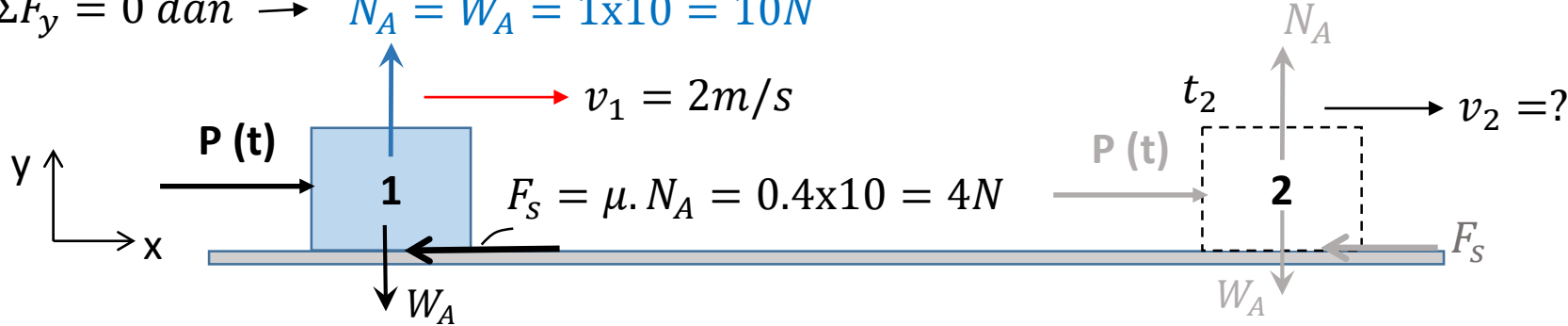
Şimdi örnekler çözerek konuyu daha iyi anlamaya çalışalım..>>

**Örnek 2.3.1** 2 m/s lik hızla **sağa** doğru hareket etmekte olan 1kg lık cisme, şekildeki diyagramdaki gibi zamanla değişken P kuvveti etki etmektedir. Sürtünme katsayısı 0.4 olduğuna göre, a-)  $P=-4N$  olduğu anda cismin hızını, b-) P kuvvetinin cisme kazandıracığı maksimum hızı hesaplayınız.



**Çözüm:**

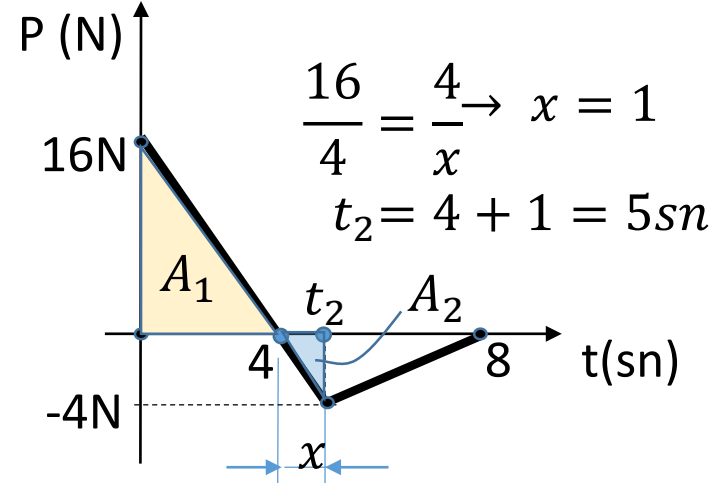
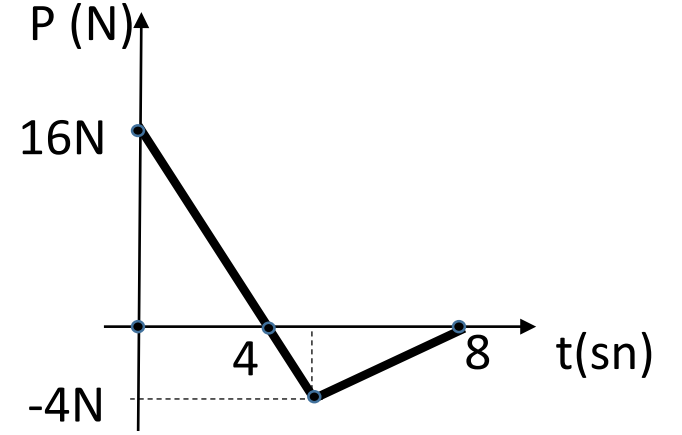
$$\Sigma F_y = 0 \text{ dan } \rightarrow N_A = W_A = 1 \times 10 = 10N$$



a-) x doğrultusunda impuls-momentum denklemi:

$$mv_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} \rightarrow 1(2) + \underbrace{\int_0^5 P(t) dt}_{\text{sabit kuvvet}} - \int_0^5 F_s dt = 1 \cdot v_2$$

$$2 + (A_1 - A_2) - F_s t \Big|_0^5 = v_2 \rightarrow 2 + \frac{16 \times 4}{2} - \frac{(5 - 4) \times 4}{2} - 4 \times 5 = \rightarrow v_2 = 12 \text{ m/s}$$



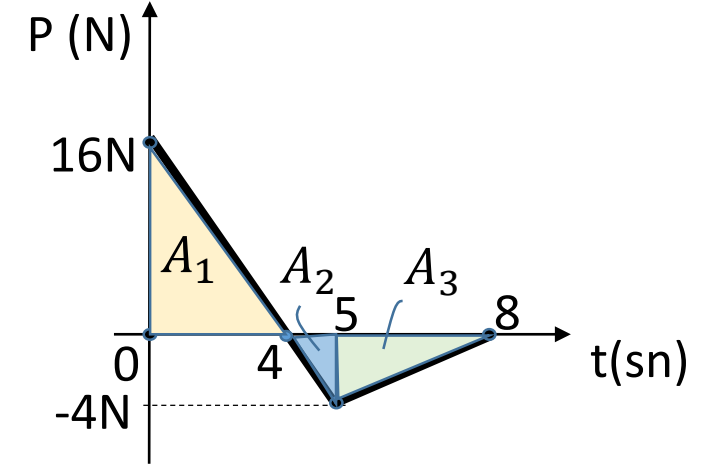
$A_2$  bölgesinde P kuvveti « -x » yönüne döner.



**b-) t=4. saniye için (0-4 saniyeleri arasında) impuls-momentum denklemi**

$$mv_1 + \overbrace{\int_0^4 P(t)dt}^{A_1} - F_s \int_0^4 dt = mv_4 \rightarrow 1 \times 2 + \frac{16 \times 4}{2} - F_s t \Big|_0^4 = 1 \times v_4$$

$$= 2 + 32 - 4 \times 4 = v_4 \rightarrow v_4 = 18 \text{ m/s} \quad (4. \text{ saniyedeki hız})$$



**t = 8. saniye için (5-8 saniyeleri arasında) impuls-momentum denklemi**

$$mv_2 + \underbrace{\int_5^8 P(t)dt}_{A_3} - F_s \int_5^8 dt = mv_8 = 1 \times 12 - \frac{4 \times (8 - 5)}{2} - F_s t \Big|_5^8 = 1 \times v_8$$

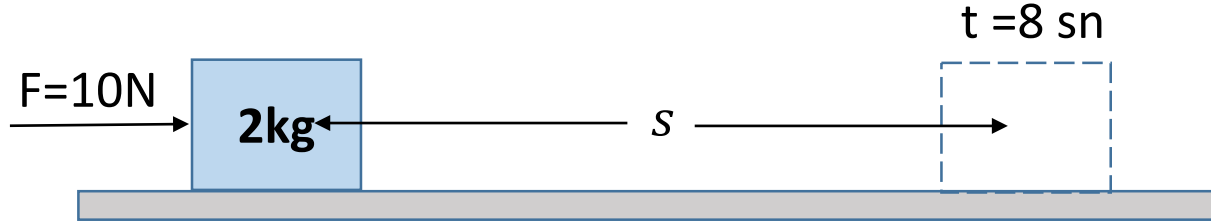
$$= 12 - 6 - 4 \times (8 - 5) = v_8 \rightarrow v_8 = -6 \text{ m/s} \quad (8. \text{ saniyedeki hız})$$

P kuvvetinin cisme kazandıracığı maksimum hız 4.saniyedeki hızdır :

$$\rightarrow v_{max} = v_4 = 18 \text{ m/s}$$

## 2.3.4 Kinetik yöntemlerinin bir örnekle karşılaştırılması

### Örnek 2.3.2 [\(Video 2.3.a – Örnek 2.8\)](#)



Durmakta olan 2kg kütleli kutuya, sürtünmesiz yatay zeminde, sabit ve yatay  $F=10\text{N}$  luk kuvvet etki ettiğinde, kutunun 8.saniyedeki hızını,

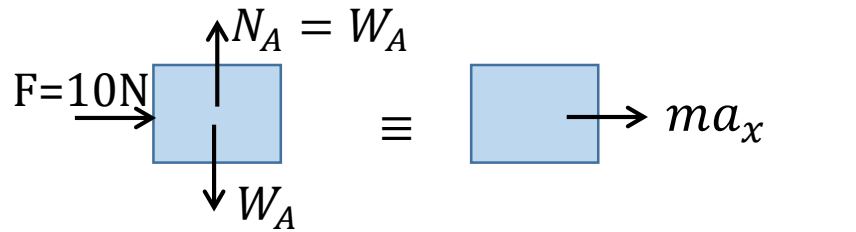
**a-) D'Alembert Prensibi ( $F=ma$ ) ile,**

**b-) İş-Enerji Yöntemi ile,**

**c-) İmpuls – Momentum Yöntemi ile hesaplayınız.**

### Çözüm

**a-)  $F = ma$  Doğrudan uygulaması ile**  
Dış Kuv. Sistemi  $\equiv$  Efektif Kuv. Sistemi



$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\rightarrow 10 = 2a_x \rightarrow a_x = 5 \text{ m/s}^2 = a_0 : \text{sabit}$$

$$(\text{DDH}) : v_2 = v_0 + a_0 t$$

$$v_2 = 5 \times 8 \rightarrow v_2 = 40 \text{ m/s}$$

**b-) İş – Enerji Yöntemiyle**

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$0 + F \cdot s = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$a_0 = F/m = 10/2 = 5 \text{ m/s}^2$$

$$s = \frac{1}{2} 5 \times 8^2 = 160 \text{ m}$$

$$\rightarrow 0 + 10 \times 160 = \frac{1}{2} 2 v_2^2 \rightarrow v_2 = 40 \text{ m/s}$$

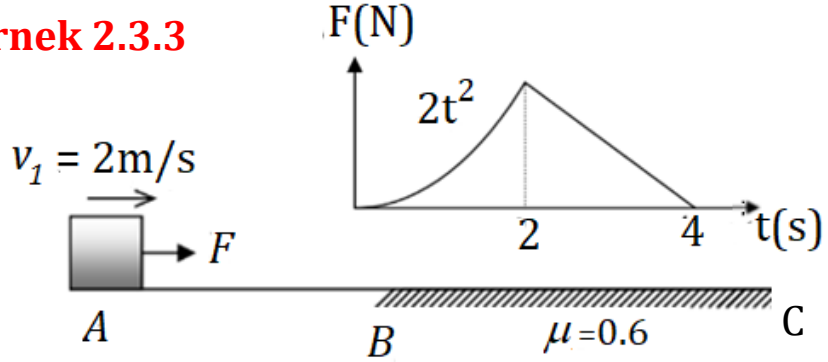
**c-) İmpuls – Momentum Yöntemiyle**  
(x doğrultusunda)

$$m v_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m v_{2x}$$

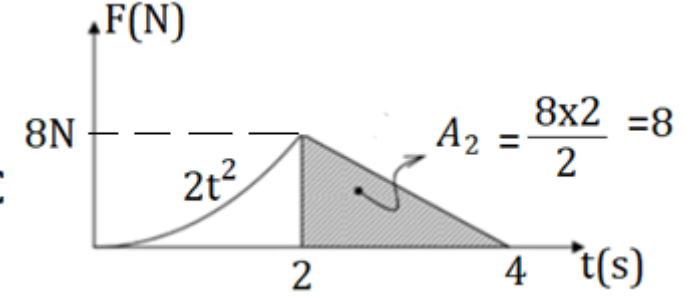
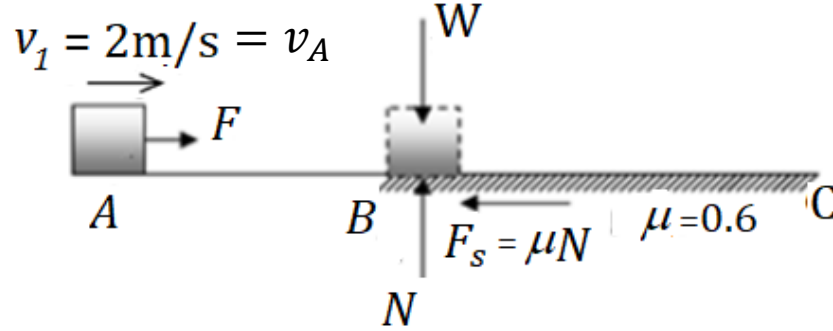
$$0 + \int_0^8 10 dt = 2 v_2$$

$$10t \Big|_0^8 = 2 v_2$$

$$(10) \times (8) = 2 v_2 \rightarrow v_2 = 40 \text{ m/s}$$

**Örnek 2.3.3**

Şekildeki 1 kg'lık bloğa yatay doğrultuda zamanla değişen  $F$  kuvveti, AB yolu boyunca 4 saniye süre ile grafikteki gibi uygulanmıştır. Bloğun başlangıçtaki hızı sağa doğru 2 m/s 'dir.  $F$  kuvveti kaldırıldığında blok B noktasına ulaşmıştır. AB yolu sürtünmesiz olduğuna göre; B noktasından itibaren bloğun  $\mu = 0.6$  kinetik sürtünme katsayısına sahip yolda son olarak durduğu C noktasının B den uzaklığını bulunuz. ( $\overline{BC} = ?$ )

**Çözüm:**A – B arası

$$t = 2 \text{ saniye için: } \rightarrow F = 2(2)^2 = 8N$$

$$mv_A + \text{İm } p_{A \rightarrow B} = mv_B$$

$$1(2) + \int_0^2 2t^2 dt + \int_2^4 F(t) dt = 1v_B \Rightarrow 2 + 2 \frac{2^3}{3} + 8 = v_B \rightarrow v_B = 15.33 \text{ m/s}$$

B – C arası

$$F_s = \mu N = 0.6W = 0.6mg = 0.6(1)(9.81) = 5.886N$$

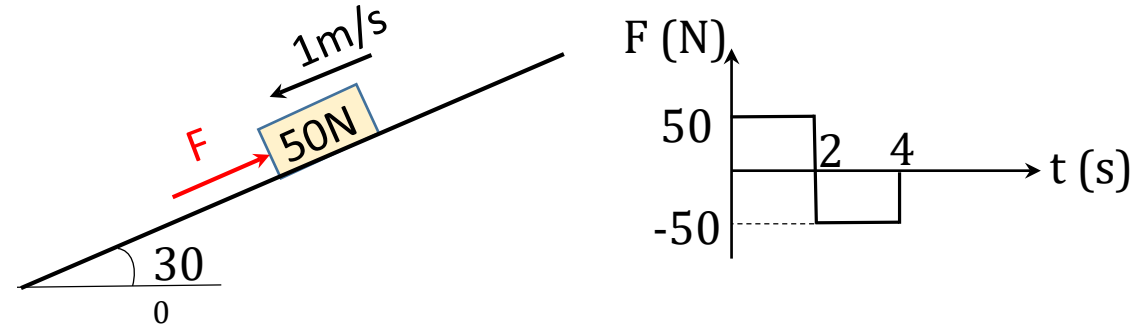
$$\text{İş – Enerji İlkesi: } T_B + U_{B \rightarrow C} = T_C$$

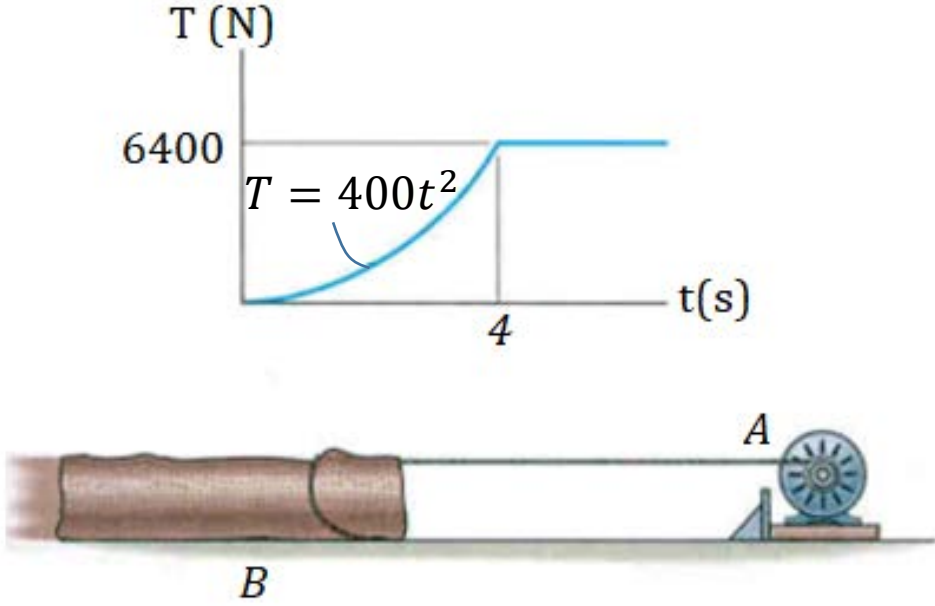
$$\frac{1}{2}mv_B^2 - F_s(\overline{BC}) = \frac{1}{2}m0^2 \Rightarrow \frac{1}{2}1(15.33)^2 - 5.886(\overline{BC}) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{BC} \cong 20\text{m}$$

**Örnek 2.3.4(\*):** 50 N ağırlığında bir cisim  $30^\circ$  eğimli sürtünmesiz yolda aşağı doğru  $1 \text{ m/s}$  'lik hızla hareket ediyorken, cisme grafikte görüldüğü şekilde zamanla değişen bir  $F$  kuvveti etki ediyor. Buna göre; cismin hızının maksimum değerini hesaplayınız. ( $g=10\text{m/s}^2$ )

**Cevap:**  $21\text{m/s}$





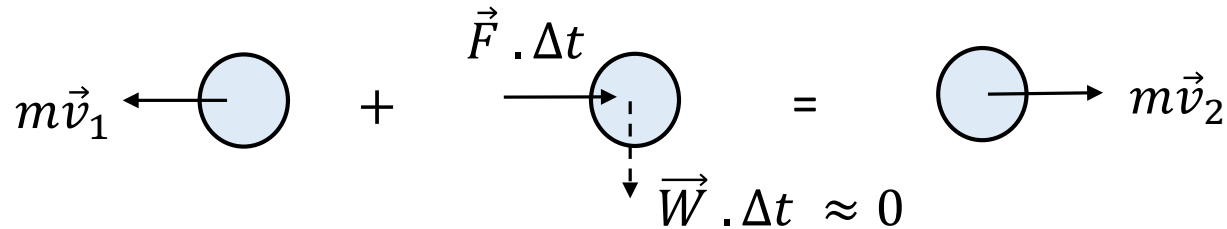
**Örnek 2.3.5 (\*):** Bir halat, bir ucundan 500kg kütleli büyük bir boruya diğer ucundan bir motora bağlanmıştır. Motorun çalıştırılmasıyla halatta oluşan  $T$  kuvveti yardımıyla boru çekilmektedir.  $T$  kuvvetinin zamana bağlı değişim grafiği şekildeki gibidir. Boruyla zemin arasındaki kinetik ve statik sürtünme katsayıları sırasıyla  $\mu_k = 0.4$  ve  $\mu_s = 0.5$  olduğuna göre; 5.saniyede borunun sürüklenme hızını hesaplayınız. (**Cevap:**  $v = 15.9m/s$ )



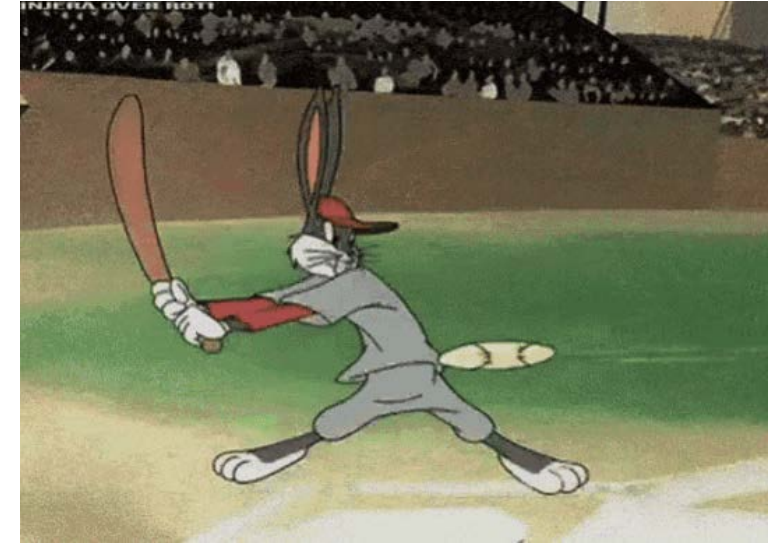
### 2.3.5 İmpulsif Kuvvetler:

Bir cisme çok kısa zaman aralığı içerisinde etki etmesine rağmen cismin momentumunu ihmal edilemeyecek seviyede değiştiren yüksek şiddette kuvvetlere impulsif kuvvetler denir. (Beyzbol sopasının topa uyguladığı kuvvet buna bir örnektir.)

İmpulsif kuvvetler  $\Delta t$  kısa zaman aralığında sabit kabul edilir ve impusları:  $\int \vec{F}.dt = \vec{F} .\Delta t$  denklemiyle bulunur.



Ağırlık kuvvetlerinin impulsarı, impulsif kuvvetlere göre çok küçüktür ve aksi söylenmedikçe ihmal edilir.



### 2.3.6 Momentumun Korunumu:

Bir maddesel nokta veya maddesel noktalar sisteminde dış kuvvetlerin impulslarının toplamı sıfır ise sistemin toplam momentumu değişmez yani momentum korunur.

$$\Sigma m_i \vec{v}_{1i} + \overrightarrow{\Sigma Dışİmp_{1 \rightarrow 2}} = \Sigma m_i \vec{v}_{2i} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\Sigma Dışİmp_{1 \rightarrow 2}} = 0 \quad \text{ise toplam momentum değişmez:}$$


Momentumun Korunumu Denklemi:  $\Sigma m_i \vec{v}_{1i} = \Sigma m_i \vec{v}_{2i}$  (D.2.23)

Veya momentumun korunumu hangi ekseninde sözkonusu ise skaler olarak o eksen için yazılır:

Örneğin x eksenine göre momentumun korunumu varsa :

$$\Sigma m_i v_{1x} = \Sigma m_i v_{2x} \quad \rightarrow \quad m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} + \dots = m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx} + \dots$$

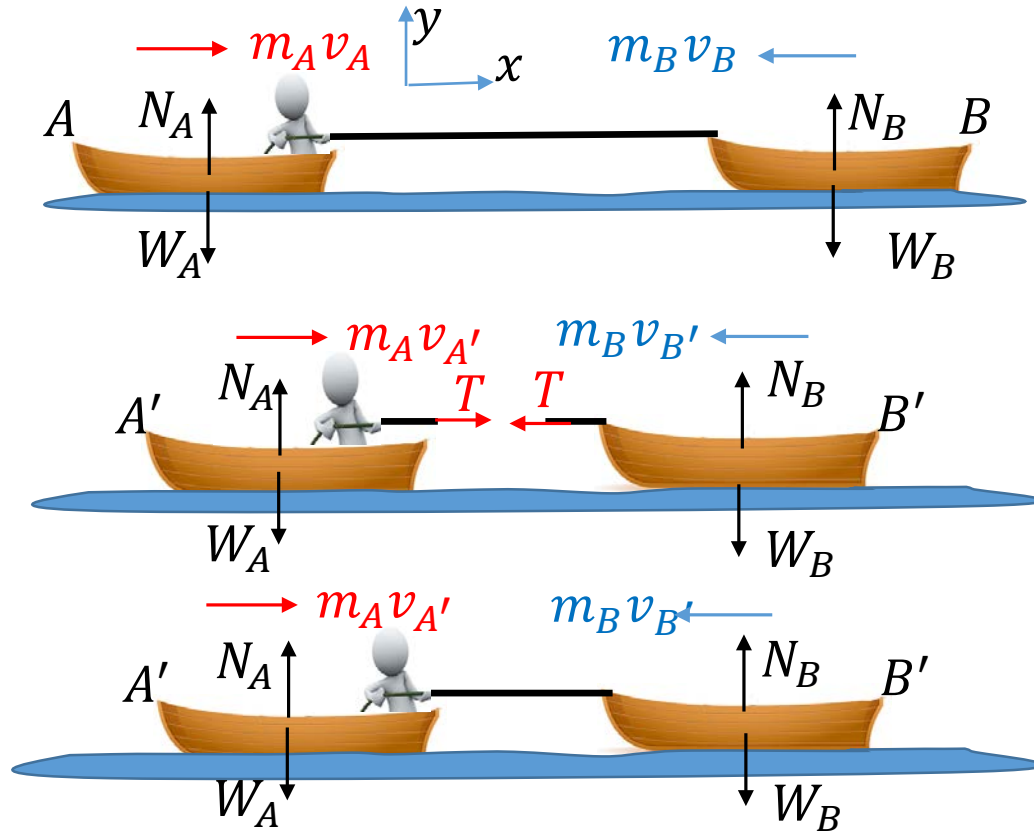
**Dikkat:** Momentum korunuyorsa, enerji de korunur diyemeyiz.



## 2.3.7 Momentumun Korunumunda 2 önemli hal

**1.Hal:** Hareket sırasında dış kuvvetler sürekli birbirine dengelerse sistemin momentumu korunur.

**Örnek :** Bir kayıktaki kişi diğer kayığı iple çekerken (sürtünmeler ihmal edilir)



- y yönünde kuvvetler her an birbirini dengeler.
- Hareketin olduğu x yönünde ise;
- A ve B kayıklarını ayrı ayrı düşünürsek ipteki T kuvveti herbirisi için dış kuvvet olur.
- T sabit olduğu için impulsu:  $\int_0^{\Delta t} T dt = T \Delta t$
- Tüm sistem için ise T kuvveti iç kuvvet olarak kalacağından impulsundan bahsedilemez, momentum korunur.

$$\text{A kayığı : } m_A v_A + T \Delta t = m_A v_A'$$

$$\text{B kayığı : } m_B v_B - T \Delta t = m_B v_B'$$

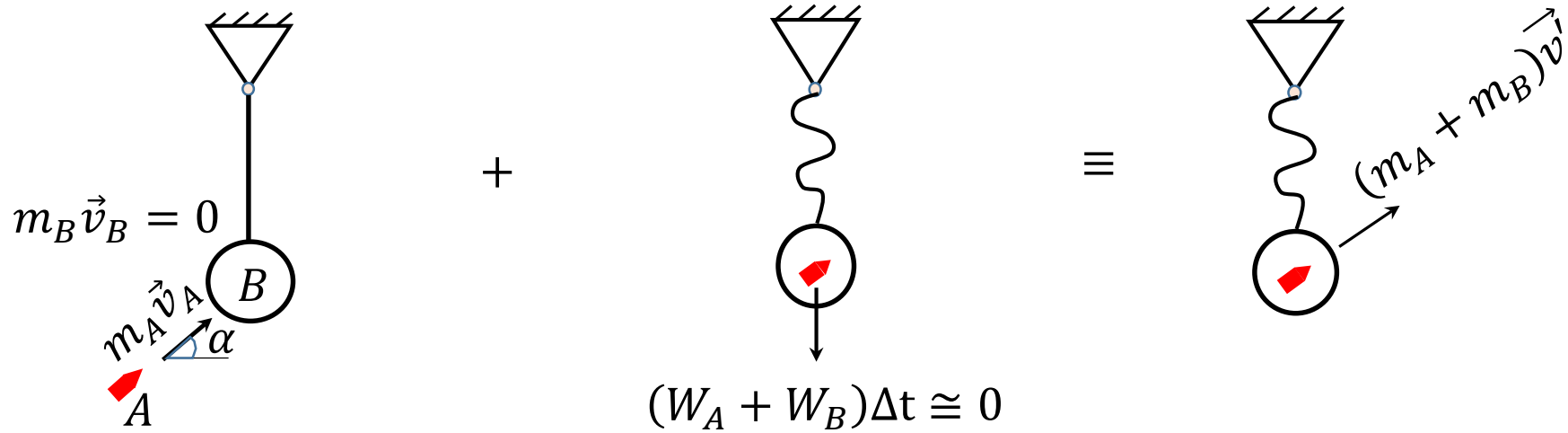
Tüm Sistem:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

(sistemin toplam momentumu korunur.)

**2.Hal:** Zaman aralığı ( $\Delta t$ ) çok kısa, dış kuvvetler impulsif cinsten olmadığından toplam impulsları ihmal edilecek seviyededir.

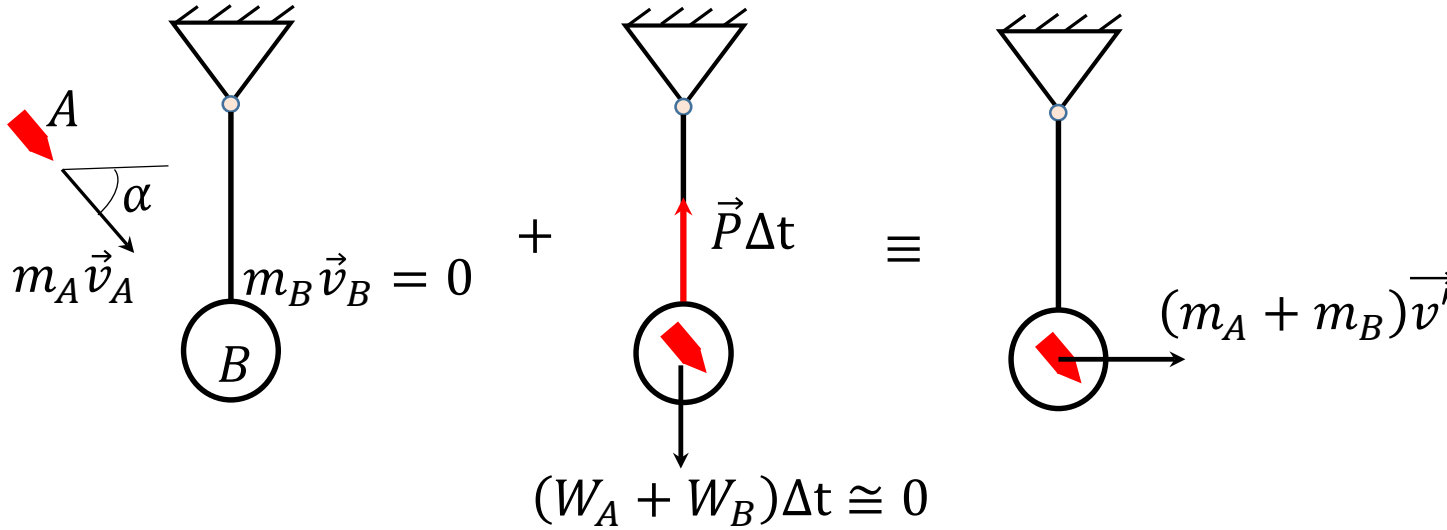
**Örnek:** Bir ipe bağlı topa alttan atılıp saplanan mermi. (ip gevşer ve ipte bir kuvvet oluşmaz.)



$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + \cancel{\Sigma Dış Imp}_{1 \rightarrow 2} = (m_A + m_B) \vec{v}'$$

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{v}' \quad (\text{sistemin toplam momentumu korunur.})$$

**Eğer mermi yukarıdan gönderilirse:** İpte bir impulsif kuvvet oluşur, bu durumda kuvvet yönünde momentum korunmaz.



Sisteme ait İmpuls-Momentum Denklemleri:

Vektörel:

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + \vec{P}\Delta t = (m_A + m_B) \vec{v}'$$

*x doğrultusunda momentum korunur.*

Skaler:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{+x} \\ +y \uparrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_A v_A \cos \alpha + m_B \cancel{v_{B_x}}^0 + \cancel{P_x \Delta t}^0 = (m_A + m_B) v_x' \rightarrow m_A v_A \cos \alpha = (m_A + m_B) v' \\ -m_A v_A \sin \alpha + m_B \cancel{v_{B_y}}^0 + P_y \Delta t = (m_A + m_B) \cancel{v_y'}^0 \rightarrow -m_A v_A \sin \alpha + P \Delta t = 0 \end{array}$$

*y doğrultusunda momentum korunmaz.*

### 2.3.8 Çarpışma

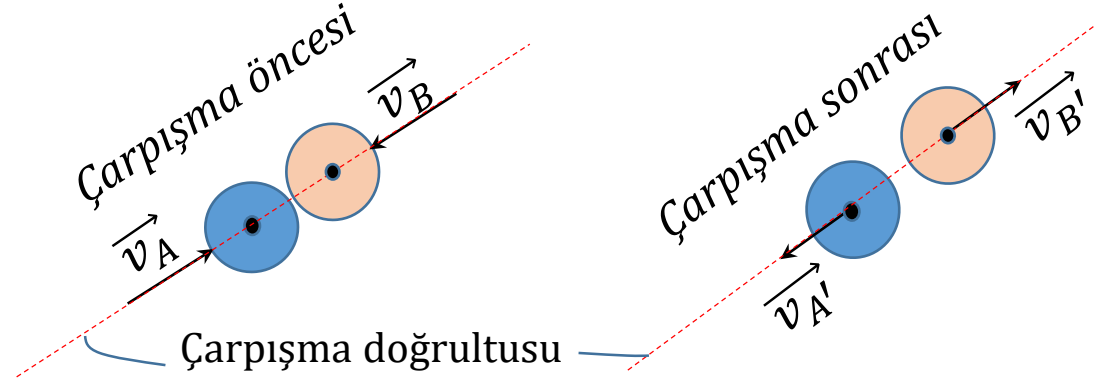
- İki cismin birbirlerine çok kısa zaman aralığında, birbirlerine dokunup (çarpıp) bu anda birbirlerine impulsif kuvvetler uygulamalarına çarpışma denir.
- Cisimlerin birbirlerine uyguladıkları kuvvetler cisimlerin herbirisi için dış, sistem için iç kuvvet kalacaktır.
- Bu sebeple çarpışma olayında cisimlerin momentumları korunmazken, sistemin bütünü için  $\Sigma Dışİmp_{1 \rightarrow 2} = 0$  olacağı için momentumu korunacaktır.

**Çarpışma Doğrultusu:** Çarpışan cisimlerin ağırlık merkezlerini birleştiren doğrultudur.

Çarpışmayı 2 farklı tipe ayırabiliriz:

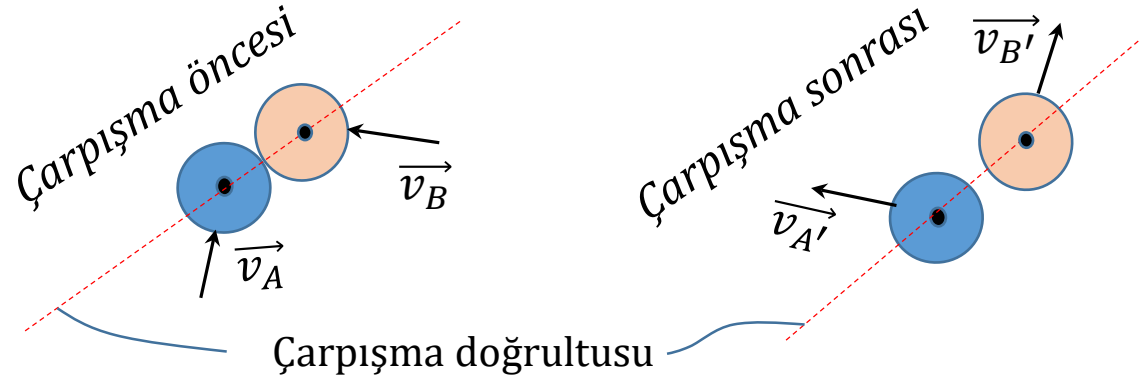
#### 1. Tip : Doğru Merkezsel Çarpışma:

Cisimlerin çarpışmadan önceki ve sonraki hız doğrultuları ile çarpışma doğrultusu çakışır:

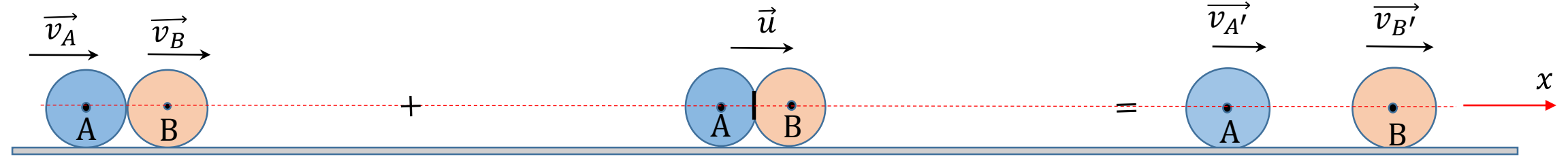


#### 2. Tip : Eğik Merkezsel Çarpışma:

Cisimlerin çarpışmadan önceki ve sonraki hız doğrultuları ile çarpışma doğrultusu çakışmaz.



Şimdi hedefimiz, her iki çarpışma tipi için, çarpışmadan önceki hızlar belli iken çarpışma sonrası hızları bulmaktır.... >>

**2.3.8.1) 1.Tip Doğru Merkezsel Çarpışma:**

Çarpışma öncesi

(v<sub>A</sub> ve v<sub>B</sub> hızları biliniyor)

Çarpışma anı

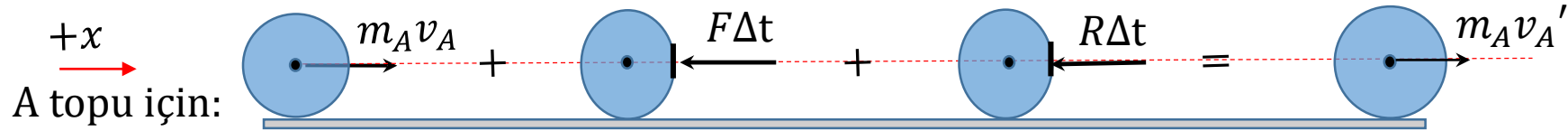
(Çarpışma anında çok kısa bir süre için cisimler malzeme cinsine bağlı olarak şekil değiştirir, maksimum şekil değiştirme konumunda ortak bir u hızına sahip olur. Daha sonra ilk hallerine geri dönüp son hızlarını kazanmış olurlar.)

Çarpışma sonrası

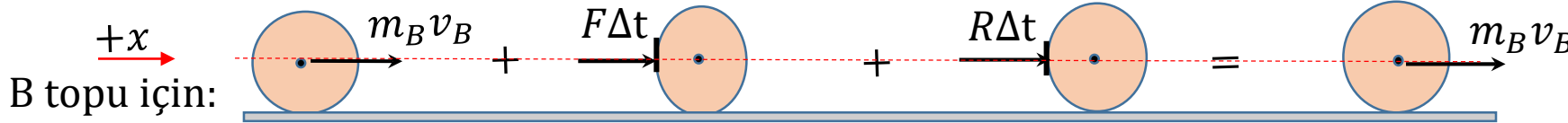
(v<sub>A'</sub> ve v<sub>B'</sub> hızları bilinmiyor.)

Çarpışma öncesi + Max. Şekil Değiştirme süresince İmpuls + Geri Dönüş süresince İmpuls = Çarpışma sonrası

x yönünde impuls-momentum denklemleri:



$$m_A v_A - F\Delta t - R\Delta t = m_A v_A'$$



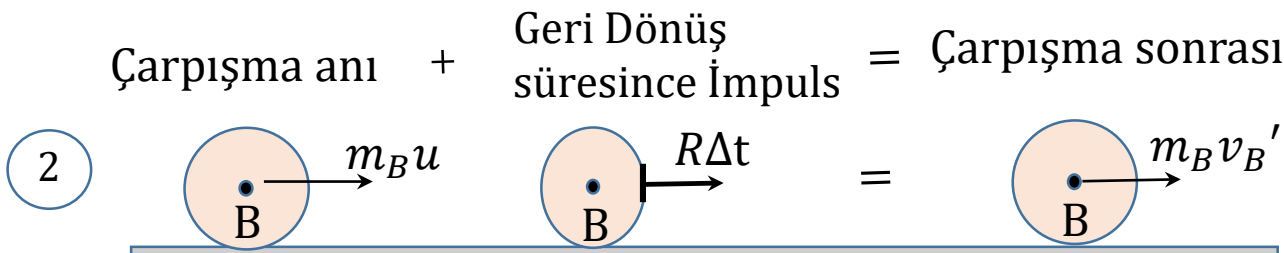
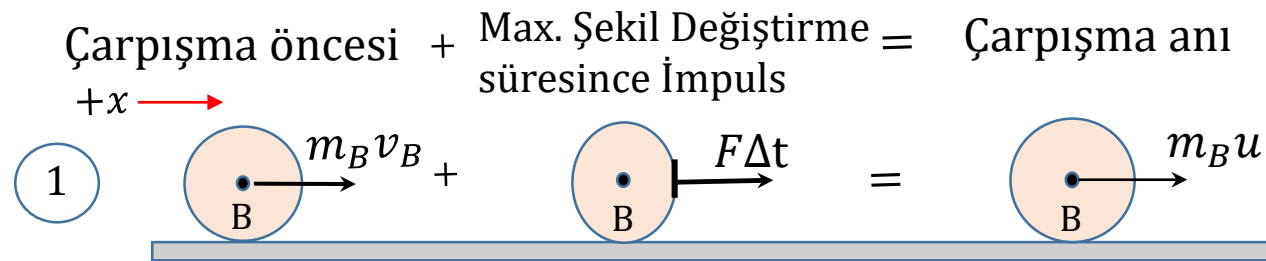
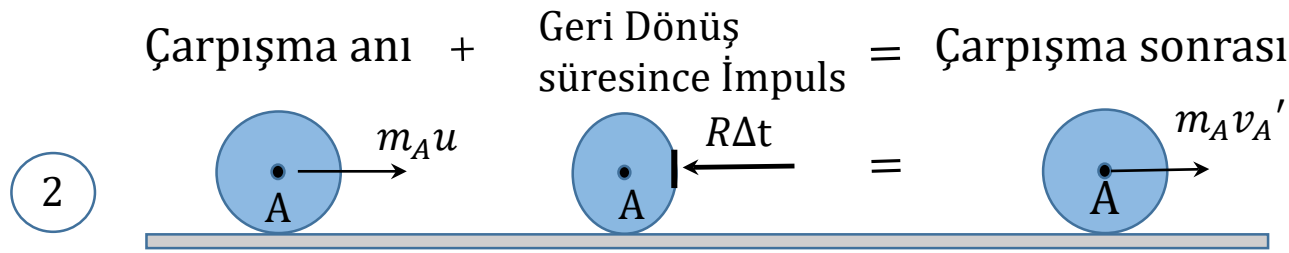
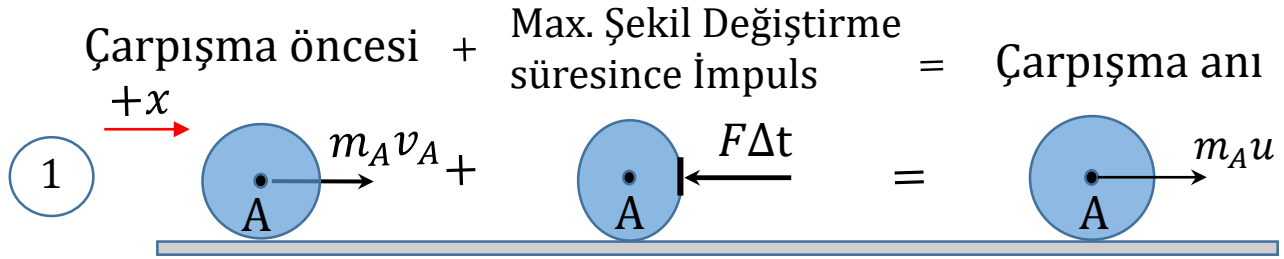
$$m_B v_B + F\Delta t + R\Delta t = m_B v_B'$$

Tüm sistem için momentum korunur:  $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$  (D.2.24)

2 bilinmeyen (v<sub>A'</sub> ve v<sub>B'</sub>) olduğu için 1 denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu denklem ise çarpışma katsayısından elde edilir...>>

## Çarpışma Katsayısı (e):

Çarpışan cisimlerin malzemeleri ile alakalı katsayıdır.  
A ve B toplarının hareketini 2 aşamada düşünürsek:



$$e = \frac{\text{Geri dönüş süresindeki impuls}}{\text{Max. Şekil Değiştirme süresindeki impuls}}$$

### A Topunun hareketinden

$$m_A v_A - F\Delta t = m_A u \rightarrow F\Delta t = m_A v_A - m_A u$$

$$m_A u - R\Delta t = m_A v'_A \rightarrow R\Delta t = m_A v'_A - m_A u$$

$$e = \frac{R\Delta t}{F\Delta t} = \frac{m_A u - m_A v'_A}{m_A v_A - m_A u} = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \quad (I)$$

### B Topunun hareketinden

$$m_B v_B + F\Delta t = m_B u \rightarrow F\Delta t = m_B u - m_B v_B$$

$$m_B u + R\Delta t = m_B v'_B \rightarrow R\Delta t = m_B v'_B - m_B u$$

$$e = \frac{R\Delta t}{F\Delta t} = \frac{m_B v'_B - m_B u}{m_B u - m_B v_B} = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \quad (II)$$

(I) ve (II) denklemlerinden Çarpışma katsayısı (e) hesabı:

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \rightarrow e = -\frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \quad (D.2.25)$$

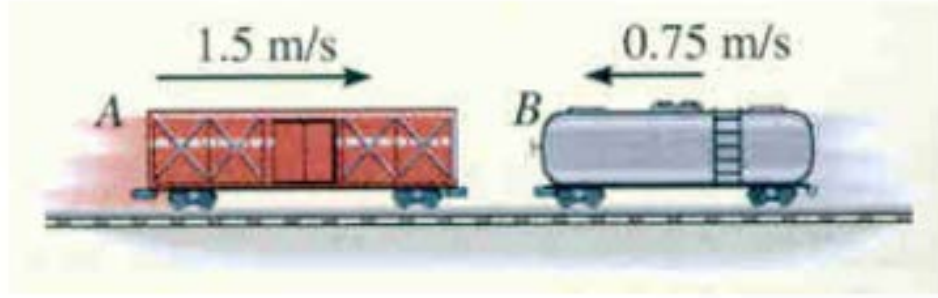
$$= \frac{u - v'_A + v'_B - u}{v_A - u + u - v_B}$$

$$0 \leq e \leq 1$$

$e = 0$  ise tam plastik çarpışma (Cisimler ortak hıza sahip olur.)

$e = 1$  ise tam elastik çarpışma (Enerji de korunur.)



**Örnek 2.3.6**

Aynı doğrultuda fakat zıt yönlerde hareket eden A ve B vagonları birbirleriyle yavaşça çarpışıp birleşiyor.

a-) Birleşmeden sonraki ortak hızlarını,

b-) birbirlerine uyguladıkları ortalama kuvveti hesaplayınız.

Kütleler :  $m_A = 15\text{ton}$ ,  $m_B = 12\text{ton}$ ,

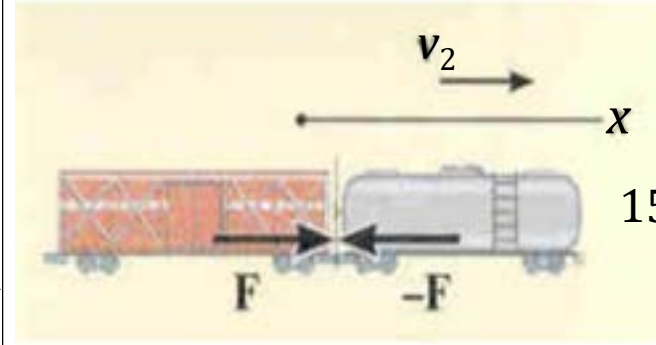
çarpışmadan önceki hızlar:

$v_A = 1.5\text{m/s}$  ve  $v_B = 0.75\text{m/s}$ ,

Çarpışma süresi : 0.8 saniye

**Çözüm:**

a-) Çarpışma sırasında tüm sistemin momentumu korunur.



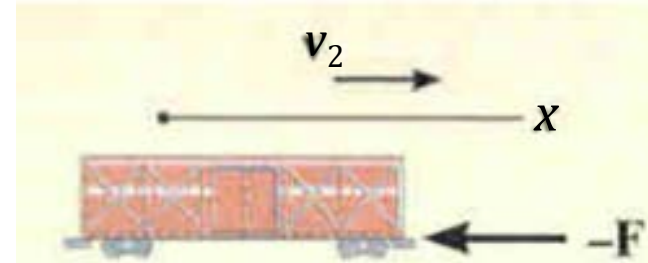
Çarpışma sonrası ortak hız:  $v_2$

$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

$$15000(1.5) + 12000(-0.75) = (27000)v_2$$

$$v_2 = 0.5\text{m/s}$$

b-)



Tek vagon için momentum korunmaz.  
İmpuls-Momentum denklemi yazılabilir.

A vagonu için yazarsak:

$$m_A(v_A)_1 + \int F dt = m_A(v_2)$$

$$15000(1.5) - \int F dt = 15000(0.5)$$

$$\int F dt = 15000\text{N.s}$$

$$\int F dt = \int F_{\text{ortalama}} dt = F_{\text{ortalama}} \int dt$$

$$= F_{\text{ortalama}} \Delta t = F_{\text{ortalama}} (0.8) = 15000$$

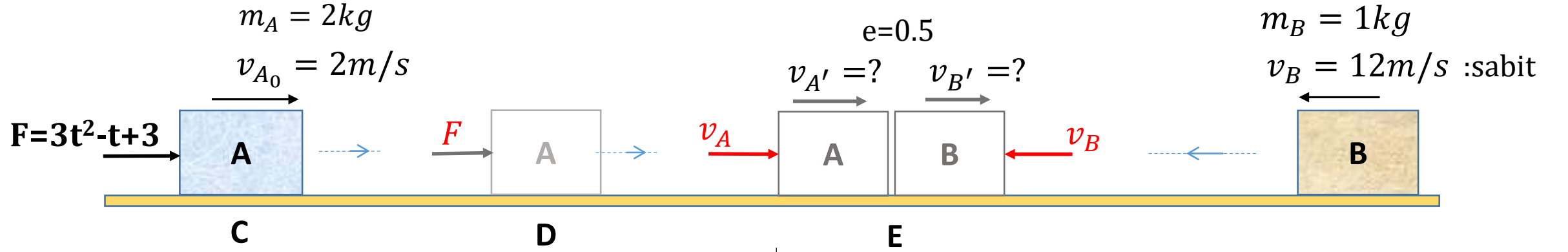
$$\rightarrow F_{\text{ortalama}} = 18750\text{N}$$

**Örnek 2.3.7** [\(Video 2.3b – Örnek 2.9\)](#)

2kg kütleli Bir A kutusu 2m/s hızla sağa doğru ilerlerken, C noktasından itibaren aynı yönde  $F=3t^2-t+3$  şeklinde zamanla değişen bir kuvvet 2 saniye boyunca (D noktasına kadar) A kutusuna etki etmektedir. Kuvvet D noktasında kaldırıldıktan sonra, E noktasında sola doğru 12m/s lik sabit hızla gelen 1kg B kutusu ile çarpışıyor. Çarpışma katsayısı  $e=0.5$  olduğuna göre, çarpışmadan sonraki A ve B kutularının hızlarını hesaplayınız. Sürtünmeleri ihmal ediniz.

**Çözüm..>>**



**Çözüm:**

C-D arası A cismi için İmpuls - Momentum Denklemi :

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{x} \quad m_A v_{A0} + \int_0^2 F(t) dt &= m_A v_A \\
 &= 2 \times 2 + \int_0^2 (3t^2 - t + 3) dt = 2 v_A \\
 &= 2 \times 2 + \left( \frac{3t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t \right) \Big|_0^2 = 2 v_A \\
 &= 4 + 2^3 - \frac{2^2}{2} + 3 \times 2 = 2 v_A \rightarrow v_A = 24 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

(D-E arasında sürtünme olmadığından A kutusunun hızı değişmez.)

E noktasındaki çarpışma

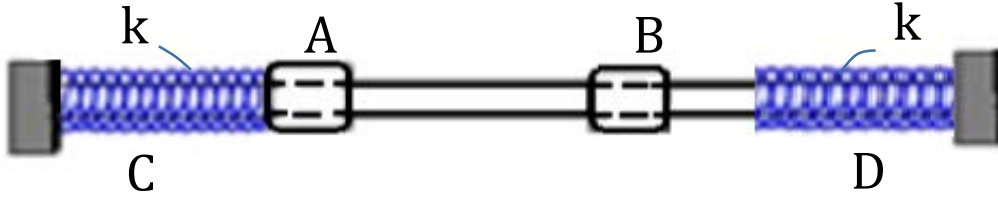
- x doğrultusundaki sistemin momentumu korunur.

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{x} \quad m_A v_A + m_B v_B &= m_A v_A' + m_B v_B' \\
 2 \times 24 - 1 \times 12 &= 2 v_A' + 1 v_B' \\
 36 &= 2 v_A' + v_B' \quad (1)
 \end{aligned}$$

- Çarpışma katsayısı:  $e = -\frac{v_B' - v_A'}{v_B - v_A}$

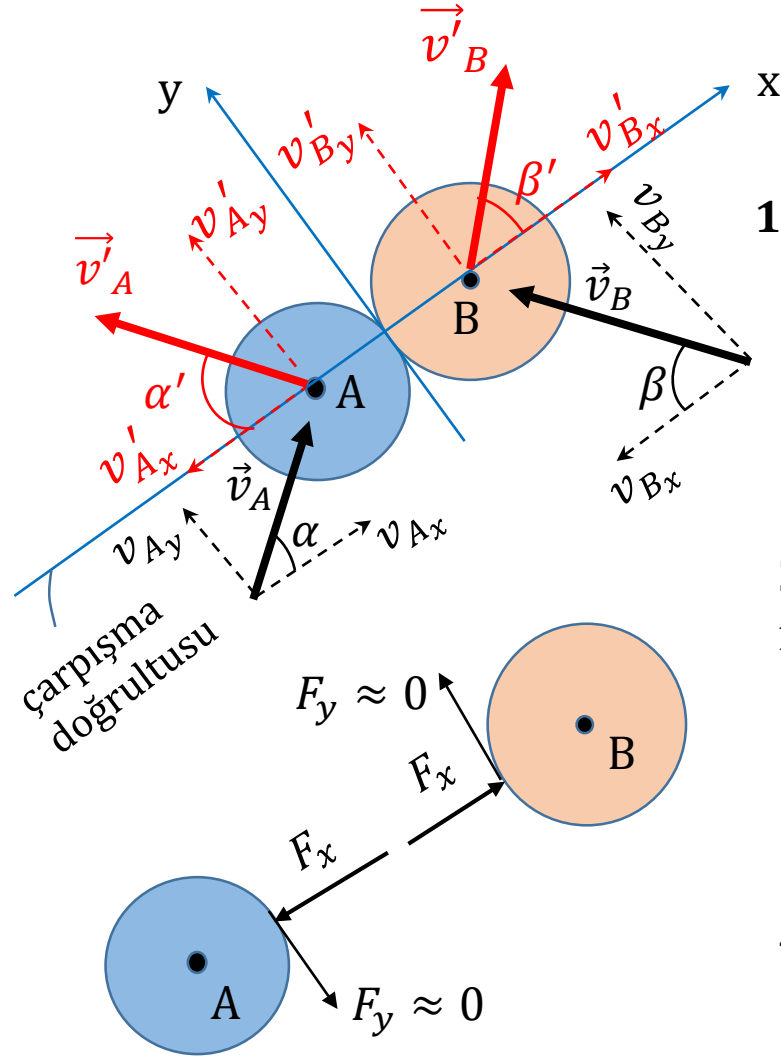
$$0,5 = -\frac{v_B' - v_A'}{-12 - 24} \rightarrow v_A' - v_B' = -18 \quad (2)$$

- (1) ve (2) den  $\rightarrow v_A' = 6 \text{ m/s}$  ,  $v_B' = 24 \text{ m/s}$

**Örnek 2.3.8 (\*)**

(Jeoloji Müh. Final Sorusu) Ağırlıkları sırasıyla  $W_A = 2\text{N}$  ve  $W_B = 3\text{N}$  olan A ve B bilezikleri şekildeki gibi yatay bir çubuk üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. C deki yay 18cm sıkıştırıldıktan sonra A bileziği serbest bırakılıyor ve bilezik kayarak B bileziğine çarpıyor ve sonra B bileziği de D yayını sıkıştırıyor. Buna göre D yayının maksimum sıkışma miktarını hesaplayınız. Çarpışma katsayısı  $e=0.8$  ve her iki yay için yay katsayısı  $k = 4\text{N/cm}$  dir.

**(Cevap:** D yayı 15.9cm) sıkışır.

**2.3.8.2) 2.Tip Eğik Merkezsel Çarpışma:** : Cisimlerin hız doğrultuları ile çarpışma doğrultusu farklıdır.

- $v_A, v_B, \alpha, \beta, m_A, m_B$  biliniyor,  $\rightarrow v'_{Ax}, v'_{Ay}, v'_{Bx}, v'_{By}$  değerlerini arıyoruz.

Bilinmeyenleri içeren 4 bağımsız lineer denklem aşağıdaki işlemlerle bulunur:

**1 -2)** Cisimlerin teğeti (y) doğrultusundaki oluşan sürtünme kuvvetleri ihmal edilir ( $F_y \approx 0$ )

*Bu durumda y yönünde bir impuls etki etmeyeceğinden, cisimlerin bu yöndeki momentumları ayrı ayrı korunur.*

$$m_A v_{Ay} = m_A v'_{Ay} \rightarrow v_{Ay} = v'_{Ay} \quad (D.2.26.a)$$

$$m_B v_{By} = m_B v'_{By} \rightarrow v_{By} = v'_{By} \quad (D.2.26.b)$$

**3-)** Teğete dik olan (x) çarpışma doğrultusundaki tepki kuvvetleri ( $F_x$ ) tüm sistem için iç kuvvettir. Dolayısıyla tüm sistem için bu kuvvetin impulsundan bahsedilemez.

*Bu sebeple tüm sistemin x yönündeki momentumu korunur:*

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx} \quad (D.2.26.c)$$

**4-)** Çarpışma katsayısı, x yönünde yazılır:

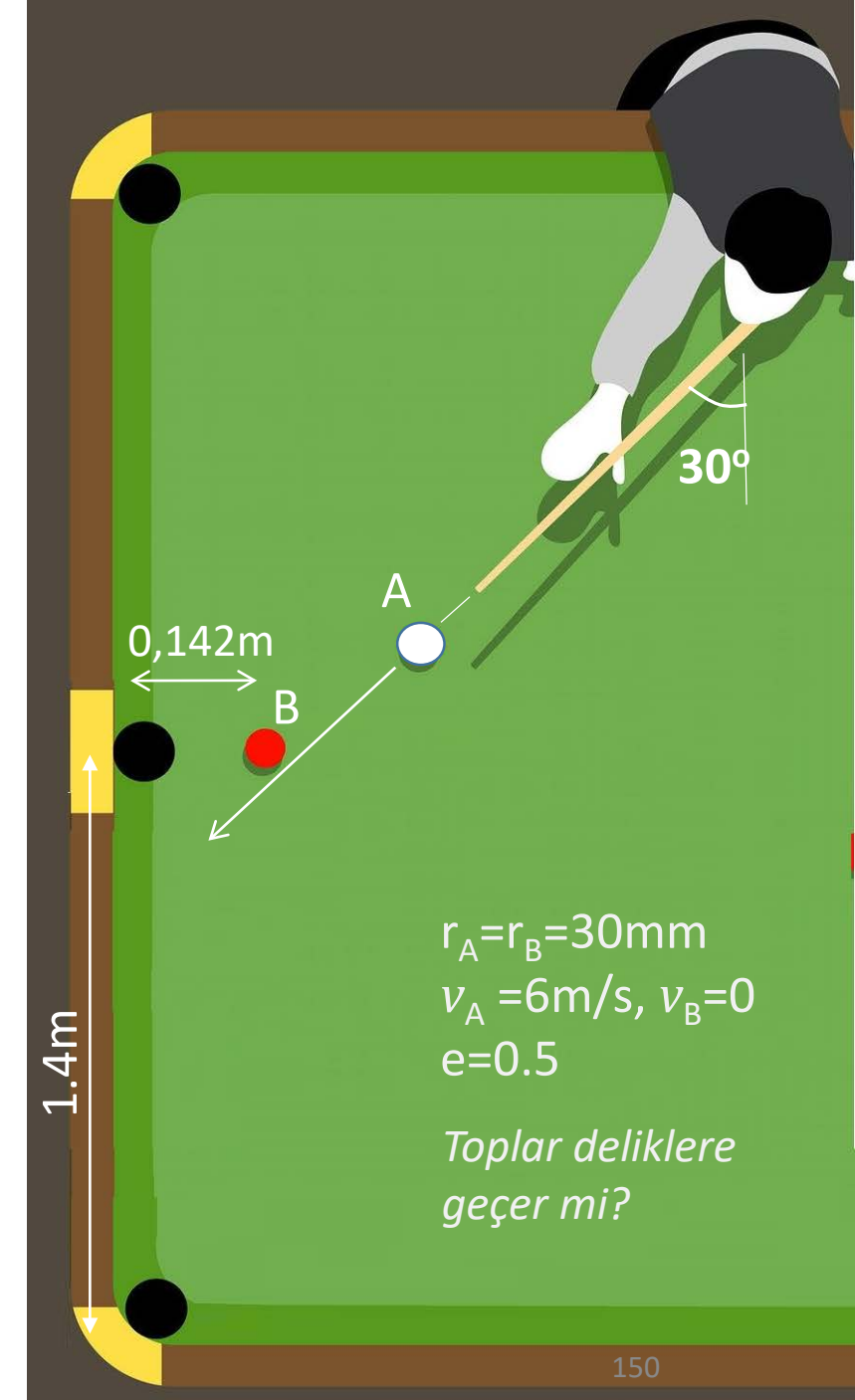
$$e = - \frac{v'_{Bx} - v'_{Ax}}{v_{Bx} - v_{Ax}} \quad (D.2.26.d)$$

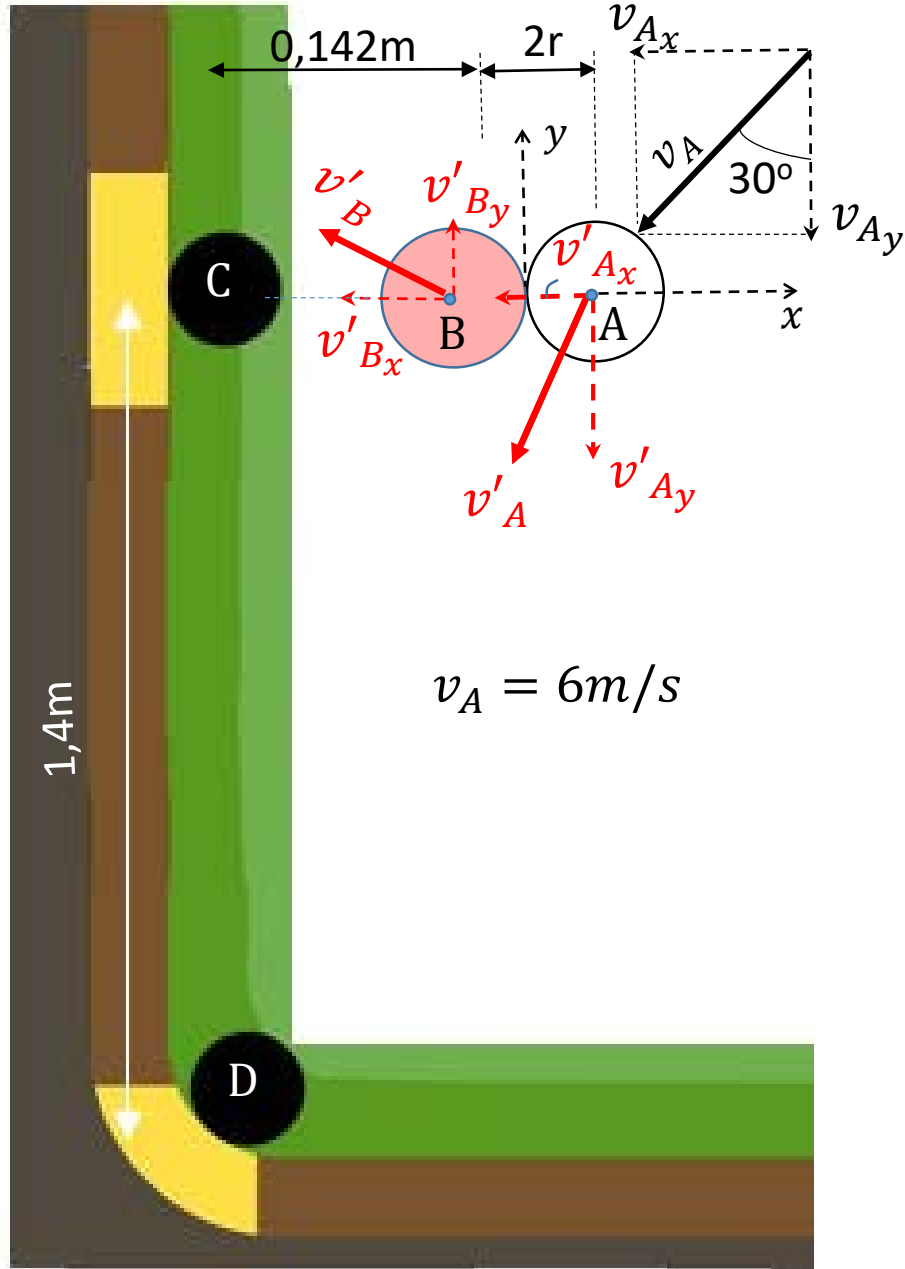
Bu 4 denklemlerden den 4 bilinmeyen değer ( $v'_{Ax}, v'_{Ay}, v'_{Bx}, v'_{By}$ ) bulunur.

Üstteki şekil dikkate alındığında  $-x$  yönünde olduklarından  $v_{Bx} < 0$  ve  $v'_{Ax} < 0$  ve işaretleri «-» dir.

**Örnek 2.3.9** [\(Video 2.3b – Örnek 2.10\)](#)

Bir bilardo oyuncusu A topunu, durmakta olan B topuna vurdurup, her iki topu da deliklere sokmak istiyor. Bunun için bilardo sopası ile A topuna, düşeyle  $30^\circ$  lik açı yapacak şekilde vuruyor ve  $6\text{m/s}$  lik bir hız kazandırıyor. Bilardocunun amacına ulaşma şartlarını belirleyiniz. (Sürtünmeleri ve topların boyutlarını ihmal ediniz. Çarpışma katsayısı  $e = 0.5$  dir, topların kütleleri aynı, yarıçapları  $30\text{mm}$  dir. Çarpışma anında topların temas noktalarının ortak teğeti düşey doğrultudadır.)

**Çözüm..>>**



$$v_A = 6 \text{ m/s}$$

### Çözüm:

$v'_A \rightarrow$  AD doğrultusunda ise D deliğine girer.

$v'_B \rightarrow$  BC doğrultusunda ise C deliğine girer.  
(Bunun için  $v'_{By} = 0$  olmalıdır.)

Bu kontroller için önce çarpışmadan sonraki hız bileşenleri  
( $v'_{By}$ ,  $v'_{Bx}$ ,  $v'_{Ax}$ ,  $v'_{Ay}$ ) bulunmalıdır.

Bu çarpışma tipi eğik merkezsel çarpışmadır:

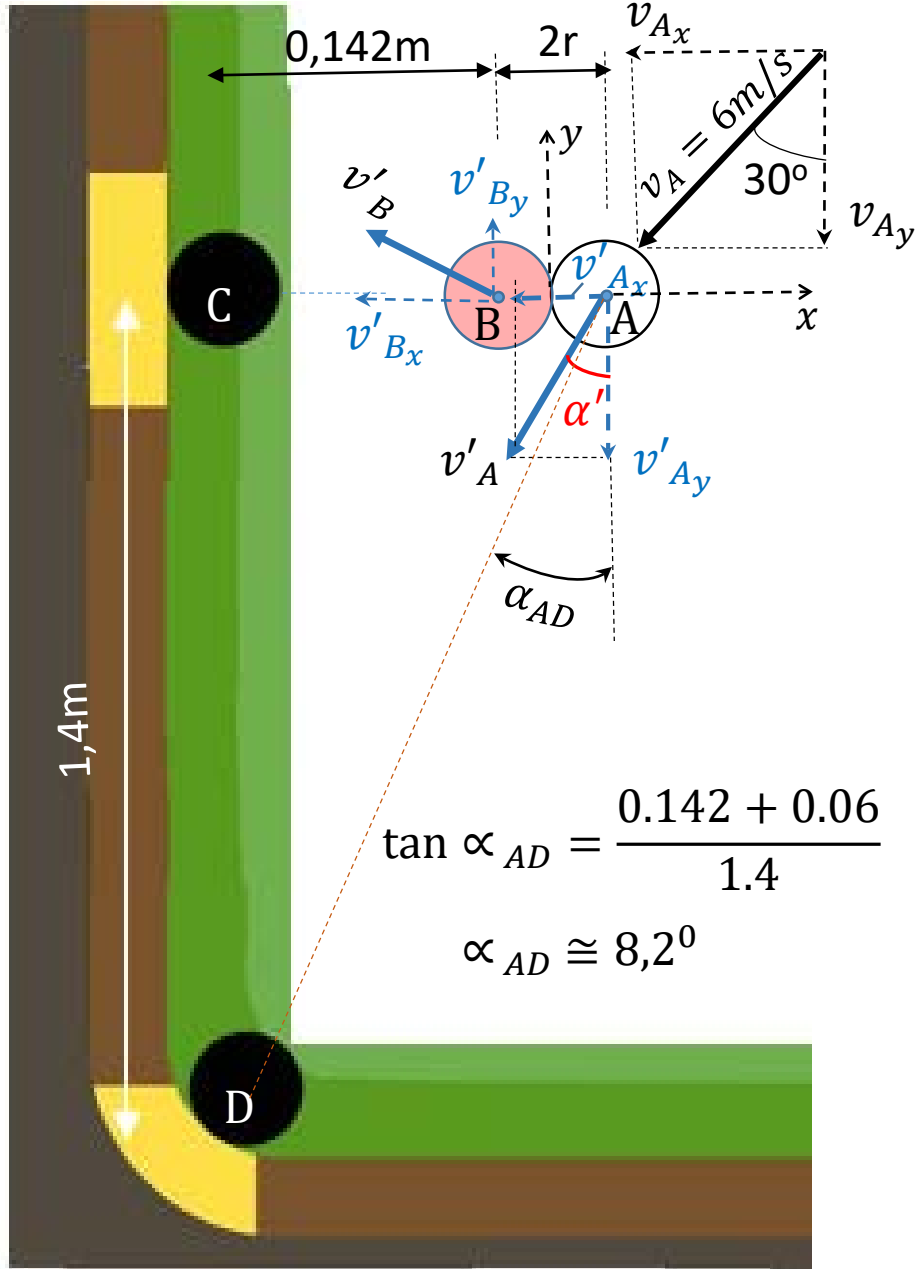
1-2) A ve B toplarının momentumlarının y bileşenleri korunur.

$$m_A v_{Ay} = m_A v'_{Ay} \rightarrow v_{Ay} = v'_{Ay} = -6 \cdot \cos 30^\circ \rightarrow v'_{Ay} = -5,196 \text{ m/s}$$

$$m_B v_{By} = m_B v'_{By} \rightarrow (v_B = 0) \rightarrow v_{By} = v'_{By} = 0 \rightarrow v'_{By} = 0$$

B topunun sadece  $v'_{Bx}$  bileşeni vardır ve BC doğrultusunda hareket eder ve C deliğine girer. O halde:

**1.şart:** Bilardocu A topunu B'ye şekildeki gibi topların merkezlerini birleştiren doğrultu yatay (x'e paralel) olacak şekilde çarptırmalıdır.



27.10.2023

3-) x yönünde sisteminin momentumu korunur:

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx}$$

$$m_A = m_B, v_{Ax} = -v_A \sin 30^\circ = -6 \sin 30^\circ = -3 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow v'_{Ax} + v'_{Bx} = -3 \quad (I)$$

4-) x yönünde çarpışma katsayısı:

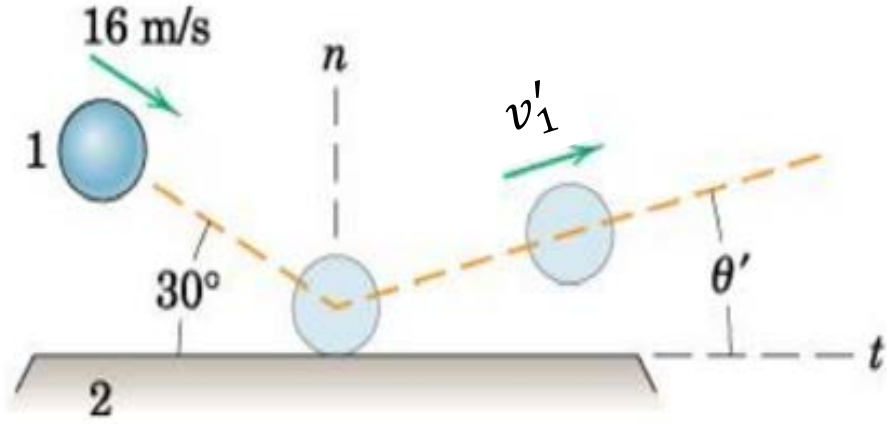
$$e = -\frac{v'_{Bx} - v'_{Ax}}{v_{Bx} - v_{Ax}} = 0.5 = -\frac{v'_{Bx} - v'_{Ax}}{0 - (-3)} \rightarrow v'_{Ax} - v'_{Bx} = 1.5 \quad (II)$$

(I) ve (II) den  $v'_{Ax} = -0.75 \text{ m/s}$ ,  $v'_{Bx} = -2.25 \text{ m/s}$  bulunur.

$$\tan \alpha' = \frac{|v'_{Ax}|}{|v'_{Ay}|} = \frac{|-0.75|}{|-5.196|} \rightarrow \alpha' = 8.2^\circ = \alpha_{AD}$$

O halde  $v'_A$  .. AD yönündedir. B topu D deliğine girer.

**2.Şart:** Çarpışma katsayısı bilardo toplarının malzeme cinsiyle ilgilidir. Topların malzemesi  $e=0.5$  lik bir çarpışma katsayısını sağlayacak şekilde olmalıdır.



### Örnek 2.3.10 (\*)

1 nolu top şekildeki gibi  $30^\circ$  lik bir doğrultuda  $16\text{m/s}$  lik hızla sabit zemine çarpıyor. Çarpışma katsayısı  $e=0.5$  olduğuna göre, topun çarpışmadan sonraki  $v_1'$  hızını ve  $\theta'$  yönlenme açısını hesaplayınız. **Cevap:**  $v_1' = 14.42\text{m/s}$ ,  $\theta' = 16.10^\circ$

Maddesel Nokta Kinetiği

**AÇISAL**

## **2.4 İmpuls-Momentum**

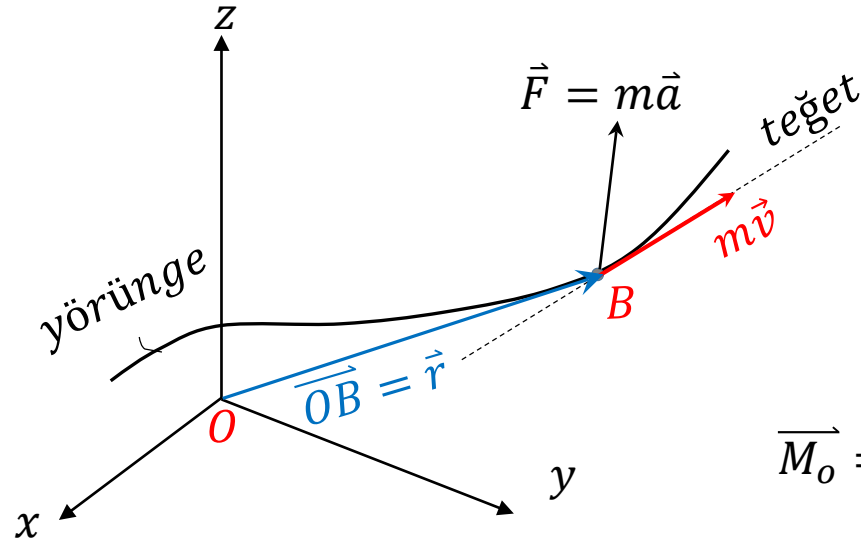




**Açısal momentum - Açısal İmpuls** denklemi bazı özel problemlerde daha kolay çözüme erişmemizi sağlar.

Doğrusal momentum:  $m\vec{v}$  idi.

**2.4.1 Açısal Momentum( $\vec{H}_O$ )** : Doğrusal momentumun bir t anında bir noktaya göre momentine denir.



Vektörel hesabı:  $\vec{H}_O = \vec{OB} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v}$  (D.2.27)

**Moment  
alınan nokta**

Cismin bulunduğu nokta  
(veya yörünge teğet üzerinde  
herhangi bir nokta olabilir.)

0 andaki doğrusal  
momentum

Dış kuvvetin O'ya göre momenti:  $\vec{M}_O$

$$\vec{M}_O = \vec{OB} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{M}_O$$

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times m\vec{v}}_{= \vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \longrightarrow \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad (D.2.28)$$

(Aynı yöndeki vektörlerin  
vektörel çarpımı sıfırdır.)

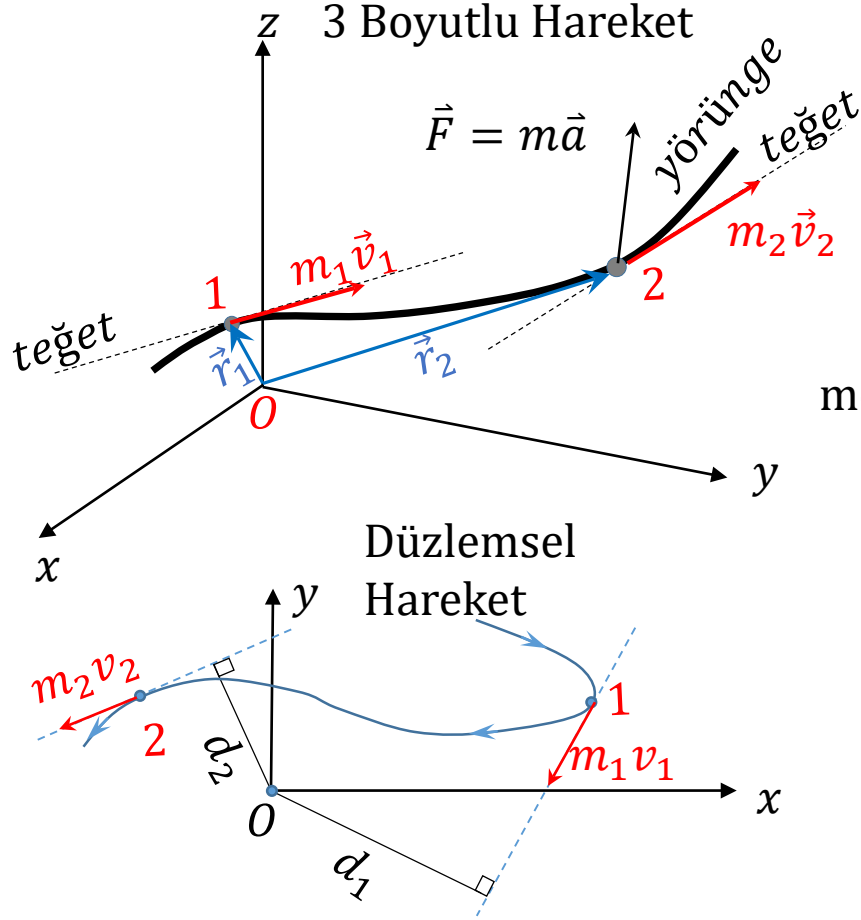
$$\longrightarrow = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

Açısal Momentumun zamana göre 1nci türevi  
dış kuvvetin o noktaya göre momentine eşittir.

**2.4.2 Açısal İmpuls** : Dış kuvvetin momentinin impulsudur.  
Bir zaman aralığı için hesaplanır:

$$\text{Dış - Açısal İmpuls} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt \quad (D.2.29)$$

### 2.4.3 Açılal İmpuls – Açılal Momentum İlkesi:



(D.2.28) Denklemi tekrar hatırlarsak:  $\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$

$$\rightarrow \vec{M}_O dt = d\vec{H}_O \rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt}_{\text{(Açılal İmpuls)}} = \int_{H_{O1}}^{H_{O2}} d\vec{H}_O = \vec{H}_{O2} - \vec{H}_{O1}$$

1-2 konumları arasında açılal momentum-açılal impuls denklemi:

$$\vec{H}_{O1} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \vec{H}_{O2} \quad (\text{D.2.30a})$$

Daha açık ifadesiyle:

$$\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \quad (\text{D.2.30b})$$

Düzlemsel Harekette skaler 1 denklem yazılabilir. ( $d_1$  ve  $d_2$  dik uzaklıklar):

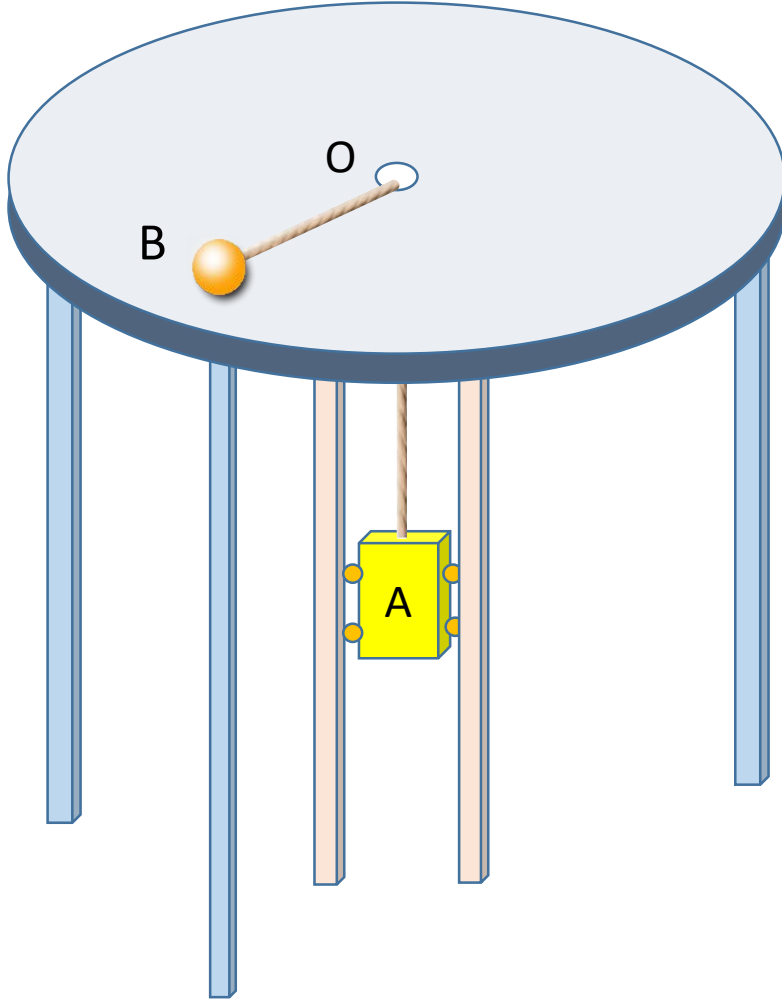
$$(d_1)mv_1 + \int M_O dt = (d_2)mv_2 \quad (\text{D.2.31})$$

Maddesel noktalar sistemi için:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{H}_{O1})_i + \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt \right)_i = \sum_{i=1}^n (\vec{H}_{O2})_i \quad (\text{D.2.32})$$

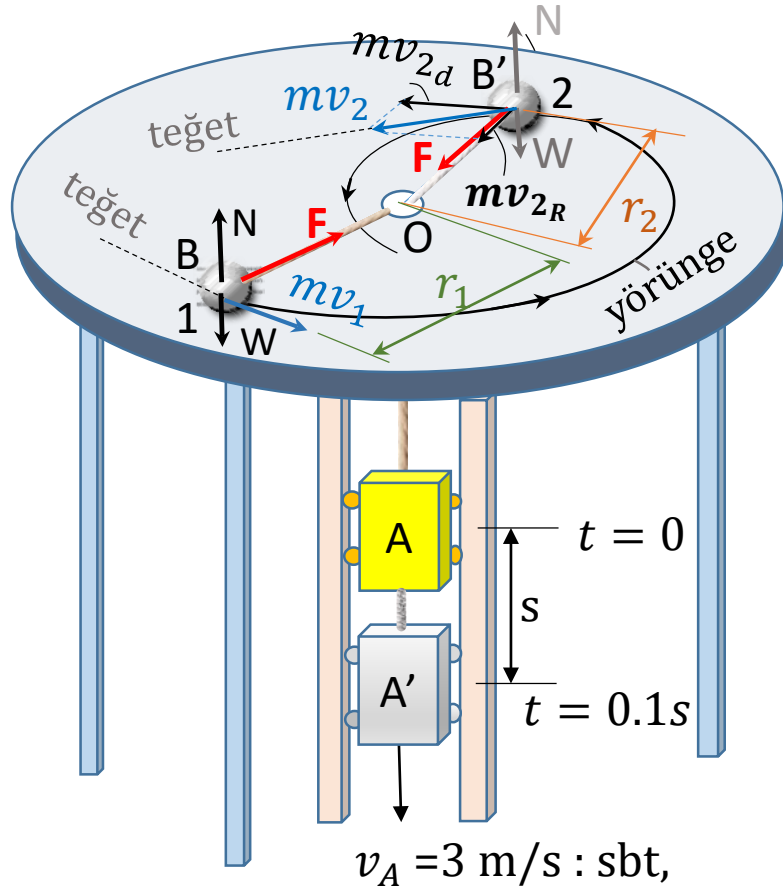
### 2.4.4 Açılal Momentumun Korunumu:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = 0 \quad \text{ise açılal momentum korunur.} \quad \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2} \rightarrow \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \quad (\text{D.2.33})$$

**Örnek 2.4.1** [\(Video 2.4 – Örnek 2.3.c.1\)](#)

Bir halat bir masanın orta noktasındaki delikten geçirilerek, bir ucundan masa üzerindeki B topuna, diğer ucundan A arabasına bağlanmıştır. A arabası durmakta iken, B topu  $2\text{m/s}$  lik sabit hızla dairesel hareket yapmaktadır. A arabası aşağı doğru  $3\text{m/s}$  lik sabit hızla harekete başlıyor. Buna göre A arabasının harekete başlamasından itibaren  $0.1$  saniye sonra B topunun hızını hesaplayınız. ( $OB = 0.6\text{m}$ )

Çözüm ... >>

**Çözüm:**

- N ve W hareketin her anında birbirine dengeledikleri için harekete etkisi yoktur.

-B topu masa düzleminde  $v_1$  ilk hızıyla dairesel hareket yaparken, A arabasının hareket ettirilmesiyle O merkezine doğru (radyal yönde) ilave bir hareket daha kazanır.. Arabaya ipile bağlı olduğu için topun radyal hız ( $v_R$ ) A arabasının hızına eşittir.

1 konumu: Arabanın henüz harekete başlamamış olduğunu düşünüyoruz.:

$$v_{1R} = 0, \quad v_1 = 2 \text{ m/s} \quad (\text{soruda verilmiş})$$

2 konumu: Topun radyal hızı arabanın hızına eşittir:

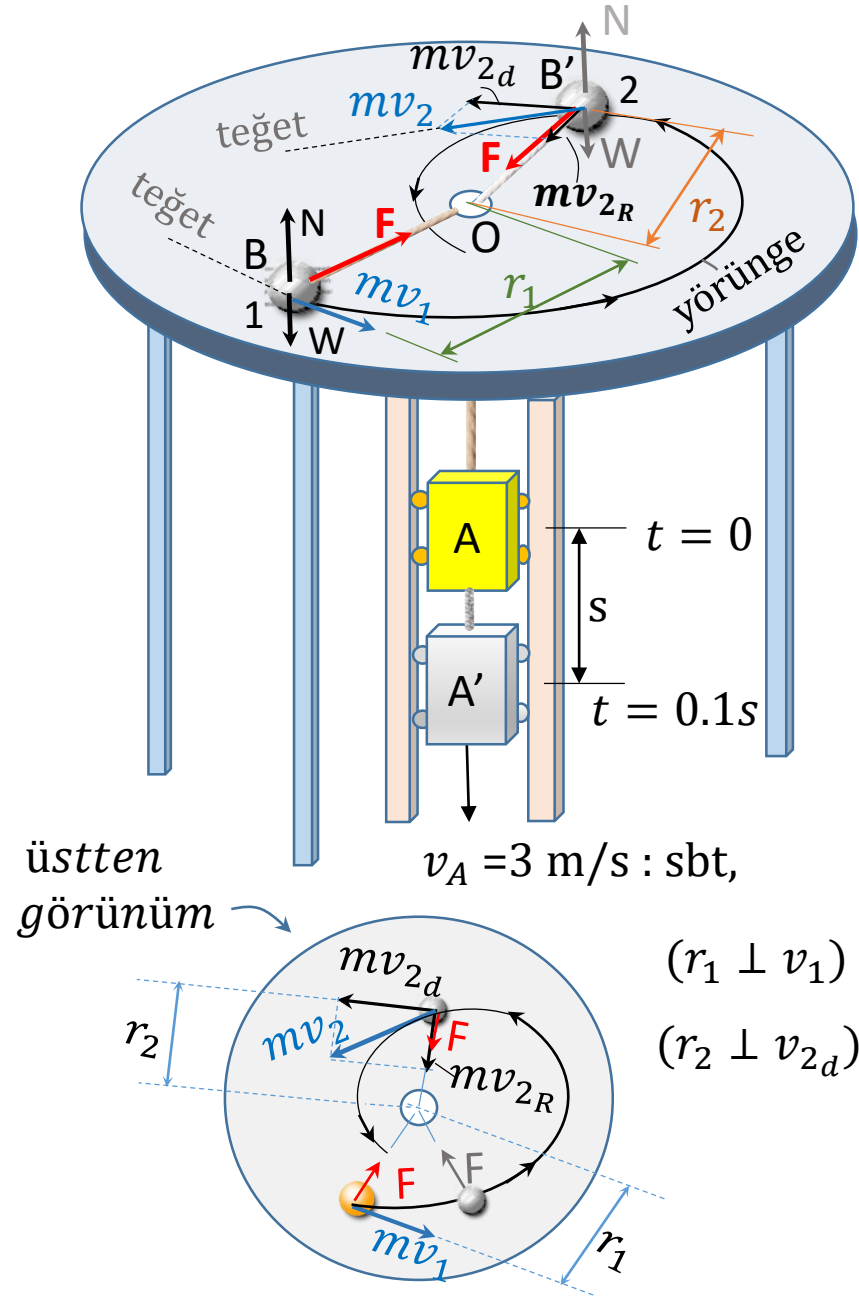
$$v_{2R} = v_A = 3 \text{ m/s}, \quad v_{2d} = ? \quad (\text{hesaplanacak})$$

Bir t anında masa üstündeki

ip kısmının boyu = ipin ilk boyu – arabanın aldığı yol =  $OB - s = 0.6 - s$

$$s = v_A \cdot t = 3 \times 0.1 = 0.3 \text{ m} \rightarrow 2 \text{ konumunda ipin boyu: } r_2 = OB' = 0.6 - 0.3$$

$$\rightarrow r_2 = 0.3 \text{ m}$$

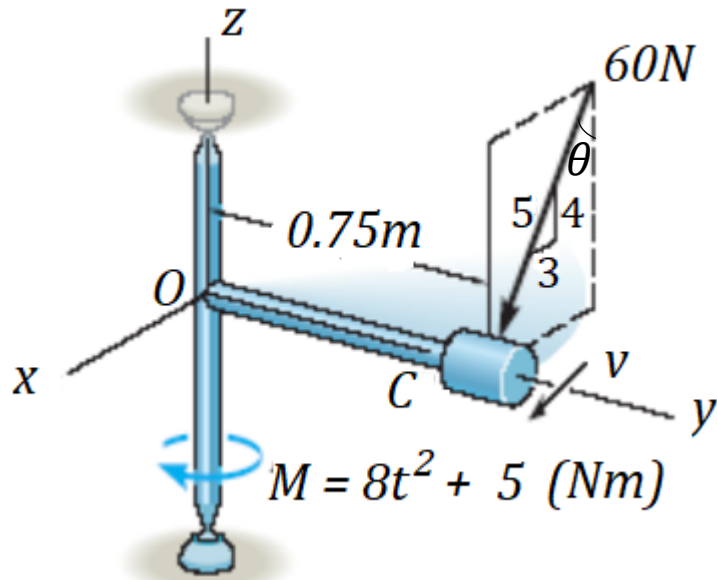


- A arabasının aşağı doğru hareketi sebebiyle, ipteki  $F$  kuvveti yörünge üzerinde topla birlikte dönerken, yönü daima  $O$  noktasına doğrudur (radyal yöndedir.). Dolayısıyla her an için  $O$ 'ya göre momenti sıfırdır  $M_o = 0$
- Ve bu sebeple 1-2 konumları arası momentin impulsu (açılal impuls) sıfırdır.  $\int M_o dt = 0$ .  $O$  halde topun açılal momentumu korunur.

$$r_1 \cdot mv_1 = r_2 \cdot mv_{2d} \rightarrow 0.6 \times 2 = 0.3 \times v_{2d} \Rightarrow v_{2d} = 4 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2d}^2 + v_{2R}^2} \rightarrow v_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} \rightarrow v_2 = 5 \text{ m/s}$$

- $mv_2$  'nin açılal momentumu:  $mv_{2R}$  ve  $mv_{2d}$  bileşenlerinin ayrı ayrı açılal momentumlarının toplamıdır. Fakat;
- $mv_{2R}$  bileşeninin dik uzaklığı olmadığından sadece  $mv_{2d}$  bileşeninin açılal momentumu olduğuna dikkat ediniz.



**Örnek 2.4.2 :** z eksenini etrafında dönmekte olan T şeklindeki elamanın ucuna 10kg lık C kütlesi bağlanmıştır. C kütlesinin başlangıçtaki hızı + x yönünde 2m/s iken, şekildeki gibi sabit  $F = 60\text{N}$  luk kuvvet ve değişken  $M = 8t^2 + 5$  moment uygulanıyor. 2 saniye sonra C kütlesinin hızını hesaplayınız. Bağlantılardan dolayı sadece z ekseninde dönme söz konusudur.

**Çözüm:** İşaret hatası yapmamak için Vektörel çözüm yapacağız.

C kütlesinin O noktasına göre açısal momentumları:

$$\vec{H}_{O1} = \vec{OC} \times m \vec{v}_1 = 0.75\vec{j} \times (10)(2)\vec{i} = -15\vec{k}$$

$$\vec{H}_{O2} = \vec{OC} \times m \vec{v}_2 = 0.75\vec{j} \times (10)(v_2)(\vec{i} + \vec{j}) = -7.5v_2\vec{k}$$

Sağ el kaidesine göre M moment vektörü -z yönündedir:  $\vec{M} = -(8t^2 + 5)(\vec{k})$

60 N luk tekil kuvvetin toplam momenti :

$$\vec{M}_F = \vec{OC} \times \vec{F} = 0.75\vec{j} \times 60(\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{k}) = -45\left(\frac{3}{5}\vec{k} + \frac{4}{5}\vec{i}\right) \rightarrow \vec{M}_F = -(27\vec{k} + 36\vec{i})$$

z yönündeki açısal impuls-açısal momentum denklemi:

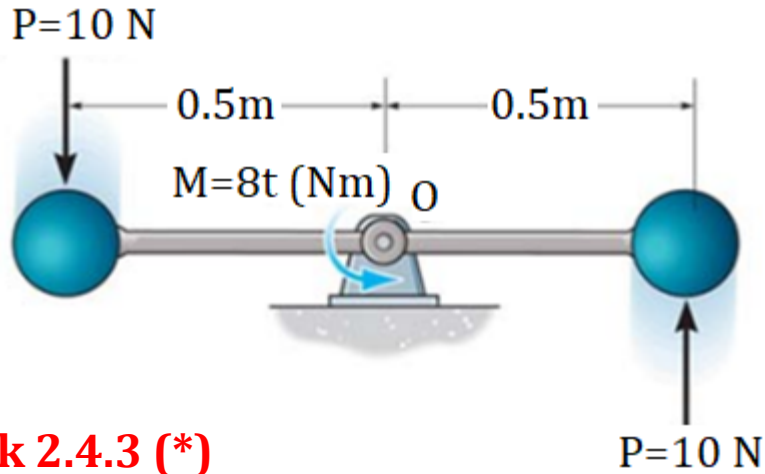
$$\vec{H}_{O1} + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \vec{H}_{O2} \rightarrow -15\vec{k} - \int_0^2 [(8t^2 + 5)\vec{k}] dt - \int_0^2 (27\vec{k}) dt = -7.5v_2\vec{k}$$

$$= -15\vec{k} - \left[\frac{8}{3}t^3 + 5t\right]_0^2 \vec{k} - 27t\Big|_0^2 \vec{k} = -7.5v_2\vec{k}$$

$$= \left\{-15 - \frac{8}{3}2^3 - 5(2) - 27(2)\right\}\vec{k} = -7.5v_2\vec{k}$$

$$= -100.35\vec{k} = -7.5v_2\vec{k} \rightarrow v_2 = 13.38\text{m/s}$$

$\vec{M}_F$  momentinin  $36\vec{i}$  lik bileşeninin ve ağırlıkların O noktasına göre momentleri x veya y yönündedir ve bağlantılar tarafından dengelenir. Dolayısıyla bu yönlerdeki toplam açısal impuls sıfırdır.



### Örnek 2.4.3 (\*)

10kg ağırlıklarında homojen iki küre, 1m uzunluğundaki bir çubuğun iki ucuna bağlanmıştır. Çubuk ise merkezinden bir sabit mafsala bağlıdır. Sistem yatay düzlemde şekilde görülen konumda hareketsiz haldedir. Kürelere zıt yönlerde  $P=10\text{N}$  luk kuvvet çifti r ve çubuğa merkezinden  $M=8t$  (Nm) lik bir tekil moment uygulanıyor. 4 saniye sonra kürelerin hızlarını tespit ediniz. ( **Cevap:**  $v_2 = 10.4\text{m/s}$  )

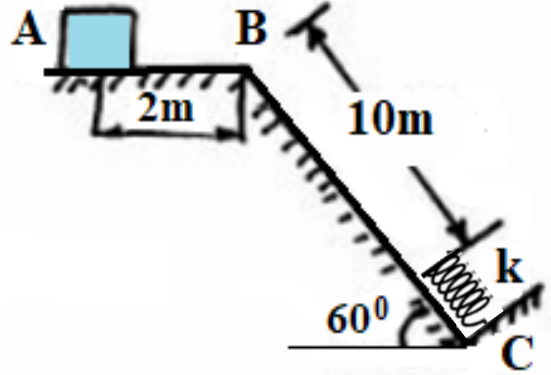
# 2.5

**2.Bölüm (Maddesel Nokta Kinetiği)**

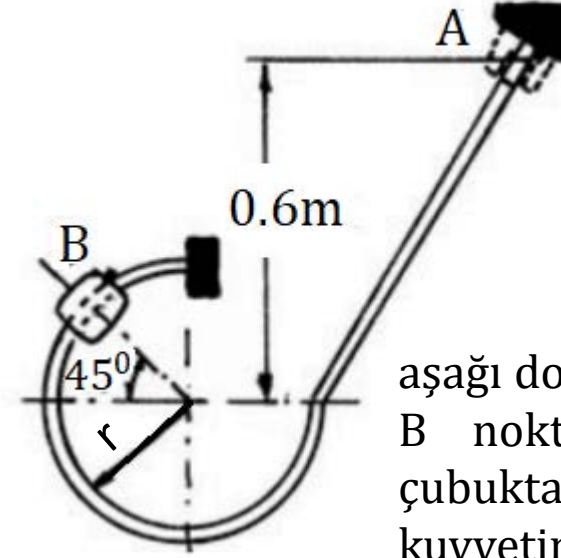
**ile İlgili**

**Cevaplı Sınav Soruları**

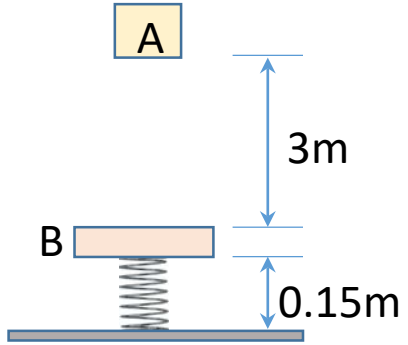




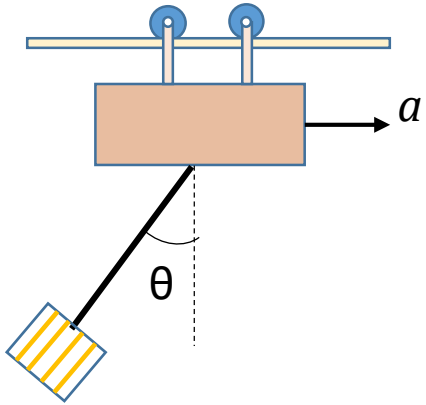
**Soru 2.5.1)** 2 kg kütleli cisim, A noktasından 5 m/sn hız ile geçmektedir. Cisim C' deki yayı sıkıştırıp durmaktadır. Yayın ne kadar sıkışacağını hesaplayınız. Bütün yüzeyler sürtünmeli olup kinetik sürütme katsayısı  $\mu = 0,3$  dür. Yay katsayısı  $k = 60\text{kN/m}$  dir. **(Cevap: 0.148m)**



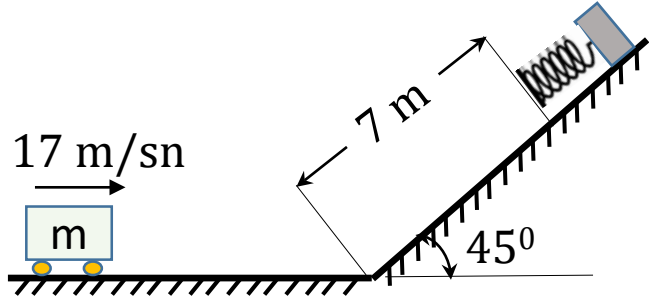
**Soru 2.5.2)** Kütlesi 0.25 kg olan bir bilezik durağan halde bulunduğu A noktasından serbest bırakılarak sabit sürtünmesiz bir çubuktan aşağı doğru kaymaya başlıyor; Bileziğin B noktasından geçerken hızını ve çubuktan bileziğe gelen normal N tepki kuvvetini hesaplayınız. ( $r = 0.15\text{m}$ ) **(Cevap:  $v = 3.11\text{m/s}$  ,  $N = 14.42\text{Newton}$ )**



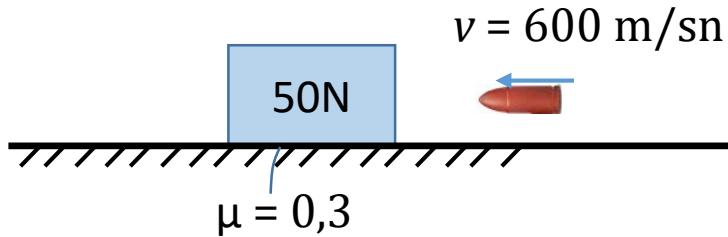
**Soru 2.5.3)** Şekildeki sistemde A kütlesi 3 m yükseklikten, bir yayın üzerinde bulunan B cisminin üzerine düştüğüne göre yayın maksimum ne kadar sıkışacağını ve A'nın geriye ne kadar sıçrayacağını hesaplayınız. Yayın uzamamış boyu 0.2m dir. Çarpışma katsayısı  $e = 0.85$ ,  $m_A = 2.5 \text{ kg}$ ,  $m_B = 10 \text{ kg}$  (**Cevap:** yay 46.2 cm sıkışır, A kütlesi 12,3 cm geriye sıçrar.)



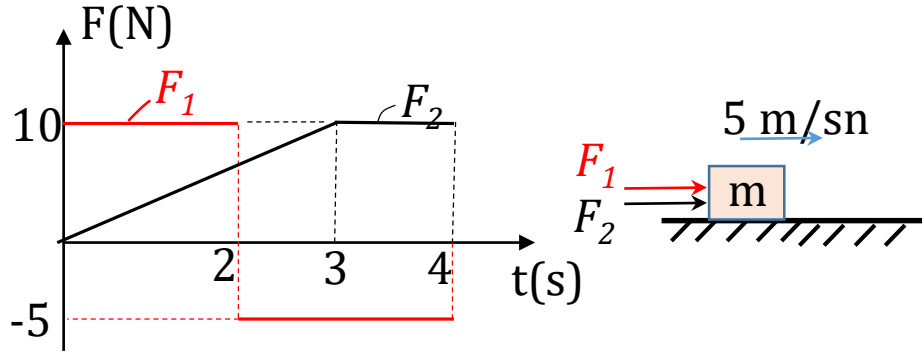
**Soru 2.5.4)** Bir yük şekilde görüldüğü gibi hareketli bir cisme asılmıştır. Cisim sağa doğru  $a = 1 \text{ m/s}^2$  'lik bir ivme ile hareket edecek olursa ağırlığın asıldığı kablonun düşeyle yaptığı  $\theta$  açısı ne olur? Cevap:  $\theta = 5.8^\circ$



**Soru 2.5.5)**  $16 \text{ kg}$  'lık bir araba  $17 \text{ m/s}$  'lık bir hızla sürtünmesiz bir yüzeyde hareket etmektedir. Bu araba daha sonra  $45^\circ$  eğimli bir yüzeye tırmanıyor. Bu yüzeyde  $7 \text{ m}$  ileride katsayısı  $k = 400 \text{ kN/m}$  olan bir yay vardır. Araba yayı ne kadar sıkıştırır? Yay başlangıçta uzamasızdır. (Cevap:  $87.3 \text{ mm}$ )

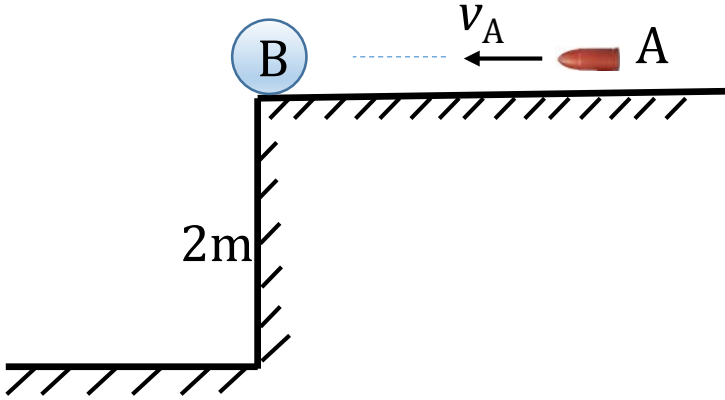


**Soru 2.5.6)**  $0,2 \text{ N}$  ağırlığındaki bir mermi  $v = 600 \text{ m/s}$  hızla  $50 \text{ N}$  ağırlığındaki durmakta olan bir cisme atılıyor ve saplanıyor. Cisim ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu = 0,3$  olduğuna göre cismin alacağı yolu bulunuz. (Cevap:  $0.97 \text{ m}$ )



**Soru 2.5.7)** Kütlesi  $m = 1 \text{ kg}$  olan cisim yatay doğrultuda  $5 \text{ m/sn}$  lik sabit hızla ilerlerken değişken şiddetli ve yatay doğrultuda  $F_1$  ve  $F_2$  kuvvetlerinin etkisine maruz kalıyor. Bu kuvvetlerin zamanla değişim grafiklerinin Şekilde gösterildiği gibi olduğu biliniyor. Buna göre cismin  $t = 3 \text{ sn}$  ve  $t = 4 \text{ sn}$  zamanlarındaki hızlarını bulunuz.

Cevap: ( $v_3 = 35 \text{ m/s}$  ,  $v_4 = 40 \text{ m/s}$  )



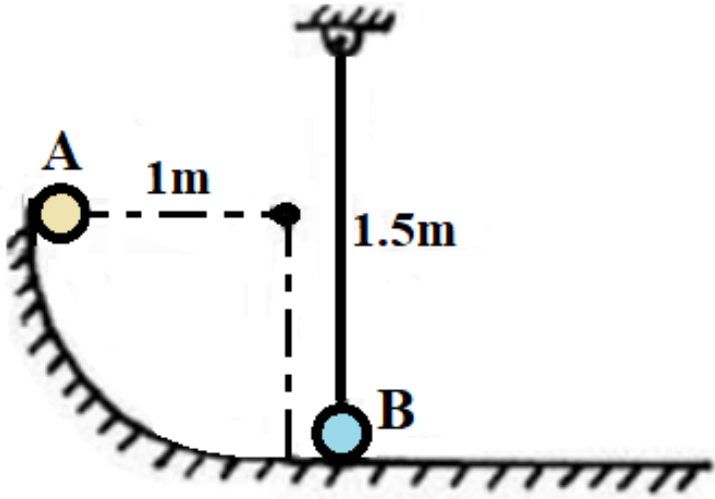
**Soru 2.5.8)** Durağan haldeki 950 gr lık B topuna, 50 gr lık A mermisi

$v_A = 100 \text{ m/s}$  lik hızla atılıyor ve topa saplanıyor.

a-) Çarpışmadan hemen sonraki top ve merminin ortak hızlarını,

b-) Yere düştükleri anda hız bileşenlerini ve yatayda aldıkları yolu

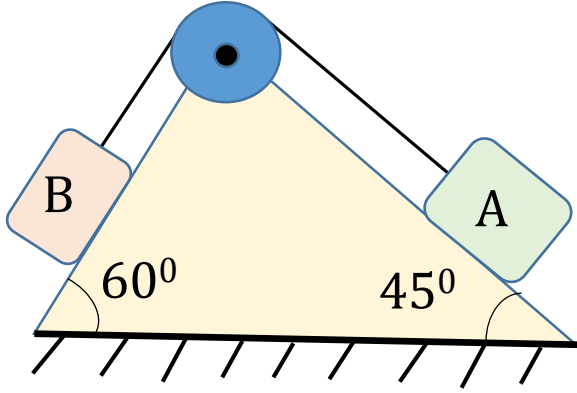
bulunuz. Cevaplar: **a-)**  $5 \text{ m/s}$ , **b-)**  $v_x = 5 \text{ m/s}$  ,  $v_y = -6.28 \text{ m/s}$ ,  $x = 3.2 \text{ m}$



**Soru 2.5.9)** 2kg ağırlığındaki A topu şekildeki konumdan serbest bırakılıyor ve sürtünmesiz yüzeyde yol alarak bir ipe bağlı durmakta olan 3kg ağırlığındaki B topuna çarpıyor. Çarpışma katsayısı  $e = 0,9$  olduğuna göre,

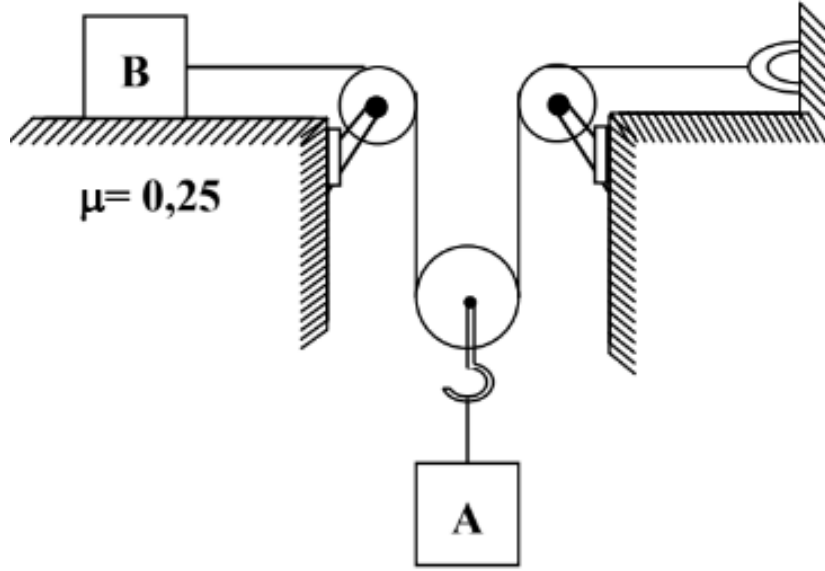
- a-) B topunun çıkacağı maksimum yüksekliği,
- b-) B' yi tutan ipteki maksimum kuvveti bulunuz.

**Cevap:** a-)  $h_{\max} = 0.578\text{m}$  b-)  $T=52.1\text{ N}$



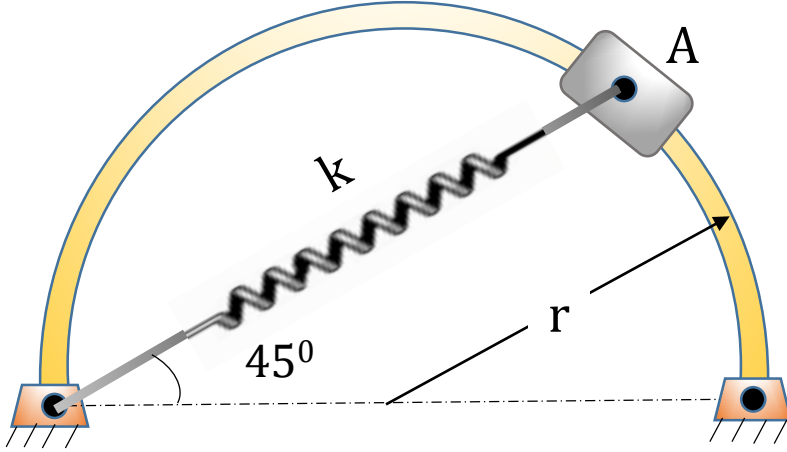
**Soru 2.5.10)** Şekildeki sistem hareketsiz vaziyette tutulurken tutma kuvvetleri kaldırılıyor ve sistem harekete başlıyor.  $m_A = 15 \text{ kg}$  ve  $m_B = 10 \text{ kg}$  olduğuna göre, a-) A cisminin ivmesini ve ipteki germe kuvvetlerini bulunuz. b-) Cisimlerin 2 m yol alana kadar geçen zamanı ve hızlarını hesaplayınız. (Tüm sürtünmeleri ihmal ediniz.)

**Cevap: a-)**  $a = 0.76 \text{ m/s}^2$ ,  $T = 92.56 \text{ N}$ , **b-)**  $v = 1.74 \text{ m/s}$ ,  $t = 2.29 \text{ saniye}$ ,



**Soru 2.5.11)** 50 N' luk A bloğu, verilen bir anda 0,75 m/sn' lik bir hız ile aşağı doğru hareket etmektedir. A bloğunun 1,5 saniye sonraki hızını belirleyiniz. B bloğunun ağırlığı 50 N olup yüzeyle arasındaki kinetik sürtünme katsayısı 0.25 dir. Makaralar ve ipler, ağırlıksız ve sürtünmesizdir. Cevap:  $v_A = 2.22\text{m/s}$

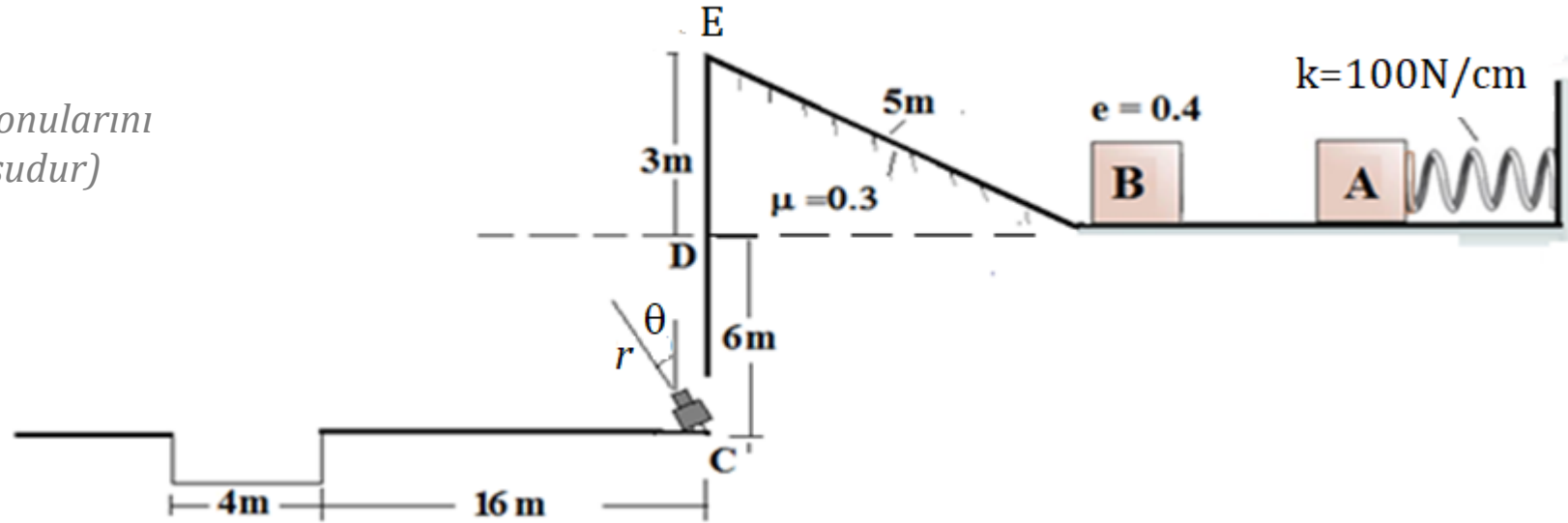




**Soru 2.5.12)**  $r = 1\text{m}$  yarıçapındaki sabit yarı dairesel halka üzerine  $2\text{kg}$  kütleli A bileziği geçirilmiş ve bilezik katsayısı  $k = 50\text{N/m}$  olan bir yaya bağlanmıştır. Bilezik şekildeki konumdan harekete terk ediliyor. Harekete terk edildiği anda bileziğin toplam ivmesi ve bileziğe etki eden normal kuvvetin şiddetini hesaplayınız. **Cevap:**  $a=4.15\text{m/s}^2$  ,  $N=49\text{N}$

**Soru 2.5.13 ) (\*)**

(Bu soru kinematik ve kinetik konularını birlikte kapsayan bir final sorusudur)



Üstteki şekilde, 1 kg kütleli A kutusu, katsayısı 100N/cm olan ve  $\Delta x$  kadar sıkıştırılan bir yayın önüne koyulmuştur. Yay serbest bırakıldığında A kutusu, sürtünmesiz yatay düzlemde yol alarak 1 kg kütleli B kutusuna 0.4 lük bir çarpışma katsayısı ile çarpıyor. Daha sonra B kutusu, 0.3 lük sürtünme katsayısına sahip 5 metrelik eğik düzlemde yol alıyor.  $g = 10\text{m/s}^2$  alınacaktır.

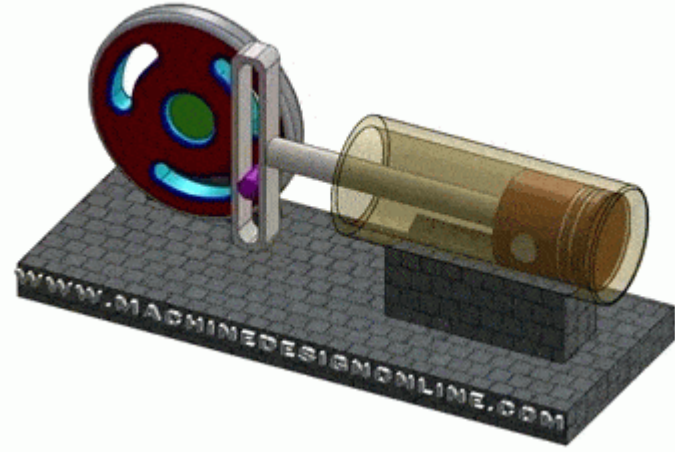
Buna göre;

a-) B kutusunun 4 metrelik kanalı aşarak karşı tarafa (kanalın soluna) düşmesi için yay en az ne kadar sıkıştırılmış olması gerekir? (**Cevap:**  $\Delta x_{\min} = 20\text{cm}$ )

b-) Bu durumda, B kutusunu E den çıktığı andan itibaren izleyen C noktasındaki kameranın açısal hızını ( $\dot{\theta}$ ) ve açısal ivmesini ( $\ddot{\theta}$ ), B kutusu D nin hizasından geçerken hesaplayınız. Kameranın tam C köşesine yerleştirildiğini kabul edip boyutlarını ihmal ediniz. (**Cevap:**  $\dot{\theta} = 0.77\text{rd/s}$  ;  $\ddot{\theta} = 0.102\text{rd/s}^2$ )







DİNAMİK DERS NOTLARI / Prof. Dr. Mehmet Zor

## Rijid Cisim Kinematiği ile ilgili Genel Açıklamalar

**1- Dinamik açıdan Rijid Cisim:** Hareket sırasında bir  $t$  anında, üzerindeki noktaları farklı hız ve ivmelere sahip olan ve bu fark ihmal edilemeyecek seviyede olan cisimlerdir.

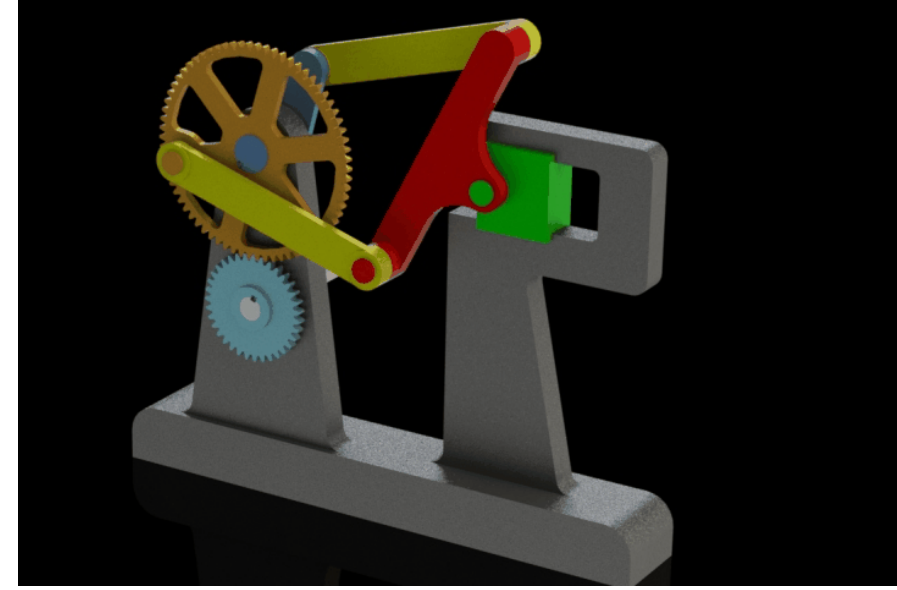
- Bir cismin rijid cisim kapsamında incelenebilmesi için mutlaka incelenen anda bir dönme hareketine sahip olması gerekir. Sadece ötelenme hareketine sahip cisimlerin tüm noktaları bir  $t$  anında aynı hız ve ivmeye sahip olacağından maddesel nokta kapsamında incelenebilir.
- Bیلardo topu gibi boyutları küçük olan yuvarlanan cisimlerin noktaları arasındaki hız ve ivme farkı ihmal edilebilir seviyededir. Bu yüzden bu gibi küçük cisimlerin sanki sadece ağırlık merkezinin ötelendiği düşünülür ve maddesel nokta gibi incelenebilir.



**2- Amacımız:** Bir  $t$  anında rijid cismin (veya rijit cisim sisteminin) üzerinde herhangi bir noktanın hız ve ivmesini hesaplamaktır.

Genel olarak bilinenler ve istenenleri şöyle özetleyebiliriz.:

- **Bilinenler:** Cismin veya sistemin bir noktasının hızı ve ivmesi, cismin o andaki açısal hızı ve açısal ivmesi ve cismin boyutları
- **İstenenler:** Cismin veya sistemin üzerinde diğer bir noktanın hız ve ivmesi bu bilinenlerden elde edilir.

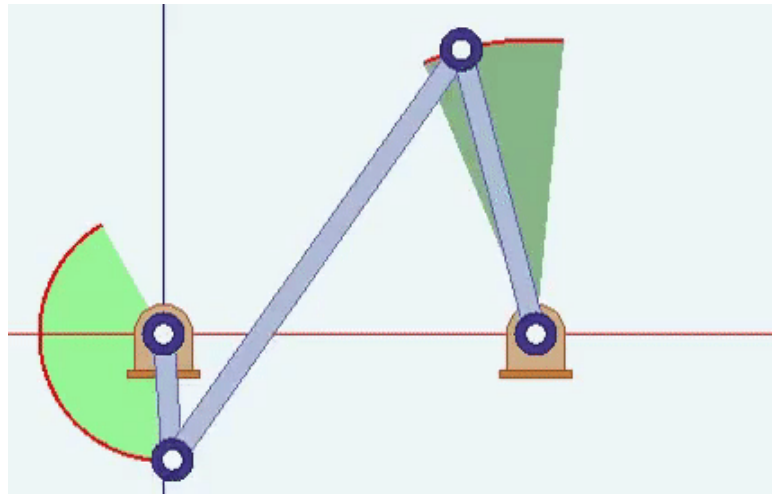


**3- Çözüm Yöntemleri:** Rijit cisim kinematiği çözümleri aşağıdaki iki durumdan uygun olanı ile yapılır:

**1.Durum :Aynı cismin iki noktası** arasındaki hız ve ivme hesaplamaları (Mutlak hareket denklemleri ile yapılır.)

**2. Durum: (Temasta olan) Farklı iki cismin noktaları** arasındaki hız ve ivme hesaplamaları (Bağıl hareket denklemleri ile yapılır.)

Not: Problemin başlangıçta mutlak veya bağıl hareketten hangisine girdiğini görmek ve çözüm şeklini belirlemek önemlidir. Bazı kaynaklar bunun için sabit eksen takımı- hareketli eksen takımı gibi tanımlamalar kullanmaktadır. Ancak bunları anlamak öğrenciler açısından daha zordur. Bu zorluğu aşacak şekilde bu notlara özgün üstteki iki durum ortaya koyulmuştur.



RİJİD CİSİM KİNEMATİĞİ

# 3.1 Düzlemde MUTLAK Hareket



### 3.1.1 Rijit Cismin Düzlemsel Hareket Tipleri:

#### 3.1.1.1) Ötelenme Hareketi:

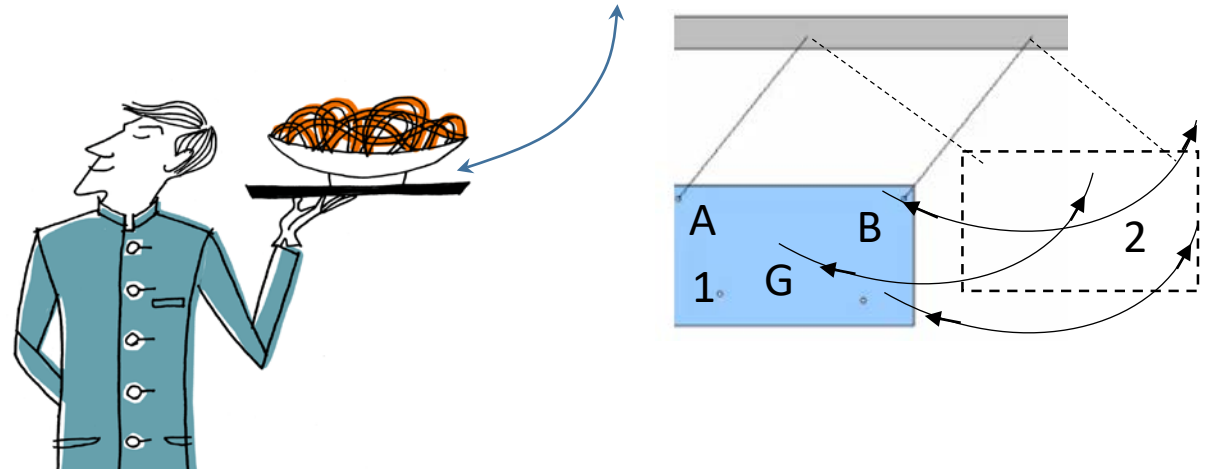
- 1-) Bir  $t$  anında cismin tüm noktalarının hız ve ivmesi aynıdır. *(Dönme hareketinde ise farklıdır.)*
- 2-) Cismin noktalarının yörüngeleri birbirine paraleldir.
- 3-) Cisim daima ilk konumuna paralel kalır. *(Cismin üzerindeki bir çizgi her zaman ilk konumuna paraleldir. Dönme hareketinde paralel kalmaz.)*

#### a-) Doğrusal Ötelenme:



Bir doğru üzerinde hareket eden otomobil.

#### b-) Eğrisel Ötelenme:

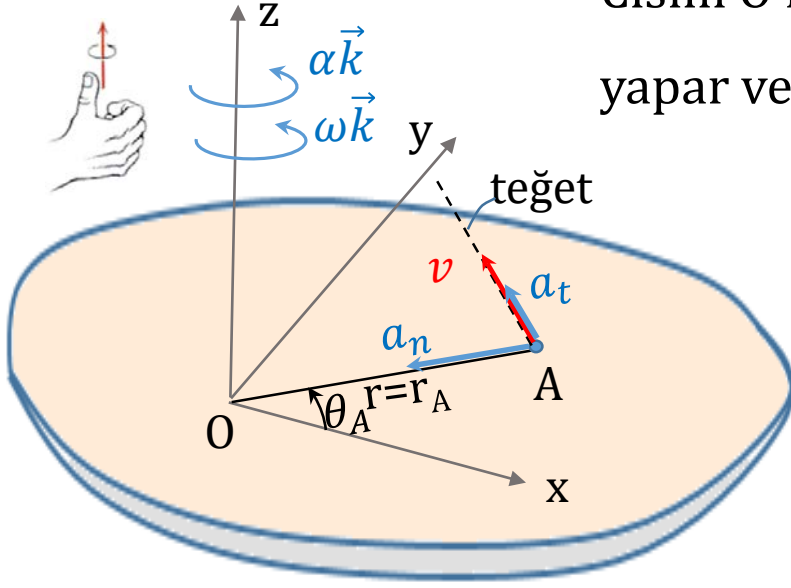


Cisim ilk konumuna paralel kalarak eğrisel yörüngede hareket eder.

Bir  $t$  anında tüm noktalar için hız ve ivmeler eşittir. :  $v_A = v_B = v_G = \dots$ ,  $a_A = a_B = a_G = \dots$

### 3.1.1.2 Sabit bir Eksen Etrafında Dönme:

Cisim O noktasından geçen z gibi bir eksen etrafından dönüyorsa düzlemsel hareket yapar ve bir t anında cismin noktalarının hız ve ivmeleri birbirlerinden farklıdır.



Herhangi bir A noktasının hız ve ivmesini arıyoruz:

Bilinenler:

- Cismin t anındaki açısal hızı ( $\omega$ ) ve açısal ivmesi ( $\alpha$ ) şiddetleri biliniyor.
- $\omega$  ve  $\alpha$  nın doğrultuları dönme eksenini olup, yönleri (+z veya -z) sağ el kaidesiyle bulunur.
- (x-y düzleminde harekette  $\omega$  ve  $\alpha$  mutlaka z doğrultusundadır :  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  ,  $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$  )

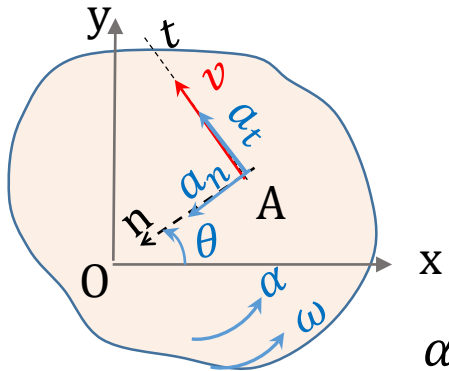
Üstten görünüm

Açısal hız

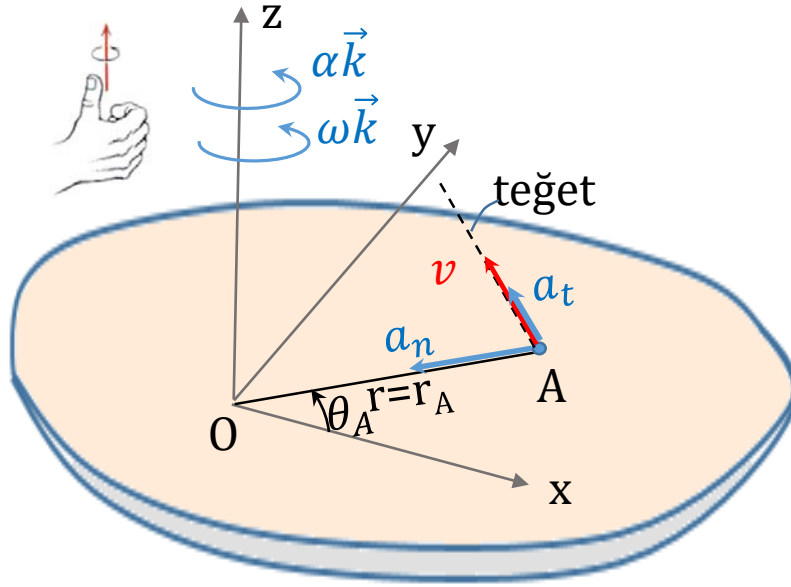
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \text{ (rd/s)}$$

Açısal ivme

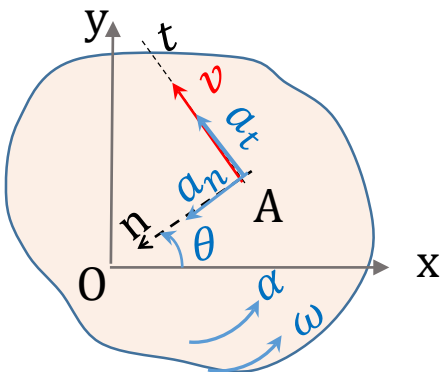
$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \text{ (rd/s}^2\text{)}$$



A noktası O etrafında dairesel hareket yapar. 1.2.3.1 konusundan anlatıldığı üzere:

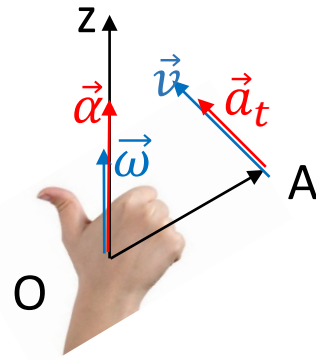


Üstten görünüm



D.1.24 denkleminde Hızın şiddeti:  $v = r\omega = OA \cdot \omega$  (D.3.1a)

Hızın vektörel ifadesi:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$  (D.3.1b)



şeklinde yazılmalıdır. Çünkü vektörel çarpımın sonucu başka bir vektör olup, yönü: çarpılan ilk vektörü ( $\vec{\omega}$  'yı) sağ elimizle ikinci vektöre ( $\overrightarrow{OA}$ 'ya) kapatınca, baş parmağımızın gösterdiği yöndür. (Zira cisim saat ibreleri tersi yönünde dönüyorsa hız şeklindeki yönde olmalıdır.) Bu durum açısal ivme ( $\vec{\alpha}$ ) ve teğetsel ivme ( $\vec{a}_t$ ) için de aynen geçerlidir.

D.1.25 denkleminde teğetsel ivmenin şiddeti:  $a_t = r \cdot \alpha = OA \cdot \alpha$  (D.3.2a)

Vektörel ifadesi:  $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OA}$  (D.3.2b)

D.1.26 denkleminde Normal ivmenin şiddeti:  $a_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 = OA \cdot \omega^2$  (D.3.3a)

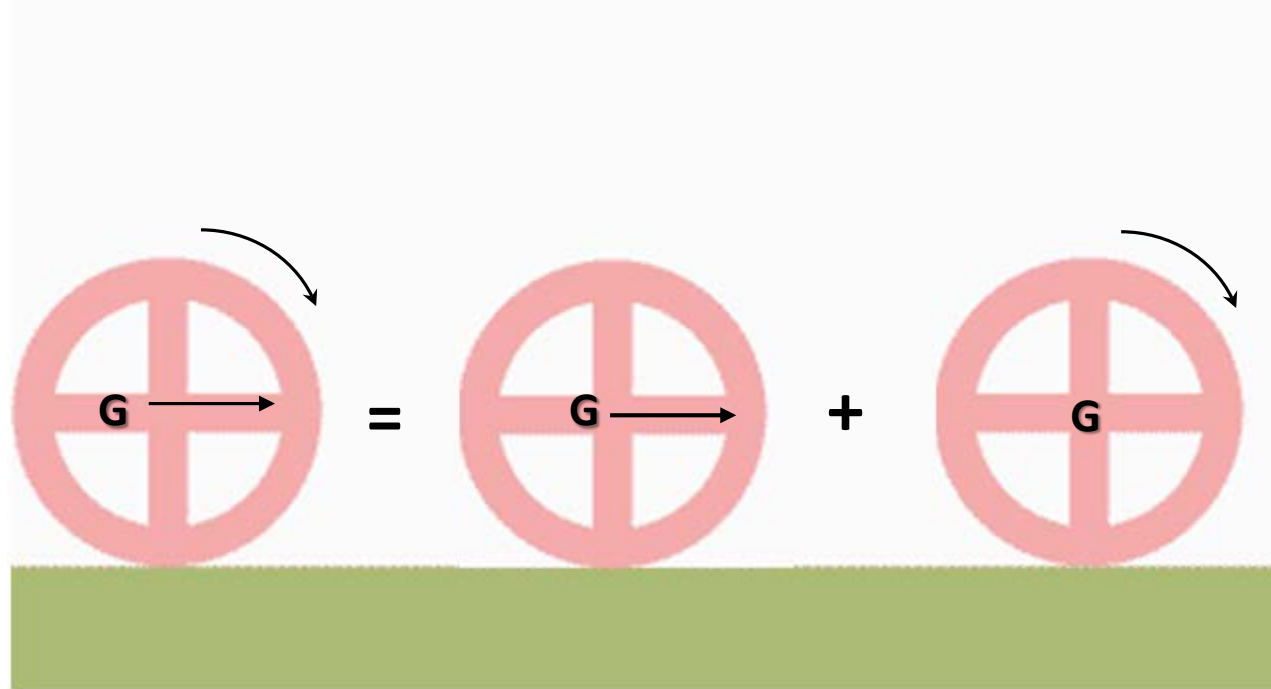
(OA ile aynı doğrultuda fakat zıt yönde olduğundan):

Vektörel ifadesi:  $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{OA}$  (D.3.3b)

### 3.1.1.3 Genel Düzlemsel Hareket: Cisim düzlemde ötelenme ve dönme Hareketini aynı anda yapar.

Bir  $t$  anında hız ve ivmeleri birbirinde farklıdır.

Bir tekerleğin yuvarlanma hareketini genel düzlemsel harekete bir örnektir.»



**Yuvarlanma**  
(Rolling)

=

**Ötelenme**  
(Translation)

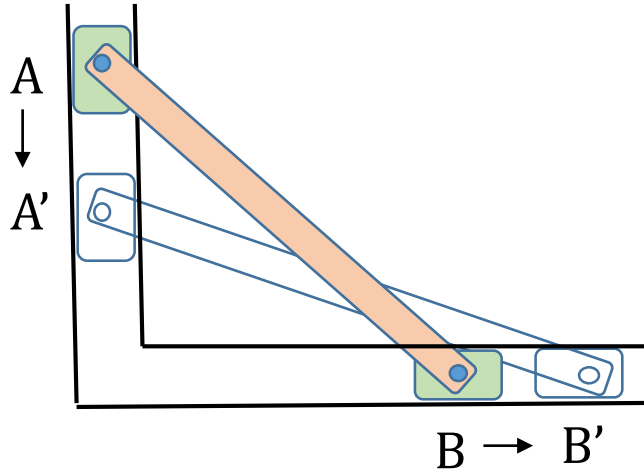
+

**G etrafında Dönme**  
(Rotation)

*Başka örnekler..>>*

Bir kayar çubuk AB konumundan A'B' konumuna geliyor. İlk konumda iken B noktasının hızı ( $\vec{v}_B$ ) ve ivmesi ( $\vec{a}_B$ ) cismin açısal hız ve açısal ivmesi ( $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\alpha}$ ) ve A ve B noktalarının koordinatları biliniyor. A noktasının hızını ve ivmesini arıyoruz.  $\vec{v}_A = ?$ ,  $\vec{a}_A = ?$

### Genel Düzlemsel Hareket

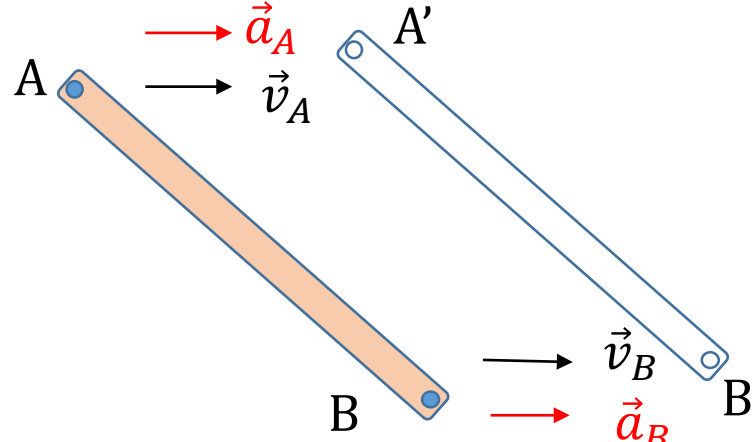


$$\vec{v}_A = ? \quad \vec{a}_A = ?$$

**Toplam Hız:**  $\vec{v}_A =$

**Toplam İvme:**  $\vec{a}_A =$

### Ötelenme



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

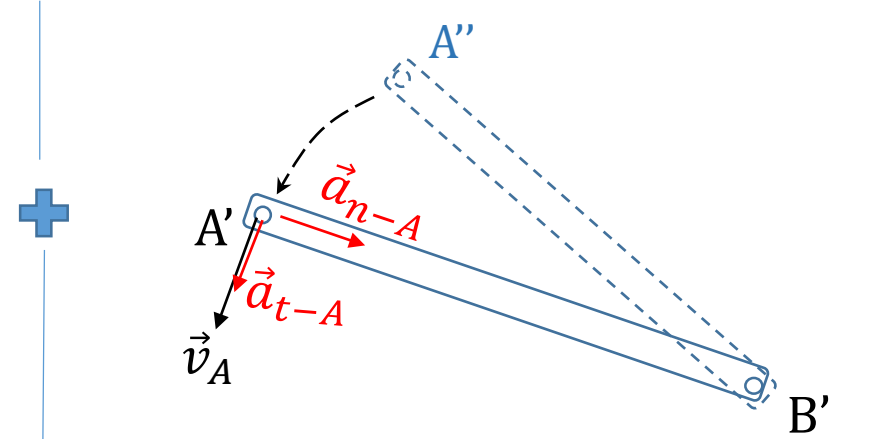
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

$$\vec{v}_B$$

$$\vec{a}_B$$

+

### B noktası etrafında Dönme



$$(D.3.1)..>> \quad \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{BA}$$

$$(D.3.2)..>> \quad \vec{a}_{t-A} = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{BA}$$

$$(D.3.3)..>> \quad \vec{a}_{n-A} = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$+ \quad \vec{\omega} \times \overrightarrow{BA}$$

$$+ \quad \vec{\alpha} \times \overrightarrow{BA} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{BA}$$

### 3.1.2 Özetlersek: Aynı Cisim Üzerindeki Noktalar İçin Hız ve İvme Denklemleri şu şekilde bulunur.

**Bilinenler:** Genel düzlemsel hareket yapan cismin bir t anında,

1-)  $\omega$  ,  $\alpha$  değerleri; 2-) A gibi herhangi bir noktasının hız ve ivme vektörleri ( $\vec{v}_A$  ;  $\vec{a}_A$ ) 3-)  $\overrightarrow{AB}$  konum vektörü biliniyor.

**İstenenler :** Cismin Üzerindeki B gibi bir noktanın hız ve ivme vektörleri ( $\vec{v}_B$  ;  $\vec{a}_B$ ) aşağıdaki denklemlerden hesaplanır.

**Genel Düzlemsel Hareket = Ötelenme + Dönme**

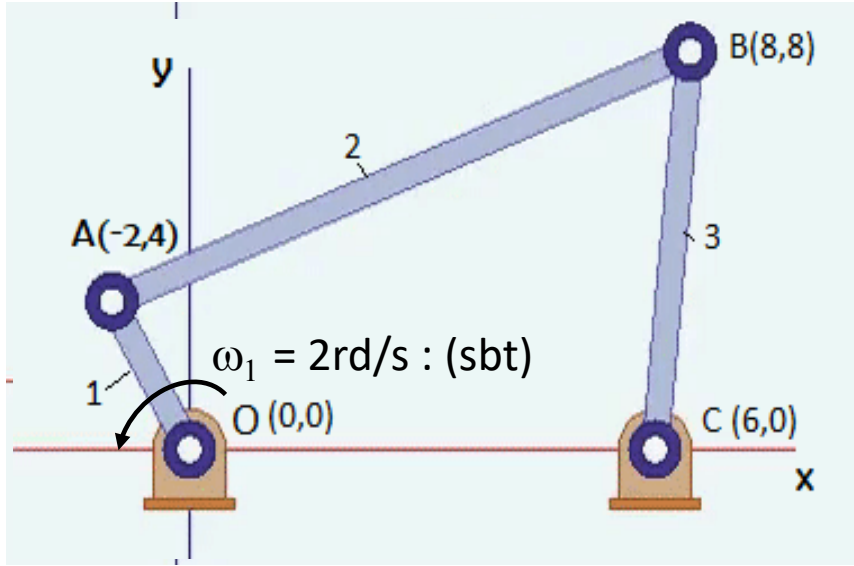
**Mutlak hız**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \quad (D.3.4)$$

**Mutlak ivme**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{AB} \quad (D.3.5)$$

**Püf Noktaları:** 1-) D.3.4 ve D.3.5 denklemleri aynı cisim üzerindeki iki nokta arasında yazılabilir. A ve B farklı cisimler üzerinde ise bu denklemler yazılamaz. 2-) Sol taraftaki indis, sağ taraftaki konum vektöründe sona yazılmalıdır. (Yukarıda D.3.4 ve D.3.5 denklemlerinde solda B indisi var, bu sebeple konum vektörü ( $\overrightarrow{AB}$ ) olarak yazılır. 3-) Çözümler bir t anı için yapılmaktadır.



**Örnek 3.1.1** [video 3.1a](#) **örnek 3.1** Üç kol mekanizmasında 1 numaralı OA kolu  $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$  sabit açısal hızla döndürülmektedir. Solda gösterilen an için, B noktasının ivmesini hesaplayınız.

**Çözüm:** İvmeyi bulmak için önce hızın hesaplanması gerekir. Çünkü ivme denklemlerinde kullanılacak açısal hızlar oradan bulunacaktır. O halde önce B'nin hızını bulacağız.

O ve C sabit noktalar olduğundan hız ve ivmeleri her an sıfırdır:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C = 0 \quad ; \quad \vec{a}_O = \vec{a}_C = 0 ,$$

$$\vec{\omega}_1 = 2\vec{k} \text{ (saat ibreleri tersi yönünde olduğundan pozitiftir) ,}$$

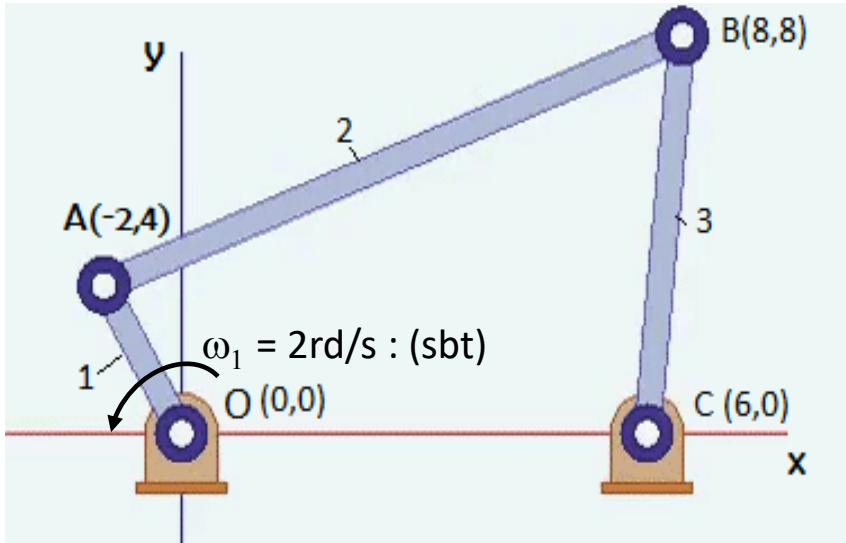
$$\vec{\omega}_1: \text{sabit olduğundan} \quad \rightarrow \quad \vec{\alpha}_1 = 0$$

O ve A, 1 nolu kolun noktaları olduğundan mutlak hız denklemi (D.3.4) bu iki noktaya uygulanabilir:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O^0 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OA} = 2\vec{k} \times (-2\vec{i} + 4\vec{j})$$

$$\rightarrow \vec{v}_A = -4\vec{j} - 8\vec{i}$$





B noktası 2 ve 3 koluna ait ortak noktadır. Mutlak hız denklemi (A ve B) ; (B ve C) noktaları için ayrı ayrı yazılabilir:

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{CB} \\ &= -4\vec{j} - 8\vec{i} + \omega_2 \vec{k} \times [(8 - (-2))\vec{i} + (8 - 4)\vec{j}] = \omega_3 \vec{k} \times [(8 - 6)\vec{i} + (8 - 0)\vec{j}] \\ &= -4\vec{j} - 8\vec{i} + 10\omega_2 \vec{j} - 4\omega_2 \vec{i} = 2\omega_3 \vec{j} - 8\omega_3 \vec{i}\end{aligned}$$

$\vec{i}$  ve  $\vec{j}$  katsayılarını her iki taraftan ayrı ayrı eşitleriz:

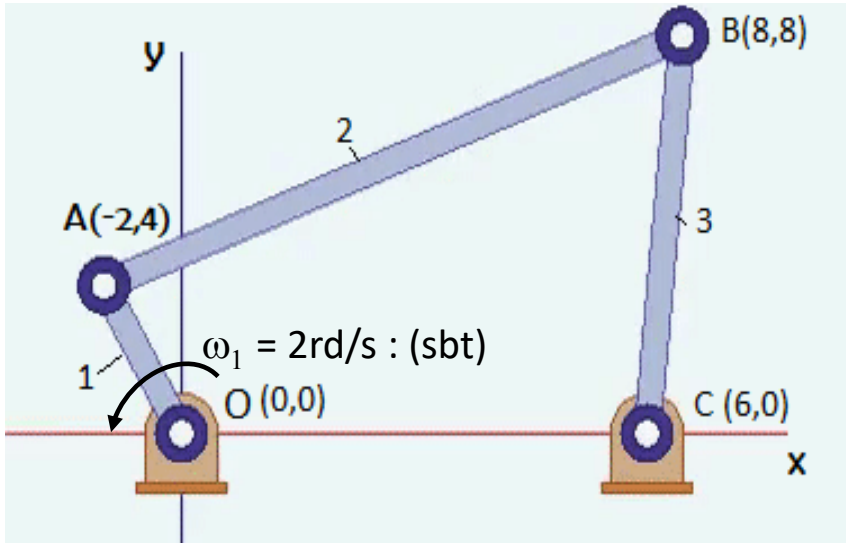
$$\left. \begin{array}{l} \vec{i}: -8 - 4\omega_2 = -8\omega_3 \\ \vec{j}: -4 + 10\omega_2 = 2\omega_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega_2 = 0.66 \text{ rd/s} \\ \omega_3 = 1.33 \text{ rd/s} \end{array}$$

(Düzlemde bir vektörel denklemden 2 bilinmeyen buluruz.)

B'nin hızı:  $\vec{v}_B = \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{CB} = 1.33\vec{k} \times (2\vec{i} + 8\vec{j}) \rightarrow \vec{v}_B \cong -10.64\vec{i} + 2.66\vec{j}$  bulunur.

Soru: A ve C arasında hız veya ivme denklemi neden yazılamaz?





D.3.5 denklemini kullanarak benzer mantıkla B nin ivmesini hesaplarız:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O^0 + \vec{a}_1^0 \times \vec{OA} - \omega_1^2 \cdot \vec{OA} = -2^2(-2\vec{i} + 4\vec{j}) \rightarrow \vec{a}_A = 8\vec{i} - 16\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \times \vec{AB} - \omega_2^2 \cdot \vec{AB} = \vec{a}_C^0 + \vec{\alpha}_3 \times \vec{CB} - \omega_3^2 \cdot \vec{CB}$$

$\omega_2, \omega_3$ : Hız analizinden bulunmuştu:  $\omega_2 = 0.66 \text{ rd/s}$  ,  $\omega_3 = 1.33 \text{ rd/s}$

$$\vec{a}_B = 8\vec{i} - 16\vec{j} + \alpha_2 \vec{k} \times (10\vec{i} + 4\vec{j}) - 0.66^2(10\vec{i} + 4\vec{j}) = \alpha_3 \vec{k} \times (2\vec{i} + 8\vec{j}) - 1.33^2(2\vec{i} + 8\vec{j})$$

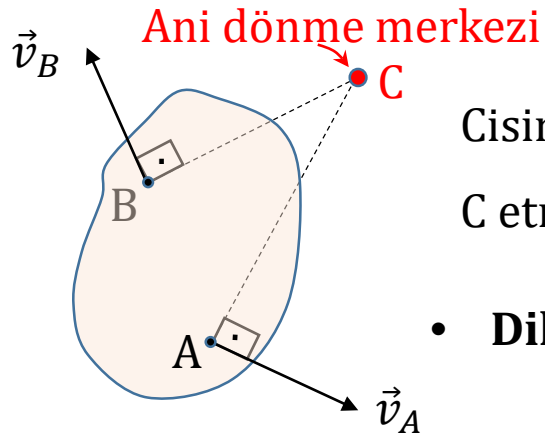
$$(3.64 - 4\alpha_2)\vec{i} + (-17.74 + 10\alpha_2)\vec{j} = (-3.54 - 8\alpha_3)\vec{i} + (-14.15 + 2\alpha_3)\vec{j}$$

$$\left. \begin{array}{l} i: \quad 3.64 - 4\alpha_2 = -3.54 - 8\alpha_3 \\ j: \quad -17.74 + 10\alpha_2 = -14.15 + 2\alpha_3 \end{array} \right\} \alpha_2 = 0.2 \text{ rd/s}^2, \quad \alpha_3 = -0.79 \text{ rd/s}^2$$

$$\rightarrow \vec{a}_B = -0.79 \vec{k} \times (2\vec{i} + 8\vec{j}) - 1.33^2(2\vec{i} + 8\vec{j}) \rightarrow \vec{a}_B = 2.78\vec{i} - 15.73\vec{j}$$

### 3.1.2.1 Ani Dönme Merkezi

- Bir cismin genel düzlemsel hareketini bir t anı için sadece bir nokta(dan geçen dik eksen) etrafında dönme hareketine indirgeyebiliriz.
- (Bknz: konu 3.4.1) Bu anlık dönme noktasına ani dönme merkezi denir.
- **Ani dönme merkezinin bulunuşu:** Cismin üzerindeki herhangi 2 noktanın bir t anındaki hız doğrultularının bu noktalardan çıkılan diklerinin kesişim noktası o an için ani dönme merkezidir.
- Ani dönme merkezi cismin üstünde veya dışında çıkabilir. Hızı sıfırdır. ( $\vec{v}_C = 0$ )



Cisim bu t anında  
C etrafında döner.

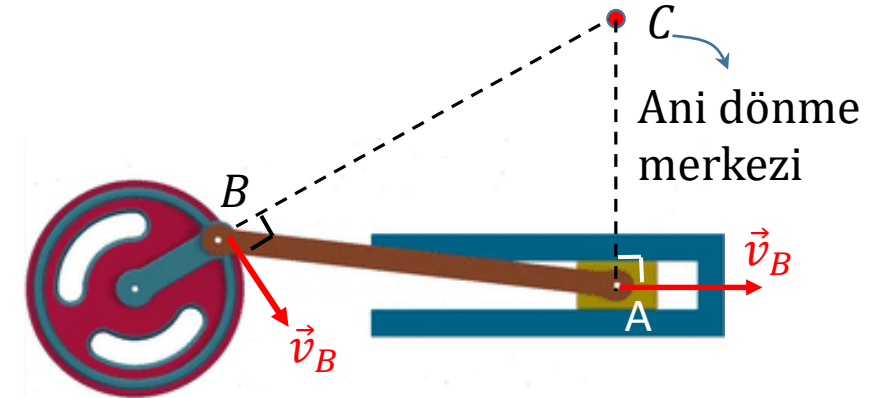
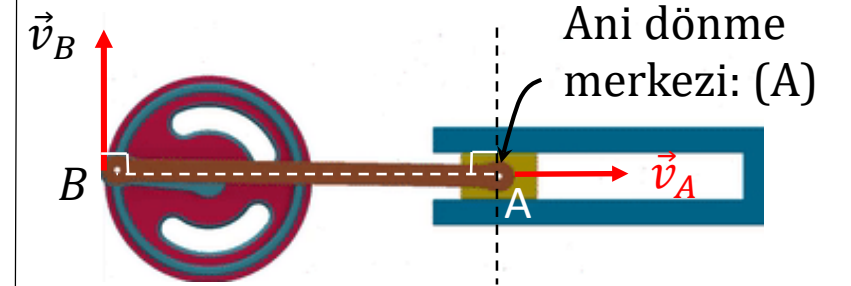
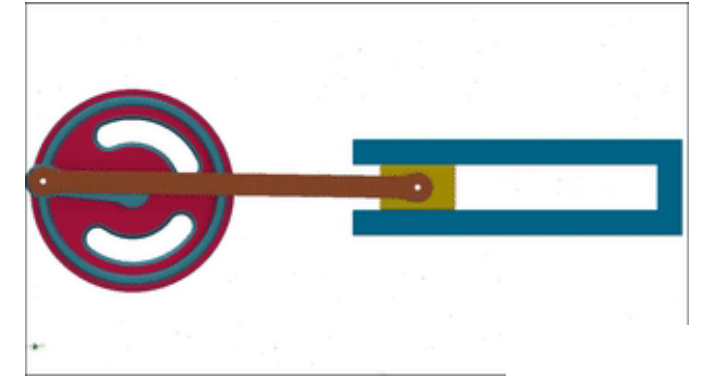
(D.3.1) denkleminde:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{CB}$$

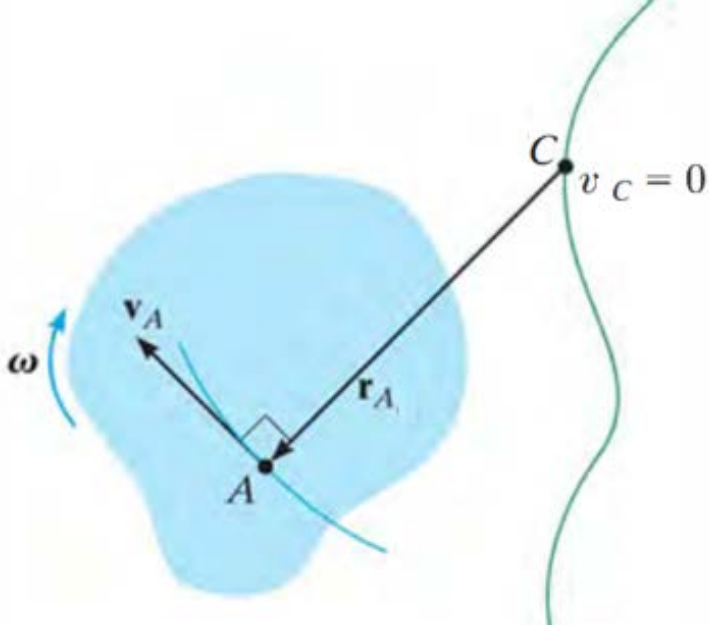
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{CA}$$

- **Dikkat:** Ani dönme merkezi ivmeler için yazılamaz.

- Yandaki mekanizmada farklı anlar için ani dönme merkezlerini inceleyiniz



### 3.1.2.2 Farkı Veriler İçin Ani Dönme Merkezi Tespiti

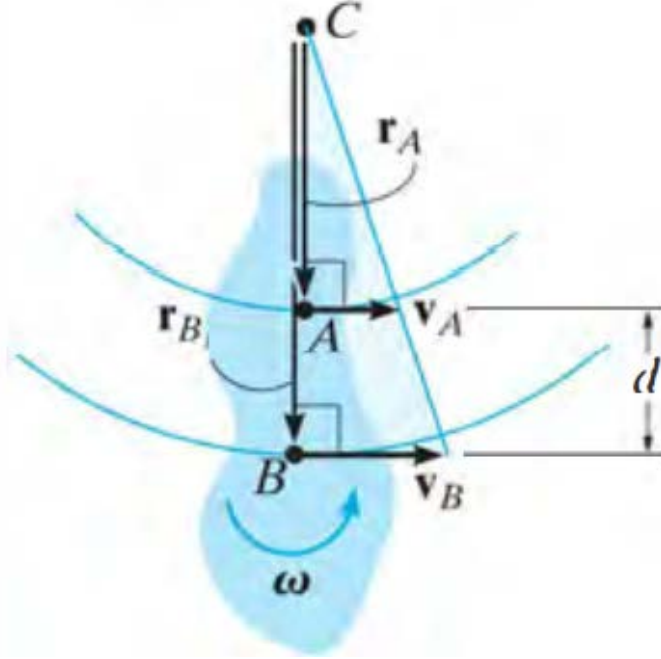


$\vec{v}_A$  ve  $\vec{\omega}$  belli iken

A noktasından  $\vec{v}_A$  vektöründen dik çizilir.

A dan itibaren Dik üzerinde  $r_A = \frac{v_A}{\omega}$  kadar uzaklıktaki nokta C ani dönme merkezidir. C noktasının dikin yukarısında mı aşağısında mı olduğuna  $\vec{v}_A$  ve  $\vec{\omega}$  vektörlerinin yönlerine göre karar verilir.

27.10.2023



A ve B gibi iki noktanın hızları birbirine paralel, hızların şiddeti ve aralarındaki mesafe (d) biliniyorsa, C ani dönme merkezi hızlardan çizilen dik üzerindedir.

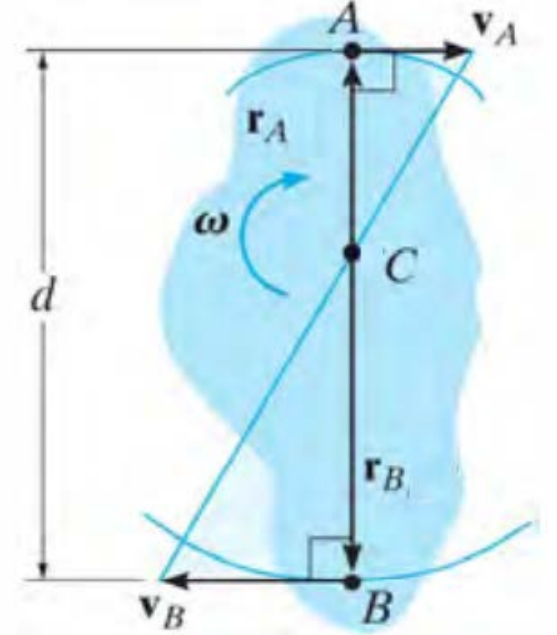
Hızlar aynı yönde ise

$$r_B - r_A = d$$

Hızlar farklı yönde ise

$$r_B + r_A = d$$

Olacak şekilde Ani Dönme Merkezi yeri ( C ) belirlenir.

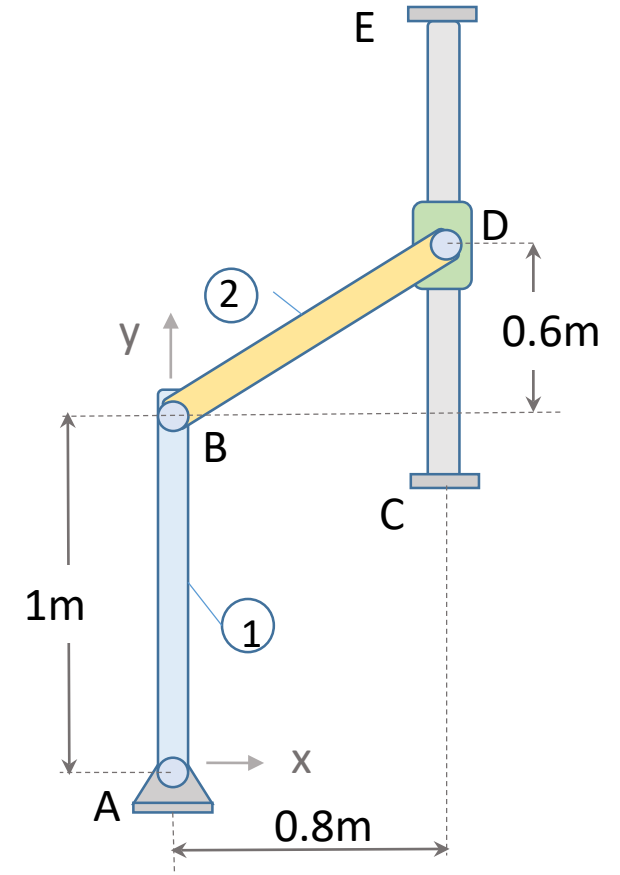


**Örnek 3.1.2** [video 3.1b örnek 3.2](#) Şekildeki mekanizmada D bileziği sabit düşey CE kolu üzerinde serbestçe kayabilmektedir. Çubukları bağlayan pimler dönmeye izin vermektedir. Gösterilen konumda , 1 nolu AB kolunun açısal hızı saat ibreleri tersi yönünde  $\omega_1 = 1.2 \text{rd/s}$ , açısal ivmesi saat ibreleri yönünde  $\alpha_1 = 1.6 \text{rd/s}^2$  lik olarak bilinmektedir. Buna göre;

**a-)** 2 nolu çubuğun ani dönme merkezini bulunuz.

**b-)** 2nolu çubuğun açısal hız ve ivmesini,

**c-)** D bileziğinin hız ve ivmesini hesaplayınız.



**Çözüm..>>**

**Çözüm:**

**a-)** D kayar elemanın hızı y yönünde sınırlandırılmıştır. Yönünü tahmin edemesek bile yönünü keyfi olarak alabiliriz. Yukarı kabul edelim. İşareti + çıkarsa seçtiğimiz yön doğrudur. 1 nolu kol A noktası etrafında dönme hareketi yaptığı için, B noktasının yörüngesi AB yarıçapındaki çemberdir. Hızı teğet yönünde olacağı için, B nin hızı AB'ye diktir.  $\vec{\omega}_1$  gösterilen t anında saat ibreleri tersi yönünde olacağı için B nin hızının yönü sola doğru olacaktır. (Ancak sağa doğru yanlışlıkla yerleştirsek bile işareti negatif çıkacaktır ve seçtiğimiz yönün tersi olduğunu anlayacağız.) 2 nolu kola ait B ve D noktalarının hızlarının bu noktalardan çıkılan diklerinin çakıştığı  $C_2$  noktası bu kolun ani dönme merkezidir.

**b-)** B ortak noktasının hızını 1 ve 2 kollarından yazalım:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_2 \times \vec{DB}$$

$$1.2\vec{k} \times 1\vec{j} = v_D\vec{j} + \omega_2\vec{k} \times (-0.8\vec{i} - 0.6\vec{j})$$

$$-1.2\vec{i} = v_D\vec{j} - 0.8\omega_2\vec{j} + 0.6\omega_2\vec{i}$$

Saat ibreleri yönünde imiş.

$$i: \quad -1.2 = +0.6\omega_2 \rightarrow \omega_2 = -2 \text{ rd/s}$$

$$j: \quad 0 = v_D - 0.8\omega_2 \rightarrow v_D = -1.6 \text{ m/s}$$

Seçtiğimiz yönün tersine (aşağı doğru) imiş.

**c-)**

B ortak noktasının ivmesini 1 ve 2 kollarından yazalım:

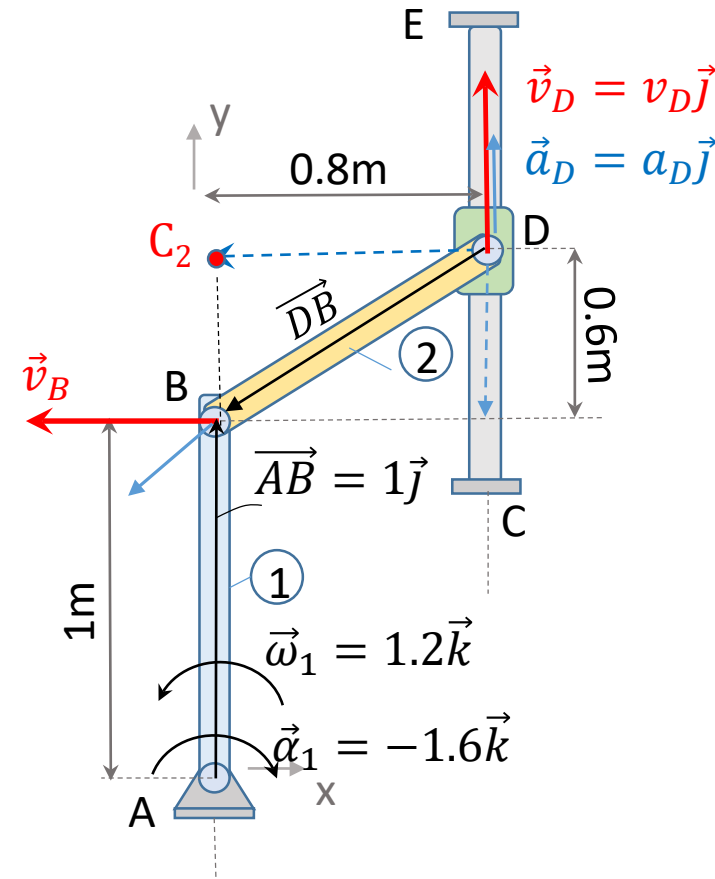
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \times \vec{AB} - \omega_1^2 \cdot \vec{AB} = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_2 \times \vec{DB} - \omega_2^2 \cdot \vec{DB}$$

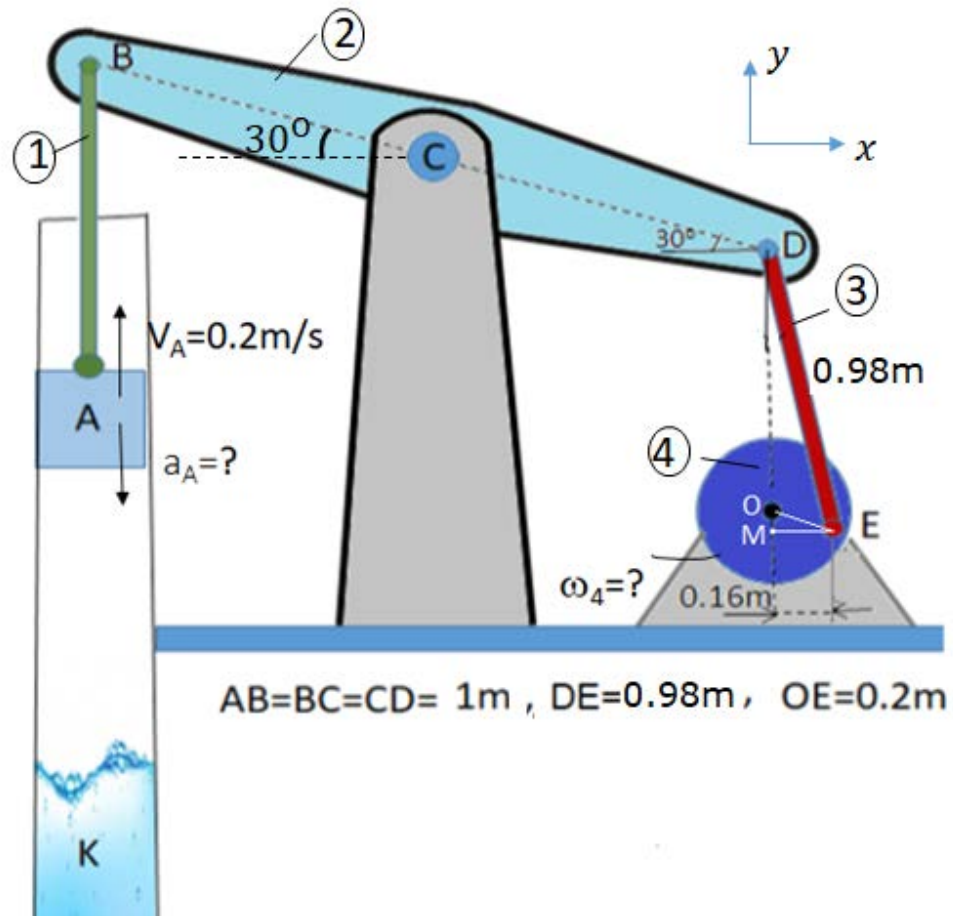
$$-1.6\vec{k} \times 1\vec{j} - (1.2^2)1\vec{j} = a_D\vec{j} + \alpha_2\vec{k} \times (-0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}) - (-2^2) \cdot (-0.8\vec{i} - 0.6\vec{j})$$

$$1.6\vec{i} - 1.44\vec{j} = a_D\vec{j} - 0.8\alpha_2\vec{j} + 0.6\alpha_2\vec{i} + 3.2\vec{i} + 2.4\vec{j}$$

$$i: \quad 1.6 = 0.6\alpha_2 + 3.2 \rightarrow \alpha_2 = -2.67 \text{ rd/s}^2$$

$$j: \quad -1.44 = a_D - 0.8\alpha_2 + 2.4 \rightarrow a_D = -5.97 \text{ m/s}^2$$





**Örnek 3.1.3** [video 3.1b örnek 3.3](#)

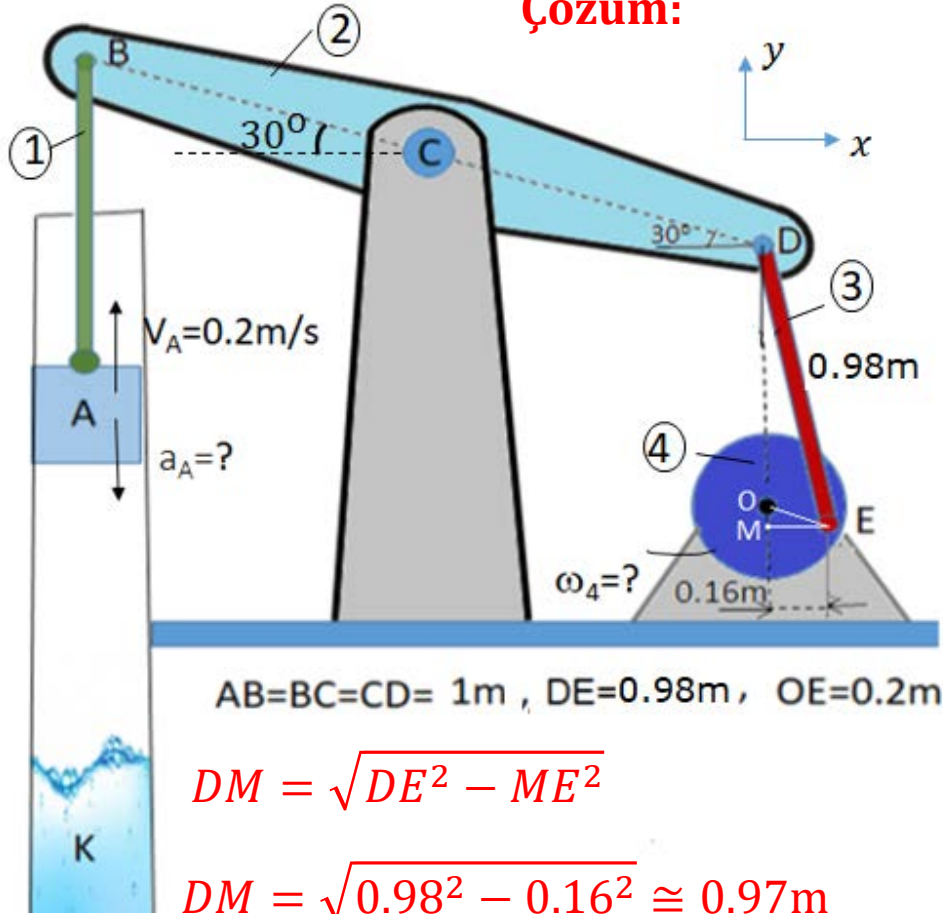
Şekildeki pompa mekanizmasının K seviyesindeki suyu vakumlayarak çekebilmesi için, A pistonunun gösterilen konumda yukarı doğru geçerken hızının 0.2m/s veya daha büyük olması gerektiği tespit edilmiştir. Buna göre,

a-) motora bağlı olan O diskinin en az hangi açısal hızla döndürülmesi gerektiğini,

b-) bu durumda A pistonunun gösterilen konumdaki ivmesini hesaplayınız.

**Çözüm:..>>**



**Çözüm:**

$$OM = \sqrt{OE^2 - ME^2} = \sqrt{0.2^2 - 0.16^2}$$

$$OM = 0.12m$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{OM} = 0.16\vec{i} - 0.12\vec{j}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{DM} = 0.16\vec{i} - 0.97\vec{j}$$

A pistonu ile 1 çubuğu birlikte hareket eder. Tek cisim gibi düşünülebilir. B ortak noktasının hızını 1 ve 2 cisimlerinden yazalım.

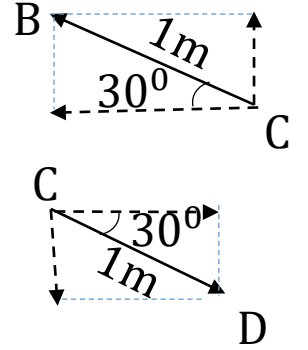
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_1 \vec{k} \times \overrightarrow{AB} = \vec{v}_C + \omega_2 \vec{k} \times \overrightarrow{CB} \quad (\text{C sabit noktadır})$$

$$0.2\vec{j} + \omega_1 \vec{k} \times 1\vec{j} = \omega_2 \vec{k} \times 1(-\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j})$$

$$0.2\vec{j} - \omega_1 \vec{i} = -0.866\omega_2 \vec{j} - 0.5\omega_2 \vec{i}$$

$$i: -\omega_1 = -0.5\omega_2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \omega_2 = -0.23 \text{ rd/s}$$

$$j: 0.2 = -0.866\omega_2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \omega_1 = -0.115 \text{ rd/s}$$



$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \omega_2 \vec{k} \times \overrightarrow{CD} = -0.23\vec{k} \times 1(\cos 30^\circ \vec{i} - \sin 30^\circ \vec{j}) \rightarrow \vec{v}_D = -0.2\vec{j} - 0.115\vec{i}$$

E noktasının hızını 3 ve 4 cisimlerinden yazalım:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \omega_3 \vec{k} \times \overrightarrow{DE} = \vec{v}_O + \omega_4 \vec{k} \times \overrightarrow{OE} \quad (\text{O sabit noktadır})$$

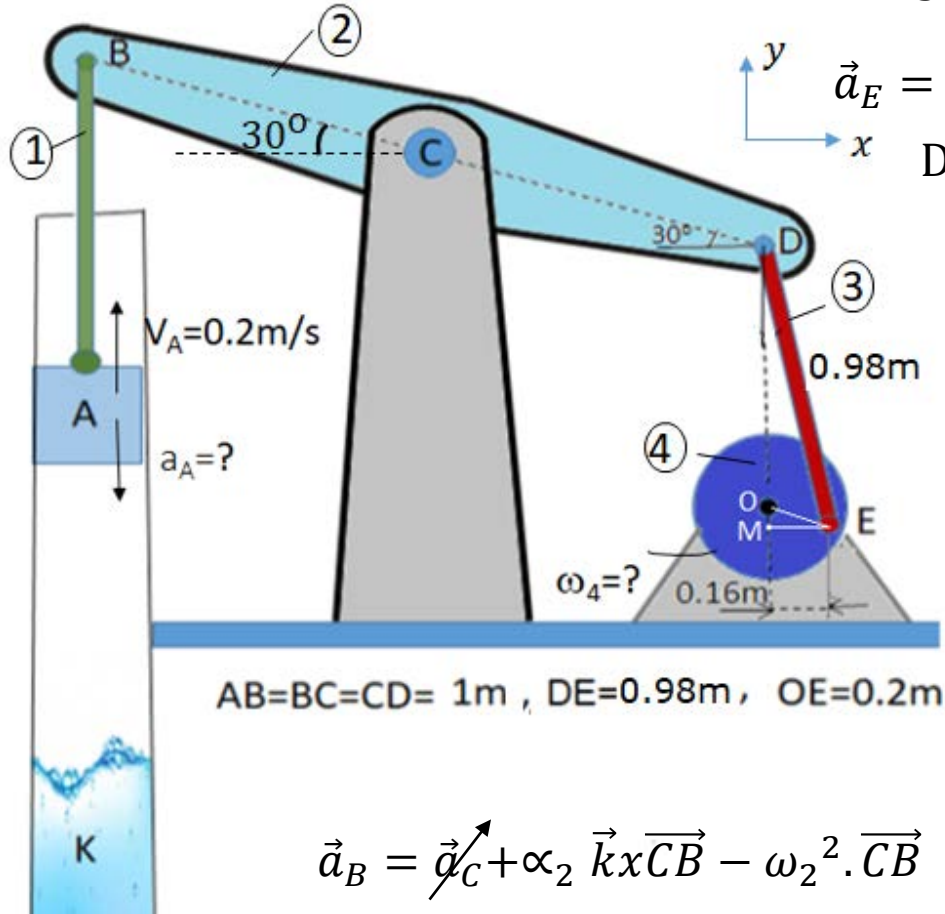
$$-0.2\vec{j} - 0.115\vec{i} + \omega_3 \vec{k} \times (0.16\vec{i} - 0.97\vec{j}) = \omega_4 \vec{k} \times (0.16\vec{i} - 0.12\vec{j})$$

$$(-0.115 + 0.97\omega_3)\vec{i} + (-0.2 + 0.16\omega_3)\vec{j} = 0.12\omega_4\vec{i} + 0.16\omega_4\vec{j}$$

$$i: -0.115 + 0.97\omega_3 = 0.12\omega_4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \omega_3 = -0.04 \text{ rd/s}$$

$$j: -0.2 + 0.16\omega_3 = 0.16\omega_4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \omega_4 = -1.29 \text{ rd/s}$$

$$\vec{v}_E = -1.29\vec{k} \times (0.16\vec{i} - 0.12\vec{j}) \rightarrow \vec{v}_E = -0.15\vec{i} - 0.206\vec{j}$$



**b-)** A pistonunun ivmesini hesaplayacağız. Önce E noktasının ivmesini bulalım

Disk motora bağlı olduğundan açısal hızı ( $\omega_4$ ) sabittir. Açısal ivmesi  $\alpha_4 = 0$  olur.

$$\vec{a}_E = \vec{a}_O + \alpha_4 \vec{k} \times \vec{OE} - \omega_4^2 \vec{OE} = -(-1.29)^2 (0.16\vec{i} - 0.12\vec{j}) \rightarrow \vec{a}_E = -0.26\vec{i} + 0.2\vec{j}$$

D noktasının ivmesini 2 ve 3 cisimlerinden yazalım:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \alpha_2 \vec{k} \times \vec{CD} - \omega_2^2 \vec{CD} = \vec{a}_E + \alpha_3 \vec{k} \times \vec{ED} - \omega_3^2 \vec{ED}$$

$$\alpha_2 \vec{k} \times 1(\cos 30^\circ \vec{i} - \sin 30^\circ \vec{j}) - 0.23^2 \times 1(\cos 30^\circ \vec{i} - \sin 30^\circ \vec{j})$$

$$= -0.26\vec{i} + 0.2\vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \times (-0.16\vec{i} + 0.97\vec{j}) - (-0.04)^2 (-0.16\vec{i} + 0.97\vec{j})$$

$$= (0.5 \alpha_2 + 0.214)\vec{i} + (0.866 \alpha_2 - 0.172)\vec{j} = -0.97 \alpha_3 \vec{i} - 0.16 \alpha_3 \vec{j}$$

$$i: 0.5 \alpha_2 + 0.214 = -0.97 \alpha_3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \alpha_2 \cong 0.264 \text{ rd/s}^2$$

$$j: 0.866 \alpha_2 - 0.172 = -0.16 \alpha_3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \alpha_3 \cong -0.356 \text{ rd/s}^2$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \alpha_2 \vec{k} \times \vec{CB} - \omega_2^2 \vec{CB} = 0.264 \vec{k} \times 1(-\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j}) - 0.23^2 \times 1(-\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j})$$

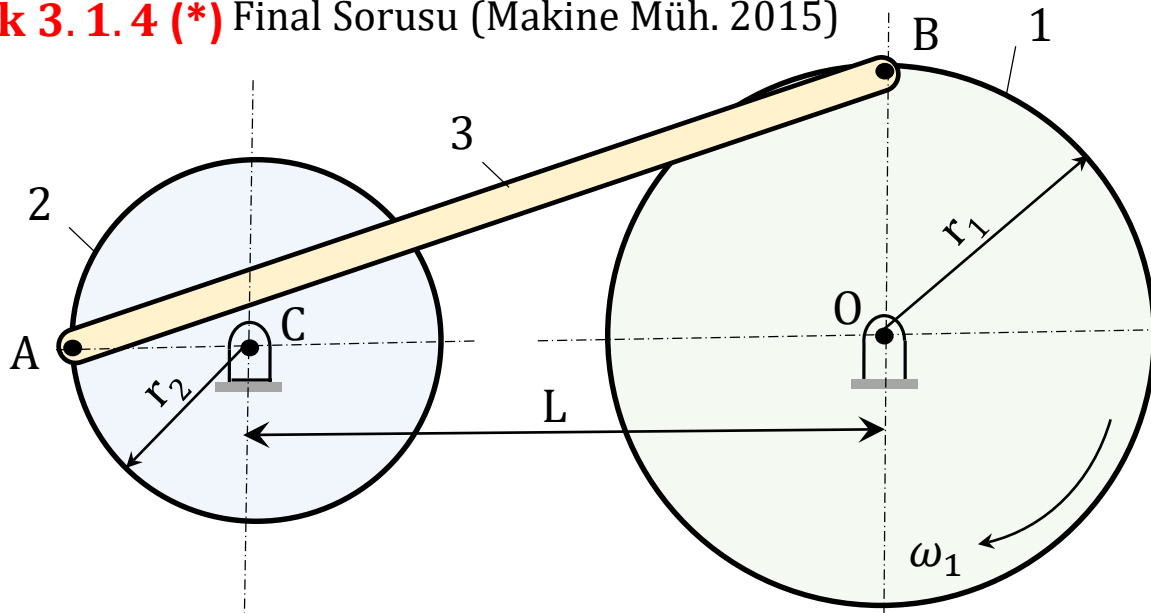
$$\rightarrow \vec{a}_B = -0.086\vec{i} - 0.255\vec{j} \text{ bulunur. } \vec{a}_A = a_A \vec{j} = \vec{a}_B + \alpha_1 \vec{k} \times \vec{AB} - \omega_1^2 \vec{AB} = -0.086\vec{i} - 0.255\vec{j} + \alpha_1 \vec{k} \times 1\vec{j} - 0.115^2 \times 1\vec{j}$$

$$\rightarrow a_A \vec{j} = -0.086\vec{i} - 0.255\vec{j} - \alpha_1 \vec{i} - 0.013\vec{j} \quad \left. \begin{array}{l} i: 0 = -0.086 - \alpha_1 \\ j: a_A = -0.255 - 0.013 \end{array} \right\} \alpha_1 = -0.086 \text{ rd/s}^2$$

$$a_A = -0.268 \text{ m/s}^2$$

( $a_A$  yukarı yönde yani pozitif seçilmiştir. İşareti - çıktığı için seçilen yönün tersine imiş.)



**Örnek 3. 1. 4 (\*)** Final Sorusu (Makine Müh. 2015)

Şekildeki mekanizmada O merkezli Disk, saat ibreleri yönünde, sabit  $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$  açısal hız ile dönmektedir.

$r_2 = 1 \text{ m}$ ,  $L = 4 \text{ m}$ ,  $r_1 = 2 \text{ m}$  alınabilir. A ve B, disklerin çevre noktaları kabul edilebilir. Buna göre;

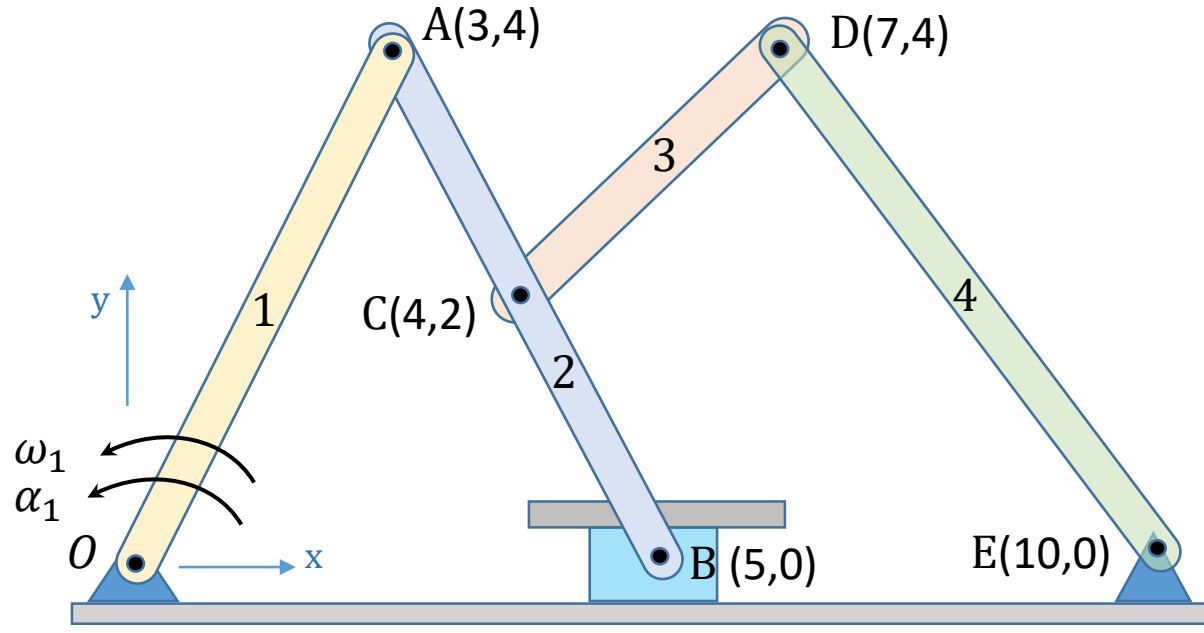
**a-10P)** AB çubuğunun ani dönme merkezinin yerini gösteriniz.

**b-20P)** 2 nolu C diskinin ve 3 nolu AB çubuğunun bu konumdaki açısal hız ve açısal ivmelerini hesaplayınız.

**Cevaplar:**

$$\omega_3 = -2 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = -10 \text{ rad/s}, \quad \alpha_3 = 22 \text{ rad/s}^2, \quad \alpha_2 = 110 \text{ rad/s}^2$$





### Örnek 3.1.5 (\*)

Şekildeki 4 kol mekanizmasında gösterilen konumda, 1 nolu OA kolunun açısal hızı ve açısal ivmesi saat ibreleri tersi yönünde olup değerleri sırasıyla  $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$  ve  $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$  dir. Kollar birbirlerine dönmeye izin veren ötelenmeye izin vermeyen pimlerle bağlıdır. B noktasında ise x doğrultusunda hareketi sınırlandırılmış bir kayar eleman vardır. Noktaların koordinatları parantez içerisinde verilmiştir. Boyutlar desimetredir. Buna göre bu an için;

a-) B kayar elemanının hız ve ivmesini,

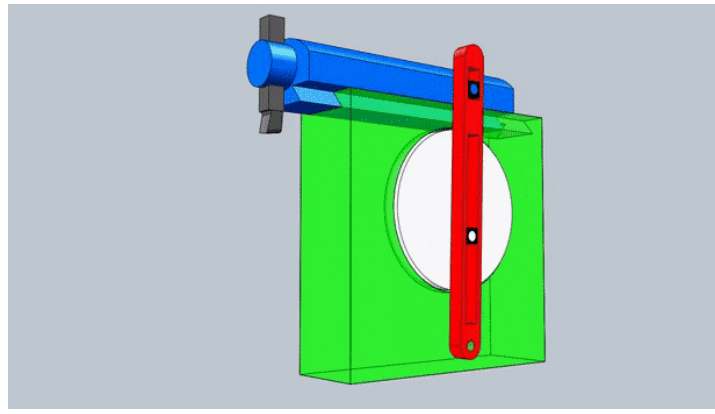
b-) 3 ve 4 nolu kolların açısal hızlarını hesaplayınız.

**Cevaplar:** a-)  $v_B = -40 \text{ dm/s}$ ,  $a_B = -300 \text{ dm/s}^2$

b-)  $\omega_3 = -6 \text{ rd/s}$ ,  $\omega_4 = 4 \text{ rd/s}$

## Düzlemde Mutlak Hareketle İlgili Püf Noktaları (Özet)

1. Rijit cisim için hız ve ivme hesapları bir  $t$  anı için yapılır.
2. Mutlak hız ( $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$ ) ve Mutlak ivme ( $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} - \omega^2 \cdot \vec{AB}$ ) denklemleri düzlemsel harekette ve **aynı cismin** iki noktası arasında geçerlidir.
3. Mutlak Hız denklemi aynı zamanda ani dönme merkezi için de geçerlidir. (Mutlak ivme denklemi ani dönme merkezi için geçerli değildir.)
4. Mutlak hız ve ivme denkleminde eşitliğin solundaki indis (**B**), sağdaki konum vektöründe ( $\vec{AB}$  de) sonda yazılmalıdır.
5.  $\vec{\omega}$  ve  $\vec{\alpha}$  vektörleri mutlaka cismin dönme düzlemine diktir, yönü ise sağ el kaidesi ile bulunur. (bu kural 3 boyutlu harekette de geçerlidir.)
6. Düzlemsel harekette  $\vec{\omega}$  ve  $\vec{\alpha}$  nın pozitif yönü x-den y-ye dönüş yönüdür. (x- sağa, y-yukarı alınırsa  $\vec{\omega}$  ve  $\vec{\alpha}$  nın pozitif yönü saat ibreleri tersi yönüdür.)
7.  $\vec{\omega}$  ve  $\vec{\alpha}$  cisme aittir. Noktaya göre değişmez.
8. Genelde, ivme hesaplarından önce hız hesapları yapmak ve bilinmeyen sayısını azaltmak gerekir.
9. Çözüm için ortak noktaların her iki taraftan hız ve ivmeleri yazılabilir.
10. Hareketi sınırlandırılmış noktaların hız ve ivmelerinin doğrultuları bellidir. Bu durumda hız ve ivmenin şiddetleri tek bilinmeyen olarak denklemlere girer.
11. Düzlemde 1 vektörel denklemden 2 skaler bilinmeyen bulunabilir.
12. Doğrultusu belli olmasına rağmen, şiddeti henüz hesaplanmamış bir büyüklüğün ( $v, a, \alpha, \omega$ ) yönü ilk olarak keyfi seçilir. Çözüm yapıldığında işareti negatif çıkarsa seçilen yönün tersinedir denir. Daha sonra yönü ve işareti değiştirilmeden denklemlerde kullanılabilir.

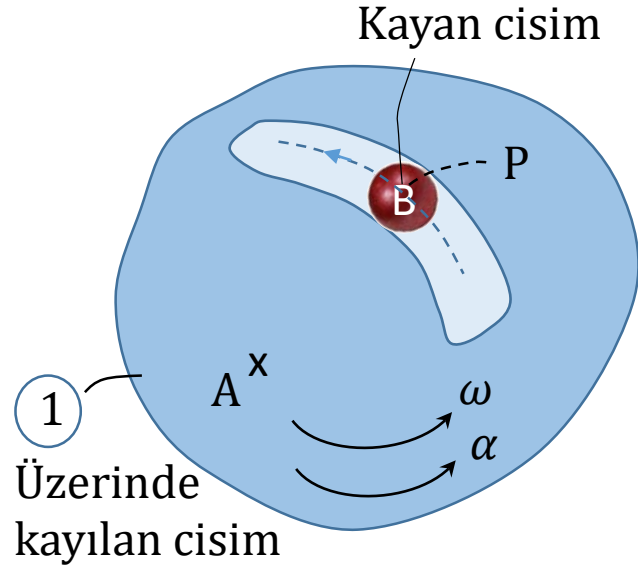


## RİJİD CİSİM KİNEMATİĞİ (Mekanizma Kinematığı)

# 3.2 Düzlemde BAĞIL Hareket

### 3.2.1 Genel Kavramlar ve Bağlı Hareket Denklemleri

Bu bölümde amacımız **aynı cisim üzerinde olmayan** iki noktanın birbirlerine göre hız ve ivme denklemlerini yazmaktır. Dikkat: A ve B farklı cisimler üzerinde iki noktadır ancak bu cisimler birbirleriyle temastadır. Şimdi alttaki şekli inceliyoruz:



1 nolu bir diskin üzerinde açılmış bir kanalda serbestçe kayabilen bir B bilyesi düşünelim.

**A** : 1 nolu «üzerinde kayılan cismin (diskin)» bir noktası

**B** : kanal içinde «kayan cisme» (bilyeye) ait nokta

(Bilye 2 hareket birden yapar. 1 nolu cisimle birlikte dönerken kanal içinde de kayar.)

**P** : B ile aynı koordinatlara sahip 1 nolu cismin bir noktası (kanalın tabanında bir nokta)  
(Sadece 1 nolu cismin hareketini yapar)

Bir t anında  $\vec{v}_A, \vec{a}_A, \omega, \alpha, \overrightarrow{AB}$  nin konumları biliniyor. **Arananlar:**  $\vec{v}_B = ?$  ,  $\vec{a}_B = ?$

**P** ve **B** ile aynı koordinatlara sahip olduğundan:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$

A ve P aynı cismin 2 noktası olduğundan

aralarında D.3.4 ve D.3.5 denklemleri geçerlidir :  $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$  ,  $\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{AB}$

B noktası sabit olsaydı P ile aynı hız ve ivmeye sahip olurdu. Ancak kanal içerisinde kaydığından P'ye göre bir ilave hızı ve ivmesi vardır ki bunlara bağlı hız ve bağlı ivme denir.

$\vec{a}_{cor}$ : Coriolis ivmesidir. Dönen bir cisim üzerinde kayan bir nokta varsa ilaveten ortaya çıkan bağımsız bir ivmedir. (bağlı ivmeden farklıdır.)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{B/P} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{bağ} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{bağ} \quad (D.3.6)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{a}_{B/P} + \vec{a}_{cor} \rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor} \quad (D.3.7)$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{bağ} \quad (D.3.8)$$

Üzerinde kayılan cismin (kanallı cismin) açısal hızıdır.

Coriolis ivmesi ve etkisi bir sonraki sayfalarda detaylıca açıklanmıştır...>>

Hareketli resmi görmek için [tıklayın](#)



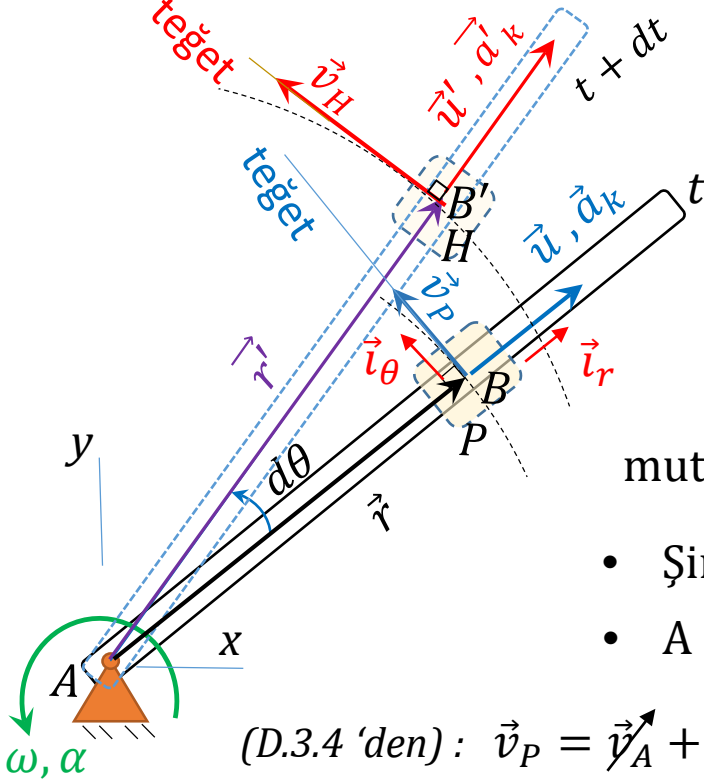
### 3.2.c Coriolis İvmesi Nedir ve Ne Zaman Ortaya Çıkar?

- **Dönen bir cismin** üzerinde kayan (yer değiştiren) bir nokta varsa; bu kayan noktada bağımsız bir ivme oluşur ki, bu ivmeye coriolis ivmesi ( $a_{cor}$ ) denir.
- Dönen cisimden kasıt, incelenen anda bir  $\omega$  açısal hızına sahip olan cisimdir ki, bu durumda cisim anlık dönme yapıyor demektir. Bu cismin sürekli dönme hareketi yapıyor olması illa ki gerekmez.
- Kayan nokta bilye gibi bir maddesel nokta olabildiği gibi, başka bir cisme bağlı olan bir pim de olabilir.

- Coriolis ivmesi kayan cismin bağıl hızının yönünü değiştiren etkiye sahiptir.
- Şekildeki dönen disk üzerinde doğrusal yönde Aysun'un Ali'ye  $\vec{v}_{bağ}$  hızı ile fırlattığı top, coriolis etkisi ile Selma'ya gider.
- $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{bağ}$  denklemiyle coriolis ivmesi hesaplanır.
- Denklemdaki  $\vec{\omega}$  : üzerinde kayılan cismin açısal hızıdır. (Sistemde birden fazla  $\omega$  olduğunda bu tespit yöntemini doğru yapabilmek önem kazanır. )
- Şimdi bu denklemin çıkarılmasını bir başka örnek üzerinden yapacağız...>>

### 3.2.3 Coriolis İvmesi Denkleminin Çıkarılışı:

A noktası etrafında  $\omega$  açısal hızı,  $\alpha$  açısal ivmesiyle dönen çubukta, u hızı ve  $a_k$  ivmesi ile kayan bir B bileziği düşünelim.



- **P ve H** : Bileziğin B ve B' konumlarında bilezikle aynı koordinatlara sahip çubuğa ait noktalardır.

- $\vec{u}$ ,  $\vec{a}_k$  : B nin P den uzaklaşma hızı ve ivmesi olduğundan, aslında bileziğin bağıl hızı ve bağıl ivmesidir. Her t anında çubuk doğrultusundadırlar.  $\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_{B/P} = \vec{v}_{bağ} = v_{bağ} \vec{i}_r \\ \vec{a}_k = \vec{a}_{B/P} = \vec{a}_{bağ} = a_{bağ} \vec{i}_r \end{array} \right\}$

B bileziğinin t anındaki

mutlak hızı :  $\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{B/P} = \vec{v}_P + \vec{u}$  ; mutlak ivmesi:  $\rightarrow \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_P}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$  (I)

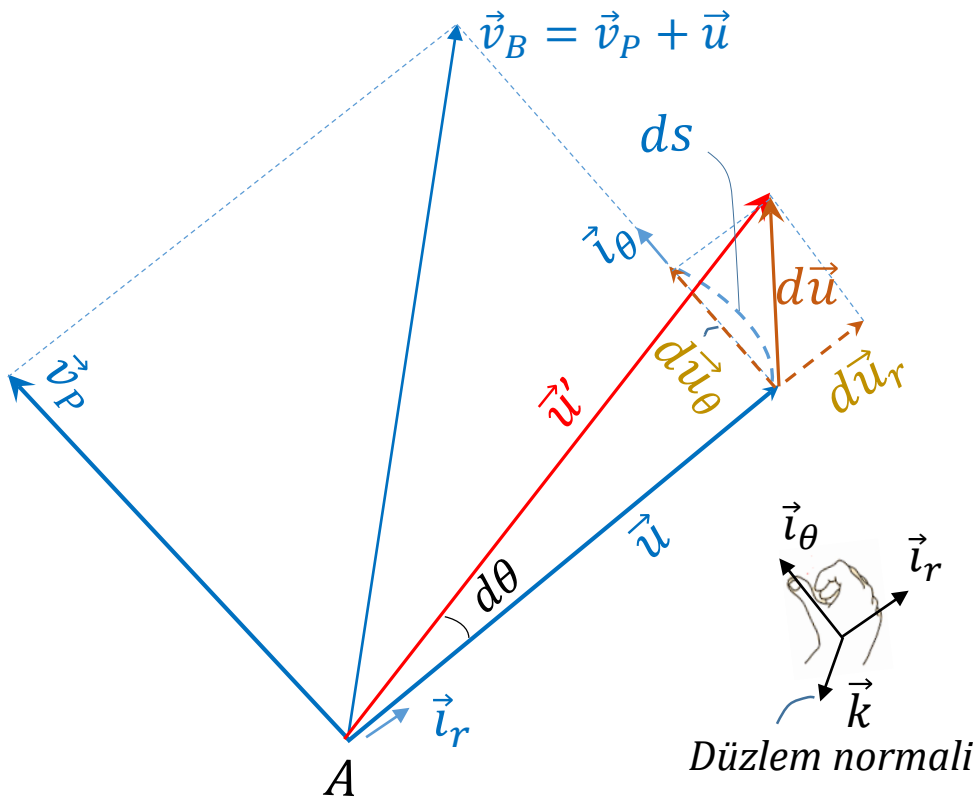
- Şimdi amacımız (I) nolu denklemde soru işaretli terimlerin açık ifadelerini bulmaktır.
- A ile P aynı cismin noktaları olduğundan P noktasının mutlak hızı ve mutlak ivmesi:

(D.3.4 'den):  $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AP} \rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$  , (D.3.5 'den):  $\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overline{AP} - \omega^2 \overline{AP} \rightarrow \vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$

- Bileziğin t anındaki B konumu  $\vec{r}$  ile tanımlanabildiğinden B nin mutlak hızı:  $\rightarrow \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}}{dt}$  (Bknz: konu1.2.5)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_P}{dt} &= \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P + \vec{u}) \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{u}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{= -\omega^2 \vec{r} \text{ (düzlemde)}} + \vec{\omega} \times \vec{u} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}}_{= \vec{a}_P} + \vec{\omega} \times \vec{u} \end{aligned} \left. \vphantom{\frac{d\vec{v}_P}{dt}} \right\} \rightarrow \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \vec{a}_P + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad \text{(II)}$$





- $d\vec{u}$  : bağıl hız vektöründeki dif. değişimdir. İki bileşene ayrılır.  
 $\rightarrow d\vec{u} = d\vec{u}_r + d\vec{u}_\theta = du_r \vec{i}_r + du_\theta \vec{i}_\theta$   
 → *birim vektörler*
- $d\vec{u}_\theta$ : Bağıl hızın yönüne etki eder.  
**Şiddeti:**  $\rightarrow ds \approx du_\theta = u d\theta$   
*( $d\theta$  açısının karşısındaki  $ds$  yay uzunluğuna eşit kabul edilir.)*
- $du_r$  : Bağıl hızın şiddetindeki dif. değişimdir. Bağıl ivme de aynı  $r$  doğrultusunda olduğundan:  
 $\rightarrow \frac{du_r}{dt} = a_{bağ}$

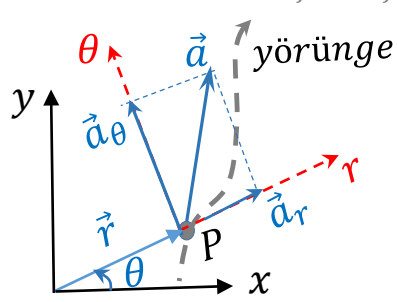
Buna göre:  $\rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{du_r}{dt} \vec{i}_r + u \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{i}_\theta = \frac{du_r}{dt} \vec{i}_r + u \cdot \omega \cdot \vec{i}_\theta$

}  $\rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}_{bağ} + \vec{\omega} \times \vec{u}$  (III)

Sağ el kuralına göre:  $\vec{i}_\theta = \vec{k} \times \vec{i}_r$  olacağından:  $u \cdot \omega \cdot \vec{i}_\theta = (\omega \vec{k}) \times (u \vec{i}_r) = \vec{\omega} \times \vec{u}$

II ve III eşitliklerini I denkleminde yerine koyarsak:  $\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{a}_{bağ} + \vec{\omega} \times \vec{u} = \vec{a}_P + \vec{a}_{bağ} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}$

Son terim bağımsız bir ivme olan coriolis ivmesidir:  $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{u} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{bağ}$



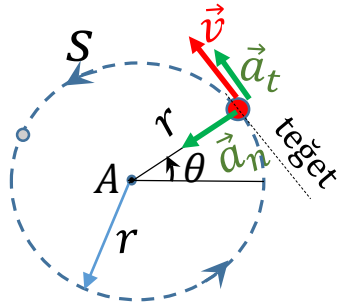
### 3.2.4 Polar Koordinatlardan Coriolis İvmesinin Tespiti

#### Polar Koordinatlarda İvme denklemleri:

1.2.5 konusunda, maddesel noktanın eğrisel hareketinde polar koordinatlardaki ivme bileşenlerini çıkarmıştık. İvme denklemlerini yazıp her bir terimi farklı bir sembolle göstereyim.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (D.1.29)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (D.1.30)$$



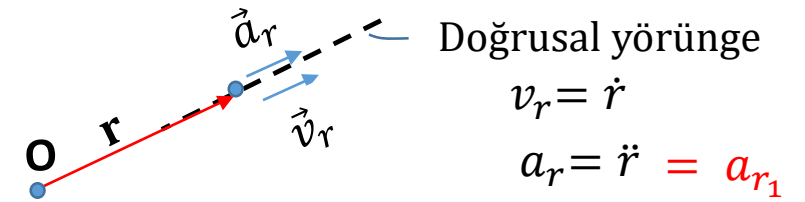
#### Dairesel Harekette İvme Bileşenleri (bknz 1.2.4.1 konusu)

(Açısal Hız):  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  ; (Açısal İvme):  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$

(Teğetsel ivme):  $a_t = r \cdot \alpha = r\ddot{\theta} = a_{\theta_1}$  (D.1.25)

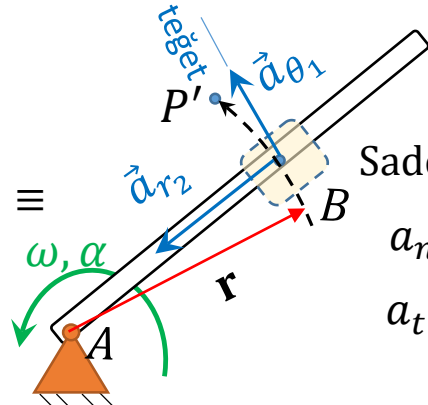
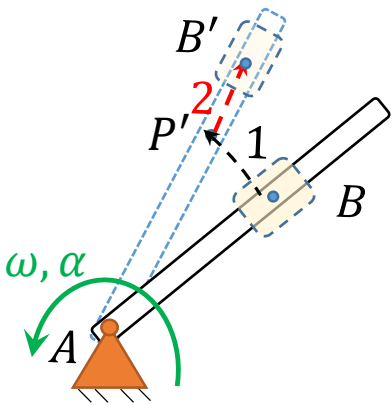
(Normal ivme):  $a_n = -\omega^2 \cdot r = -r\dot{\theta}^2 = a_{r_2}$  (D.1.26)

#### r yönünde doğrusal ötelenme ivmesi:



A etrafında dönen çubuk üzerinde kayan B bileziği genel düzlemsel hareket (dönme + ötelenme) yapar ve dolayısıyla D.1.29 ve 1.30 ivme denklemlerindeki terimlerin tümüne sahip olmalıdır. Şimdi bu hareketi ikiye ayırıp, her bir hareket için ivmeleri ve polar koordinatlardaki ivme denklemlerinde hangi terimlere karşılık geldiğini belirteceğiz.

Genel Düzlemsel Hareket  $\equiv$  A etrafında Dönme (dairesel hrk.) + r yönünde doğrusal ötelenme



Sadece dönme olsaydı +

$$a_n = a_{r_2} = -r\dot{\theta}^2$$

$$a_t = a_{\theta_1} = r\ddot{\theta}$$

Sadece ötelenme olsaydı

$$\text{ivme: } a_{r_1} = \ddot{r} = a_{bağ.}$$

$$\text{hız: } v_r = \dot{r} = v_{bağ.}$$

#### coriolis ivmesi terimi nerede?

B bileziği  $a_{\theta_2}$  ivme terimine de sahip olması gerekir. Bu terim sadece dönme veya sadece ötelenme hareketi olduğunda ortaya çıkmayan, fakat her ikisi aynı anda varsa (dönen cisim üzerinde kayan nokta olduğunda) ortaya çıkan coriolis ivmesidir.

$$a_{\theta_2} = 2\dot{\theta}\dot{r} = 2\omega v_{bağ} = a_{cor}$$

$$\vec{l}_\theta \text{ yönünde olduğu için: } \vec{l}_\theta = \vec{k} \times \vec{l}_r$$

$$\vec{a}_{cor} = 2(\omega \vec{k}) \times (v_{bağ} \vec{l}_r) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{bağ}$$

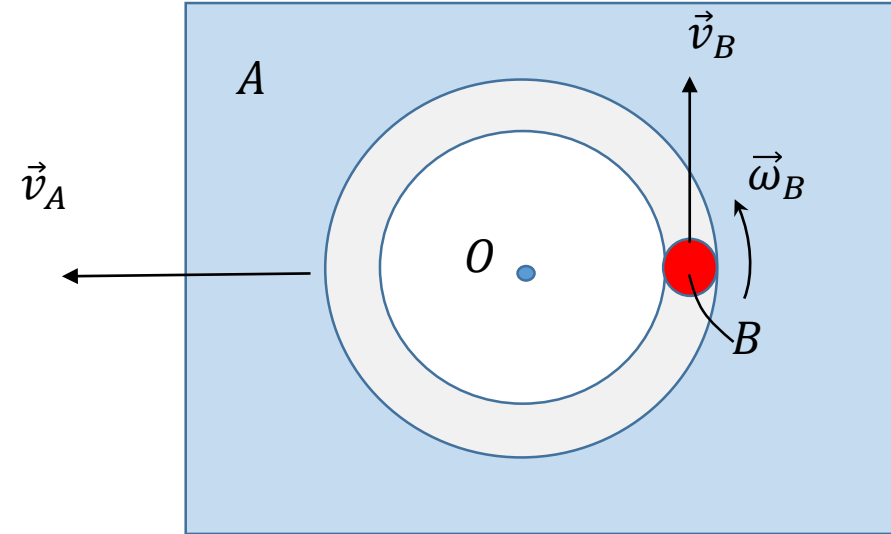


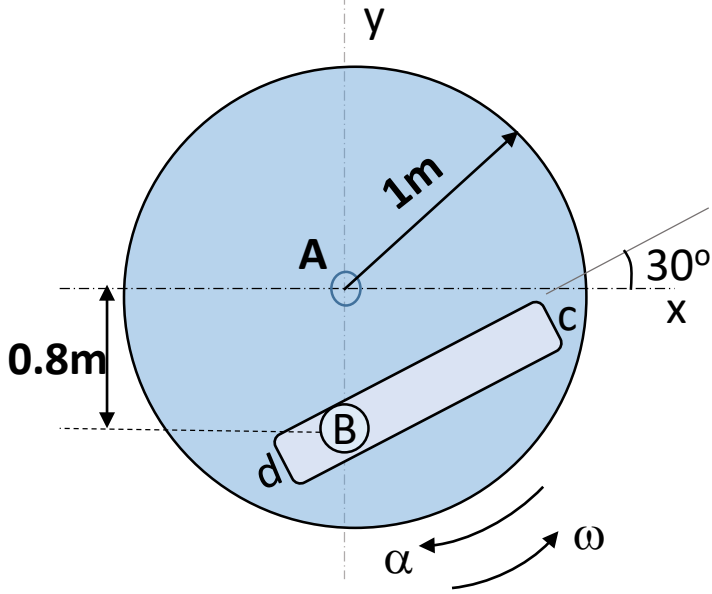
Coriolis ivmesi için başka bir örnek.

Hareketli resmi görmek için [tıklayın](#)

**Soru:** A levhası sola doğru  $\vec{v}_A$  hızı ilerlerken üzerine açılmış oyuktaki B bilyesi  $v_B$  hızı ve  $\omega_B$  açısal hızıyla ve serbest olarak dönebilmektedir. Bu anda coriolis ivmesi nedir?

**Cevap:**  $a_{cor} = 0$  (nedenini düşününüz)



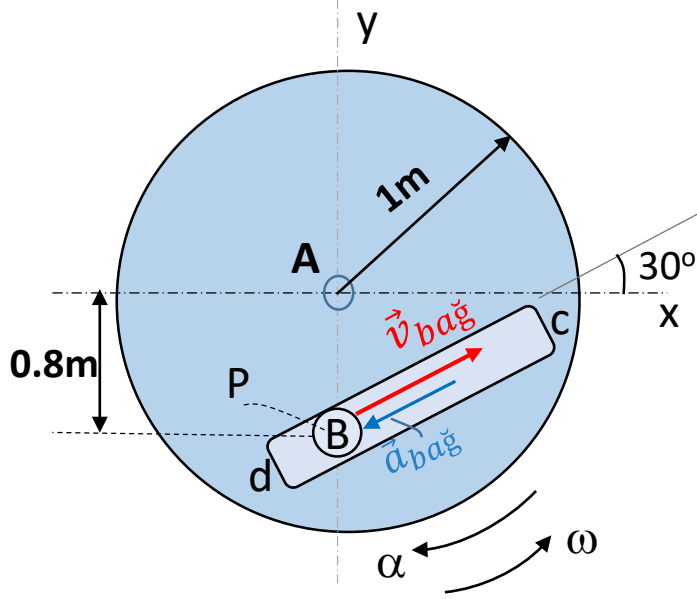
**Örnek 3.2.1** ([video 3.2a - örnek 3.4](#))

Yatay düzlemde, A merkezi etrafında dönmekte olan 1m yarıçaplı diskin gösterilen konumdaki açısal hızı saat ibreleri tersi yönünde  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  ve açısal ivmesi saat ibreleri yönünde  $\alpha = 1 \text{ rad/s}^2$  dir. Diskin üzerinde açılmış olan dc kanalında ise B bilyesi serbestçe hareket etmekte , gösterilen konumda kanala göre hızı c yönüne doğru  $2 \text{ m/s}$ , ivmesi ise d yönünde  $4 \text{ m/s}^2$  dir. Buna göre,

**a-)** bu konum için B bilyesinin mutlak hız ve mutlaka ivmesini hesaplayınız.

**b-)** dc kanalı yerine 0,8m yarıçaplı bir çembersel kanal olsaydı, B bilyesinin hız ve ivmesini ve kanala göre açısal hızını B bilyesinin aynı konumu için hesaplayınız. (Bilye bu kanalda saat ibreleri tersi yönünde  $2 \text{ m/s}$  lik sabit hızla dönmektedir.)

**Çözüm:..>>**

**Çözüm:**

a-) B kayan cisme ait, A ise «üzerinde kayılan cisme» ait noktalardır.

A ve B arasında D.3.6 ve D.3.7 denklemleri kullanılabilir.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} + \vec{v}_{bağ}$$

$$v_{bağ} = 2 \text{ m/s} , \vec{v}_{bağ} = 2(\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j}) \rightarrow \vec{v}_{bağ} = 1.73\vec{i} + 1\vec{j}$$

$$\vec{v}_B = 0 + 2\vec{k} \times (-0.8\vec{j}) + 1.73\vec{i} + 1\vec{j} \rightarrow \vec{v}_B = 3.33\vec{i} + 1\vec{j}$$

B bilyesinin mutlak ivmesini hesaplayalım:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} - \omega^2 \cdot \vec{AB} + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor}$$

$$a_{bağ} = 4 \text{ m/s}^2 \rightarrow \vec{a}_{bağ} = 4(-\cos 30^\circ \vec{i} - \sin 30^\circ \vec{j}) = -3.46\vec{i} - 2\vec{j}$$

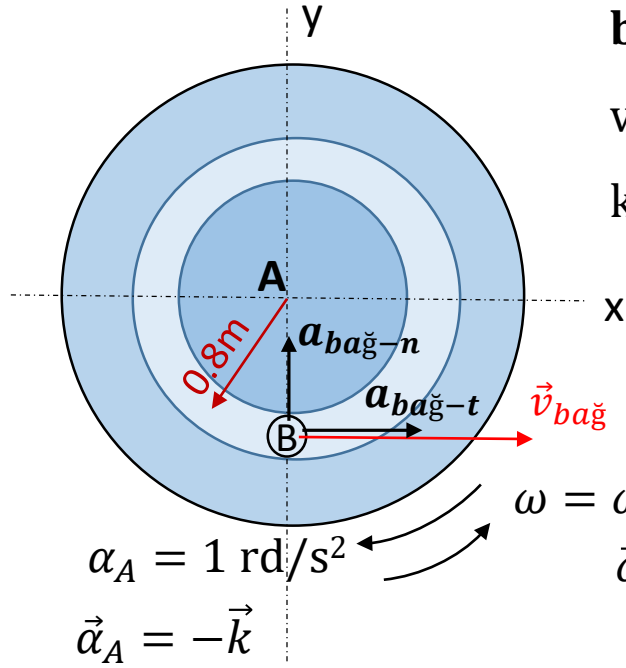
$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{bağ} = 2[2\vec{k} \times (1.73\vec{i} + 1\vec{j})]$$

B bilyesinin üzerinde  
kaydığı diskin açısal hızı.

$$\vec{a}_B = -1\vec{k} \times (-0.8\vec{j}) - 2^2(-0.8\vec{j}) - 3.46\vec{i} - 2\vec{j} + 2[2\vec{k} \times (1.73\vec{i} + 1\vec{j})]$$

$$\vec{a}_B = -0.8\vec{i} + 3.2\vec{j} - 3.46\vec{i} - 2\vec{j} + 6.92\vec{j} - 4\vec{i} \rightarrow \vec{a}_B = -8.26\vec{i} + 8.12\vec{j}$$

$$\vec{AB} = -0.8\vec{j}$$



**b-)** dc kanalı yerine 0.8m yarıçaplı bir çembersel kanal olsaydı, B bilyesinin mutlak hız ve ivmesini ve kanala göre açısal hızını şekildeki konum için hesaplayacağız. (Bilye bu kanalda saat ibreleri tersi yönünde kanala göre 2m/s lik sabit hızla dönmektedir.)

$$v_{bağ} = 2 \text{ m/s ; sabit ,}$$

Şekildeki konumda B bilyesinin bağıl hızı sağa doğru olduğundan:  $\vec{v}_{bağ} = 2\vec{i}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB} + \vec{v}_{bağ} = 2\vec{k} \times (-0.8\vec{j}) + 2\vec{i} \longrightarrow \vec{v}_B = 3.6\vec{i}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_A \times \vec{AB} - \omega_A^2 \cdot \vec{AB} + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor}$$

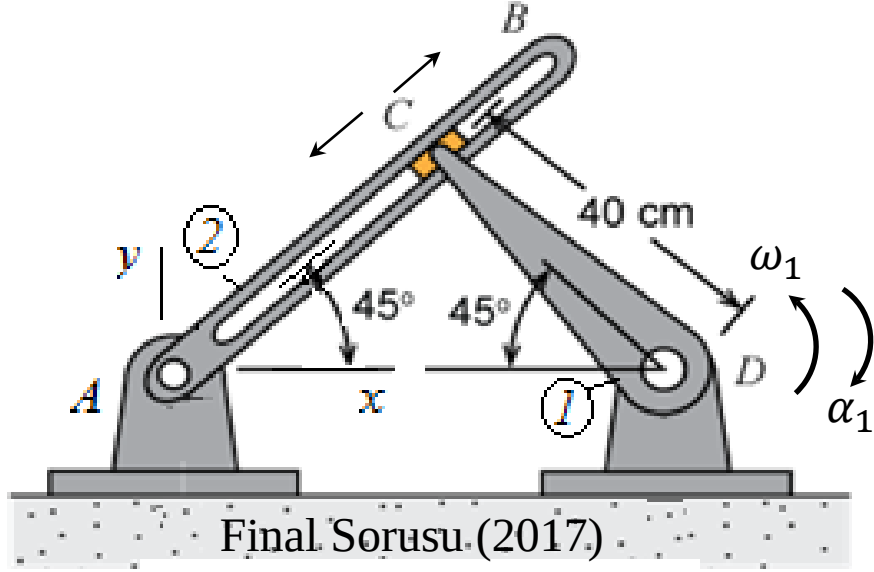
Bağıl hız sabit olmasına rağmen kanal içinde dairesel hareketten kaynaklı normal ivme söz konusudur.

$$\text{bağıl teğetsel ivme: } a_{bağ-t} = \frac{dv_{bağ}}{dt} = 0 \quad , \quad \text{Bağıl normal ivme: } a_{bağ-n} = \frac{v_{bağ}^2}{\rho} = \frac{2^2}{0.8} = 5 \text{ m/s} \rightarrow \vec{a}_{bağ-n} = 5\vec{j} = \vec{a}_{bağ}$$

$$(\text{B cisminin kanala göre açısal hızı}): \quad \omega_B = \frac{v_{bağ}}{r} = \frac{2}{0.8} = 2.5 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \vec{\omega}_B = 2.5\vec{k}$$

$$\vec{a}_{coriolis} = \vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_A \times \vec{v}_{bağ} = 2(2\vec{k} \times 2\vec{i}) = 8\vec{j} \rightarrow \vec{a}_B = -\vec{k} \times (-0.8\vec{j}) - 2^2(-0.8\vec{j}) + 5\vec{j} + 8\vec{j} \rightarrow \vec{a}_B = -0.8\vec{i} + 16.2\vec{j}$$

Soru: Niçin  $\vec{\omega}_B$  yi almadık? Şu ana kadar anlatılanlardan cevabını verebilirsiniz.

**Örnek 3.2.2**

Şekildeki mekanizmada 1 nolu DC kolunun açısal ivmesi saat ibreleri yönünde, sabit ve  $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$  ve açısal hızı gösterilen konumda saat ibreleri tersi yönünde  $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$  dir. 1 nolu kola bağlı C kayar elemanı ise 2 nolu AB kolu üzerinde açılmış kanal içinde serbestçe kayabilmektedir. Gösterilen konum için 2 nolu kolun açısal hızını ve açısal ivmesini hesaplayınız.

**Çözüm:**

*İkizkenar üçgen olduğundan  $AC=DC=40 \text{ cm}$*

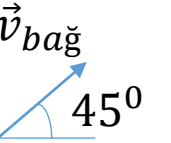
*C: A'nın bulunduğu 2 nolu cismin üzerinde kayan bir noktadır*

C'nin hızını 1 ve 2 nolu kollardan yazalım:

C ve D aynı (1 nolu) cisim üzerinde,

C ve A farklı cisimler üzerinde,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \omega_1 \vec{k} \times \overrightarrow{DC} = \vec{v}_A + \omega_2 \vec{k} \times \overrightarrow{AC} + \vec{v}_{bağ}$$



*Kanal doğrultusunda olmalıdır. AB yönünde seçilmiştir.*

$$0 + (2\vec{k}) \times 40(-\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) = 0 + (\omega_2 \vec{k}) \times 40(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) + v_{bağ}(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j})$$

$$-56.56\vec{i} - 56.56\vec{j} = 28.28\omega_2\vec{j} - 28.28\omega_2\vec{i} + v_{bağ}(0.707\vec{i} + 0.707\vec{j})$$

$$\vec{i}: -56.56 = -28.28\omega_2 + 0.707v_{bağ}$$

$$\vec{j}: -56.56 = +28.28\omega_2 + 0.707v_{bağ}$$

$$\omega_2 = 0$$

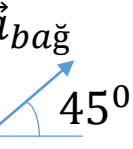
$$; \quad v_{bağ} = -80 \text{ cm/s}$$

*Seçilen yönün tersi yönündedir.*



C'nin ivmesini 1 ve 2 nolu kollardan yazalım:

Kanal doğrultusunda olmalıdır.  
AB yönünde seçilmiştir.

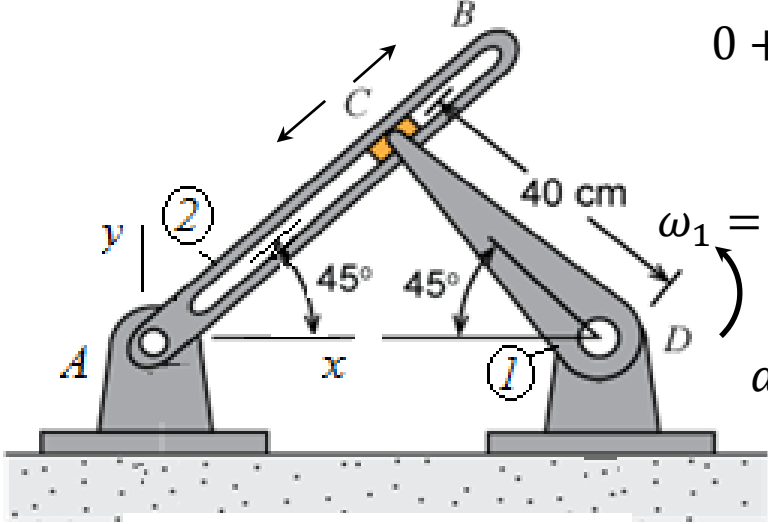


$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \alpha_1 \vec{k} \times \overrightarrow{DC} - \omega_1^2 \overrightarrow{DC} = \vec{a}_A + \alpha_2 \vec{k} \times \overrightarrow{AC} - \omega_2^2 \overrightarrow{AC} + \vec{a}_{bağ}(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) + \vec{a}_{cor}$$

$$0 + (-2\vec{k}) \times 40(-\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) - 2^2(40)(-\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j})$$

$$= 0 + (\alpha_2 \vec{k}) \times 40(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}) + \vec{a}_{bağ}(0.707 \vec{i} + 0.707 \vec{j}) + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{bağ}$$

Üzerinde kayılan 2 nolu  
cismin açısal hızıdır.  
 $\omega_2 = 0$  bulunmuştur.



$$56.56\vec{i} + 56.56\vec{j} + 113.13\vec{i} - 113.13\vec{j} = 28.28 \alpha_2 \vec{j} - 28.28 \alpha_2 \vec{i} + 0.707 a_{bağ} \vec{i} + 0.707 a_{bağ} \vec{j} + 0$$

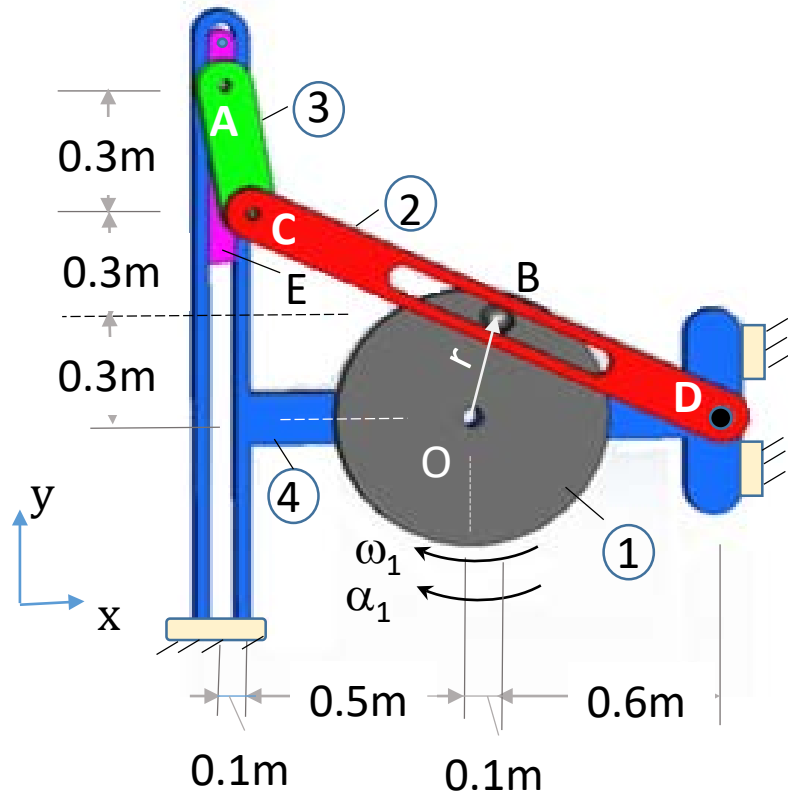
$$\vec{i}: \quad 169.7 = -28.28 \alpha_2 + 0.707 a_{bağ}$$

$$\vec{j}: \quad -56.57 = +28.28 \alpha_2 + 0.707 a_{bağ}$$

$$a_{bağ} = 80 \text{ cm/s}^2$$

$$\alpha_2 = -4 \text{ rad/s}^2$$





**ÖRNEK 3.2.3** ([video 3.2b - örnek 3.5](#)): Şekildeki mekanizmada 1,2 ve 3 nolu cisimler 4 nolu sabit çerçeve üzerinde hareket etmektedir. Gösterilen konumda, O merkezli 1 nolu diskin açısal hızı ve açısal ivmesi saat ibreleri yönünde olup şiddetleri sırasıyla  $\omega_1=2\text{rd/s}$  ve  $\alpha_1=1\text{rd/s}^2$  dir. Diske bağlı B bilyesi 2 nolu kolun üzerindeki kanalda , E elemanı ise 4 nolu sabit çerçeve üzerinde açılmış düşey kanalda serbestçe kayabilmektedir. Buna göre gösterilen konum için E kayar elemanının hız ve ivmesini hesaplayınız.

**Çözüm:** E kayar elemanı sadece doğrusal ötelenme yaptığı için tüm noktalarının hız ve ivmesi bir t anında aynıdır. A pimi hem E kayar elemanına hem 3 nolu kola ait ortak bir noktadır. O halde;  $\vec{v}_E = \vec{v}_A$  ;  $\vec{a}_E = \vec{a}_A$  yazabiliriz.

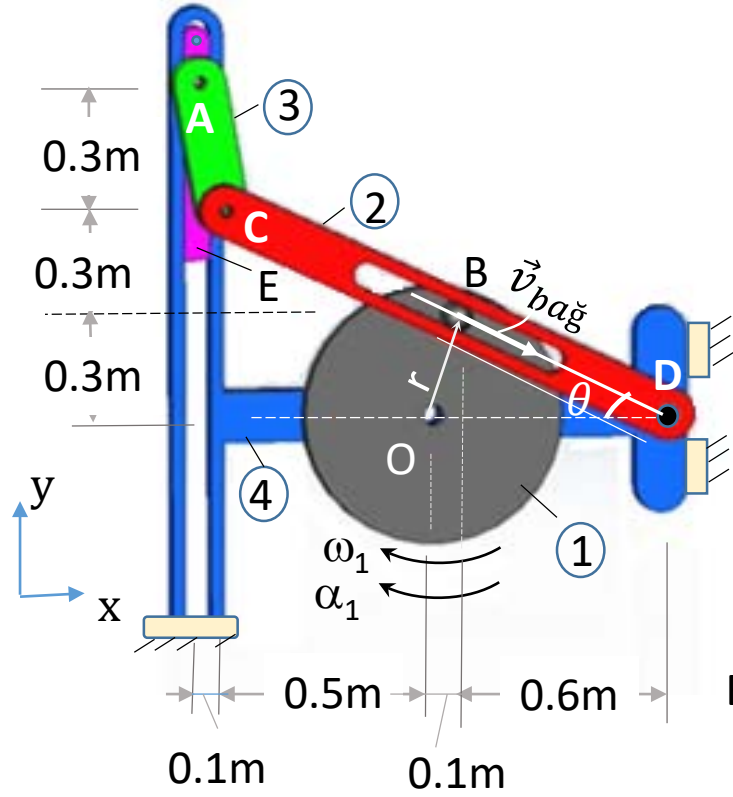
E elemanının hız ve ivmesini bulmak için A noktasının hız ve ivmesini bulmamız yeterlidir.

- A ve C : 3nolu kola ait iki farklı noktadır. Aynı cisim üzerinde yer aldıkları için D.3.4 mutlak hız denklemi A ve C arasında yazılabilir:  $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega_3 \vec{k} \times \vec{CA}$
- Benzer şekilde C ve D 2nolu kola ait noktalardır:  $\vec{v}_C = \vec{v}_D + \omega_2 \vec{k} \times \vec{DC}$
- A'nın hareketi düşey doğrultuda sınırlandırıldığı için hız vektörü:  $\vec{v}_A = v_A \vec{j}$

(D sabit noktadır)

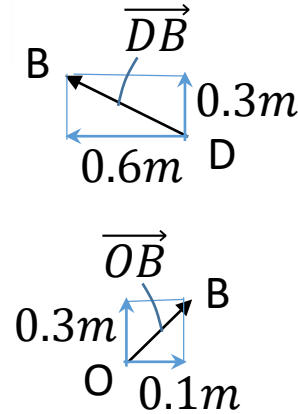
$$\begin{aligned} v_A \vec{j} &= \vec{v}_D + \omega_2 \vec{k} \times \vec{DC} + \omega_3 \vec{k} \times \vec{CA} \\ v_A \vec{j} &= \omega_2 \vec{k} \times \vec{DC} + \omega_3 \vec{k} \times \vec{CA} \end{aligned}$$

Hızın şiddeti pozitif (+y) yönünde) kabul edilmiştir.



$$\tan \theta = \frac{0.6}{1.2} \rightarrow \theta = 26.56^\circ$$

$$\cos \theta = 0.89, \quad \sin \theta = 0.44$$



Şimdi B noktasının hızını 1 ve 2 kollarından yazacağız. (*O sabit noktadır*)

**B ve O :** 1 nolu cisme ait noktalar olduğundan:  $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \omega_1 \vec{k} \times \overrightarrow{OB}$

**B ve D:** farklı cisimlere ait iki noktadır.

**D:** 2 nolu kola ait bir nokta; B ise 2 nolu kol üzerinde kayan bir noktadır.

O halde aralarında D.3.6 denklemi kullanılabilir:  $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \omega_2 \vec{k} \times \overrightarrow{DB} + \vec{v}_{bağ}$

$$\vec{v}_{bağ} = v_{bağ} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{v}_B = \omega_2 \vec{k} \times \overrightarrow{DB} + \vec{v}_{bağ} = \omega_1 \vec{k} \times \overrightarrow{OB}$$

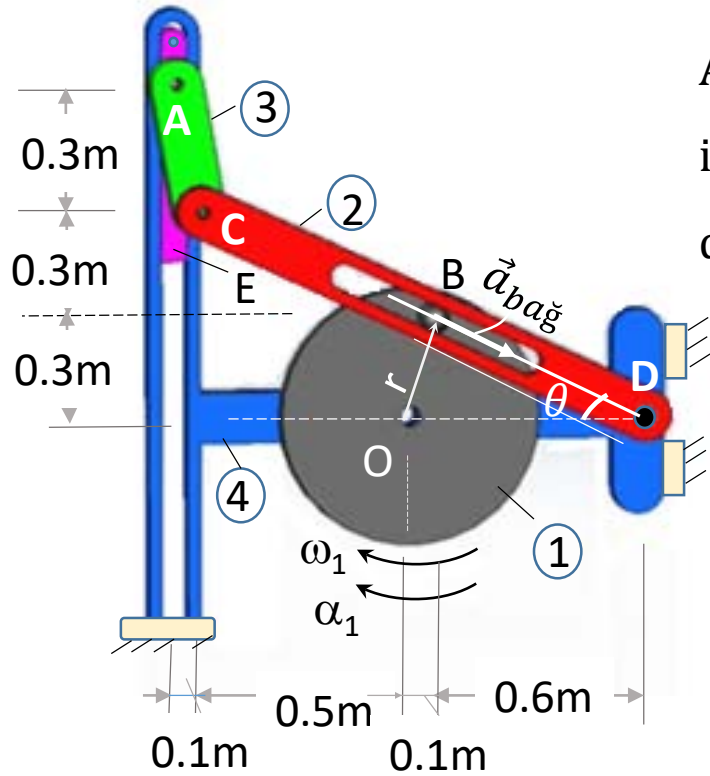
*Saat ibreleri yönünde olduğundan  $\omega_1 < 0$  (çünkü +z eksenine bize doğrudur.)*

$$\omega_2 \vec{k} \times (-0.6\vec{i} + 0.3\vec{j}) + v_{bağ} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) = -2\vec{k} \times (0.1\vec{i} + 0.3\vec{j})$$

$$-0.6\omega_2 \vec{j} - 0.3\omega_2 \vec{i} + 0.89v_{bağ} \vec{i} - 0.44v_{bağ} \vec{j} = -0.2\vec{j} + 0.6\vec{i}$$

**Soru:**  $\vec{v}_{bağ}$  'ın yönü niçin bu şekilde seçildi? **Cevap:**  $\vec{v}_{bağ}$  'ın kanal doğrultusunda olduğunu biliyoruz. Yönünü bilmiyoruz veya tahmin edemedik. Bu durumda keyfi olarak bir yön seçeriz. Buradan B den D'ye doğru aşağı yönde seçtik. Hesaplamalar sonucunda şiddetinin işareti + çıkarsa seçtiğimiz yön doğrudur. - çıkarsa ters yönde imiş deriz. Ama yönünü değiştirmeden işaretiyle birlikte diğer işlemlerde kullanırız. Bu tüm dinamik ve statik konularında yer alan vektörel büyüklükler (kuvvet, ivme, hız vb.) için genel bir kuraldır.





İvmeler için de benzer hesaplamalar yaparız.

Aynı cisim üzerindeki noktalar için D.3.5 denklemini, farklı cisimler üzerindeki noktalar için (birisi kayan nokta, diğeri üzerinde kayılan cismin noktası olmak şartıyla) D.3.7 denklemini kullandığımıza dikkat ederek alttaki işlemleri inceleyiniz.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \alpha_1 \vec{k} \times \overrightarrow{OB} - \omega_1^2 \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{a}_D + \alpha_2 \vec{k} \times \overrightarrow{DB} - \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{DB} + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor}$$

$\omega_2$  : B piminin üzerinde kaydığı cismin (2 nolu kolun) açısal hızıdır.  
(B: 2 nolu kolun bir noktası değildir. Fakat 1 nolu kolun bir noktasıdır.)

$$-1\vec{k} \times (0.1\vec{i} + 0.3\vec{j}) - 2^2(0.1\vec{i} + 0.3\vec{j})$$

$$= \alpha_2 \vec{k} \times (-0.6\vec{i} + 0.3\vec{j}) - (-0.13^2) \cdot (-0.6\vec{i} + 0.3\vec{j}) + a_{bağ}(0.89\vec{i} - 0.44\vec{j}) + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{bağ}$$

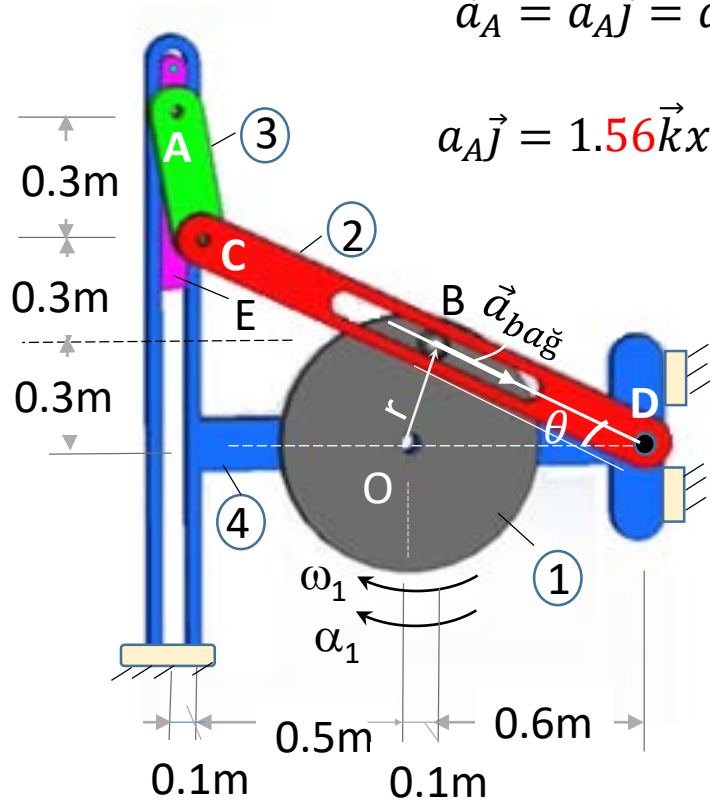
$$-0.1\vec{j} + 0.3\vec{i} - 0.4\vec{i} - 1.2\vec{j} = -0.6\alpha_2\vec{j} - 0.3\alpha_2\vec{i} + 0.01\vec{i} - 0.005\vec{j} + 0.89a_{bağ}\vec{i} - 0.44a_{bağ}\vec{j} + 2(-0.13\vec{k}) \times (0.56\vec{i} - 0.28\vec{j})$$

$$-0.1\vec{i} - 1.3\vec{j} = (-0.3\alpha_2 + 0.89a_{bağ} - 0.063)\vec{i} + (-0.6\alpha_2 - 0.44a_{bağ} - 0.15)\vec{j}$$

$$i: \quad -0.1 = -0.3\alpha_2 + 0.89a_{bağ} - 0.063 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} i: \\ j: \end{matrix}} \right\} \quad a_{bağ} = 0.484 \text{ m/s}^2$$

$$j: \quad -1.3 = -0.6\alpha_2 - 0.44a_{bağ} - 0.15 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} i: \\ j: \end{matrix}} \right\} \quad \alpha_2 = 1.56 \text{ rd/s}^2$$

..>>



$$\vec{a}_A = a_A \vec{j} = \vec{a}_C + \alpha_3 \vec{k} \times \overrightarrow{CA} - \omega_3^2 \cdot \overrightarrow{CA} \rightarrow a_A \vec{j} = \overbrace{\vec{a}_D + \alpha_2 \vec{k} \times \overrightarrow{DC} - \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{DC}}^{\vec{a}_C} + \alpha_3 \vec{k} \times \overrightarrow{CA} - \omega_3^2 \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$a_A \vec{j} = 1.56 \vec{k} \times (-1.2 \vec{i} + 0.6 \vec{j}) - 0.13^2 (-1.2 \vec{i} + 0.6 \vec{j}) + \alpha_3 \vec{k} \times (-0.1 \vec{i} + 0.3 \vec{j}) - 0.26^2 (-0.1 \vec{i} + 0.3 \vec{j})$$

$$a_A \vec{j} = (-0.91 - 0.3 \alpha_3) \vec{i} + (-1.9 - 0.1 \alpha_3) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} i: 0 &= -0.91 - 0.3 \alpha_3 \\ j: a_A &= -1.9 - 0.1 \alpha_3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} i: 0 &= -0.91 - 0.3 \alpha_3 \\ j: a_A &= -1.9 - 0.1 \alpha_3 \end{aligned}} \right\} \quad \begin{aligned} \alpha_3 &= -3.03 \text{ rd/s}^2 \\ a_A &= -1.59 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$a_A = a_E = -1.59 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_E = -1.59 \vec{j} \quad (\text{aşağı doğru}) \quad \downarrow$$

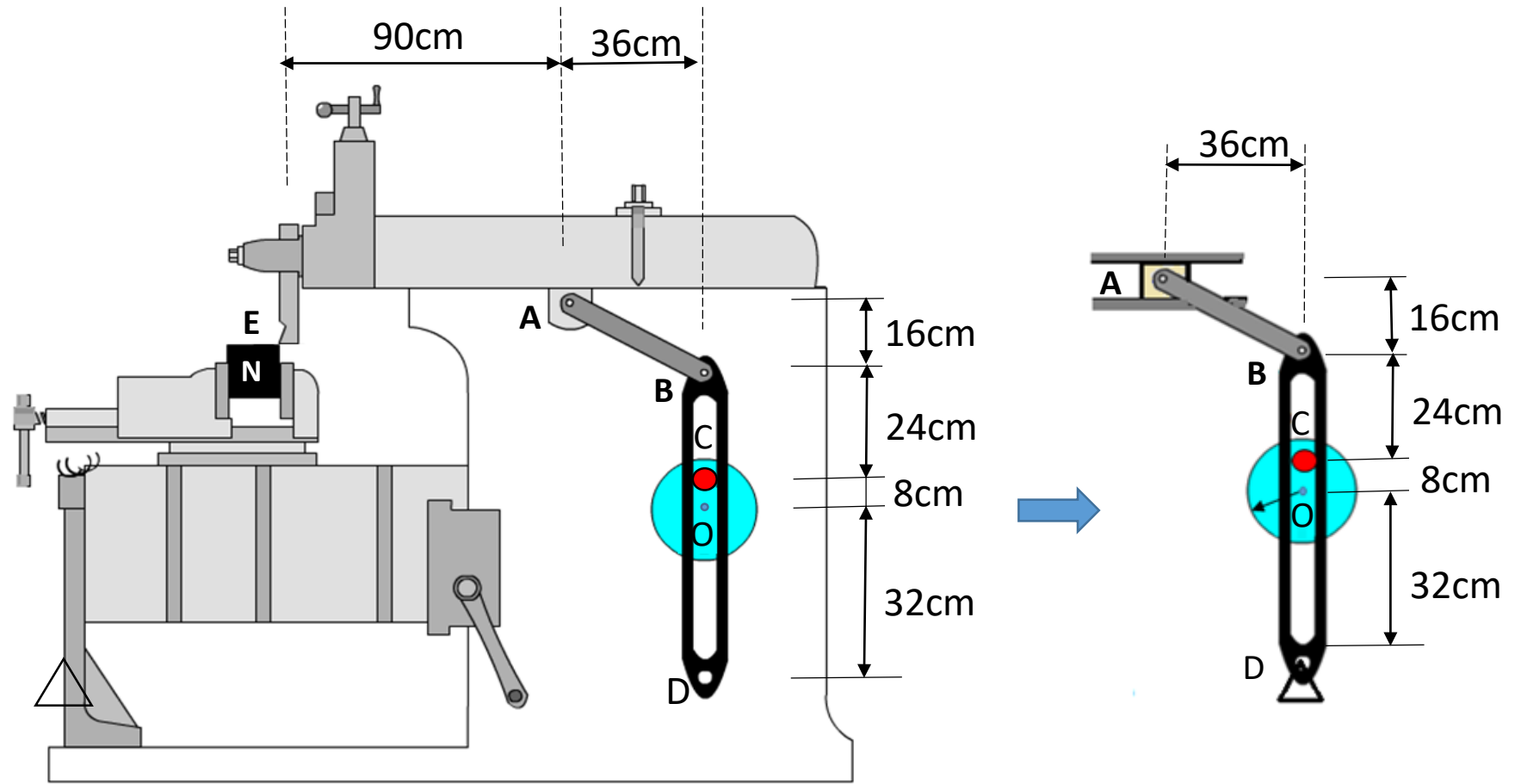
$a_A, v_A$  gibi bilinmeyen değerleri +y yönünde (pozitif) kabul ederek denklemlerde şiddetlerinin sembollerini önüne - işareti koymuyoruz. Hesaplama sonucunda  $a_A$  negatif çıktı. Demek ki seçtiğimiz yönün tersine yani -y yönünde imiş.  $v_A$  ise pozitif çıktı. Demek ki seçtiğimiz yön doğruymuş.

$\theta = 26,56^\circ$  bulunmuştu

$$\begin{aligned} \vec{a}_{bağ} &= a_{bağ} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \\ &= a_{bağ} (0,89 \vec{i} - 0,44 \vec{j}) \end{aligned}$$

**Örnek Soru 3.2.4**

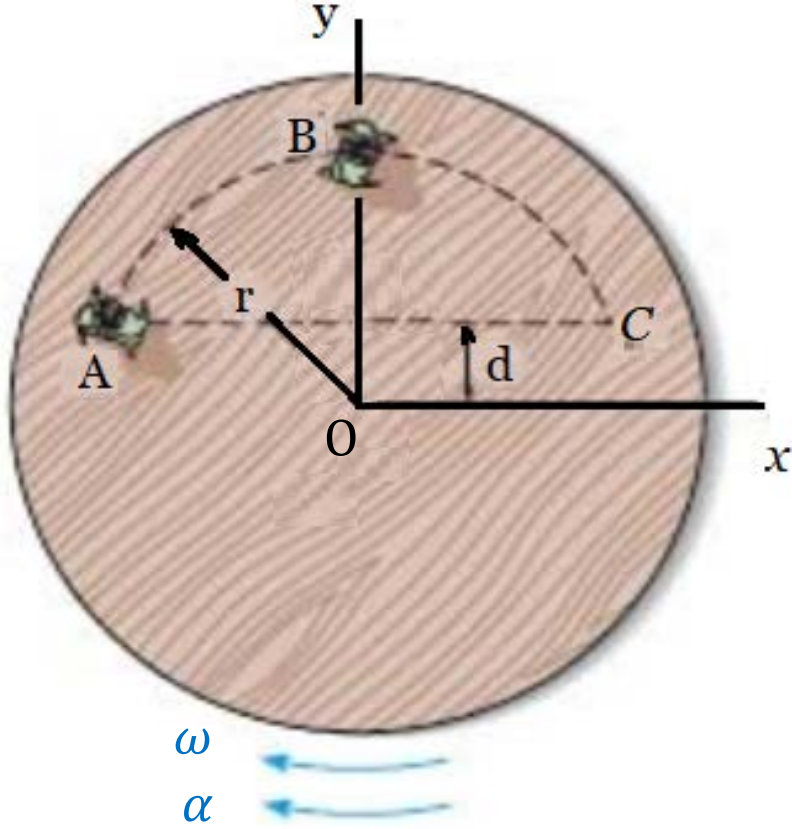
(video 3.2b – örnek 3.6)



Şekildeki Vargel (metal rendeleme tezgahı) N numunesini ucundaki E bıçağı ile rendeliyor. Tahrik motoruna bağlı O merkezli disk, saat ibreleri yönünde  $5\text{rd/s}$  lik sabit açısal hızla dönerken diskin üzerine sabitlenmiş C pimi, DB kolu üzerinde açılmış doğrusal kanal üzerinde kaymakta, AB kolu sayesinde de tezgahın üst kısmının gidiş-geliş hareketi ortaya çıkmaktadır. Şekilde gösterilen konum için E bıçağının hız ve ivmesini hesaplayınız.

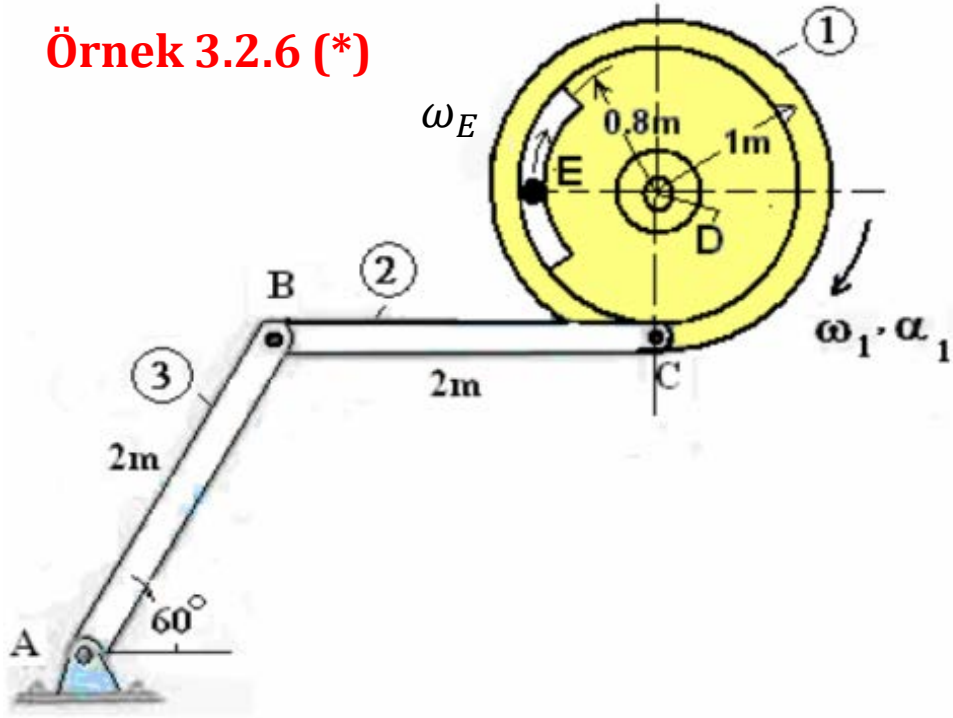
( **Cevap:**  $v_E = 64\text{cm/s}$  ,  $a_E = 28.44\text{cm/s}^2$  )





**Örnek 3.2.5 (\*) :** Yatay düzlemdeki disk  $O$  merkezi etrafında saat ibreleri yönünde  $\alpha = 2 \text{ rd/s}^2$  sabit açısal ivme ile dönmekte iken, diskin üzerindeki çocuk ABC daire yayı boyunca sabit  $v = 2\text{m/s}$  hızla hareket ediyor. Çocuk B noktasından geçerken diskin açısal hızı saat ibreleri yönünde  $\omega = 3\text{rd/s}$  dir. Bu konumda (çocuk B noktasında iken) çocuğun, a-) mutlak hızını, b-) mutlak ivmesini hesaplayınız.  $r = 2\text{m}$  ,  $d = 1\text{m}$

**Cevaplar:** a-)  $\vec{v}_B = 8\vec{i}$  ; b-)  $\vec{a}_B = 4\vec{i} - 32\vec{j}$

**Örnek 3.2.6 (\*)**

Şekildeki mekanizmada, 1 nolu disk D merkezi etrafında ve saat ibreleri yönünde sabit  $\alpha_1 = 2 \text{ rd/s}^2$  lik açısal ivme ile döndürülmektedir. Gösterilen konumda diskin açısal hızı saat ibreleri yönünde  $\omega_1 = 4 \text{ rd/sn}$  dir. Bu konum için,

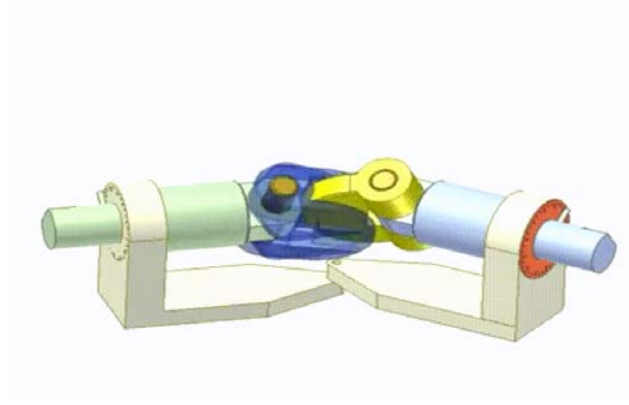
a-) 2 nolu kolun ani dönme merkezini bulununuz .

b-) 3 nolu kolun açısal hızını bulunuz. (Cevap:  $\omega_3 = 2.012 \text{ rd/s}$ )

c-) Diskin üzerinde diskle aynı merkezli, 0.8m yarıçaplı daire yayı şeklinde bir kanal açılmıştır. Bu kanala yerleştirilmiş olan E bilyesi kanala göre, saat ibreleri yönünde  $\omega_E = 5 \text{ rd / s}$  lik sabit açısal hızla kaymaktadır. Buna göre gösterilen konumda E bilyesinin mutlak hızını ve mutlak ivmesini hesaplayınız. (Cevap:  $\vec{v}_E = 7.2\vec{j}$  ,  $\vec{a}_E = 64.8\vec{i} + 1.6\vec{j}$ )







**RİJİD CİSİM KİNEMATİĞİ**

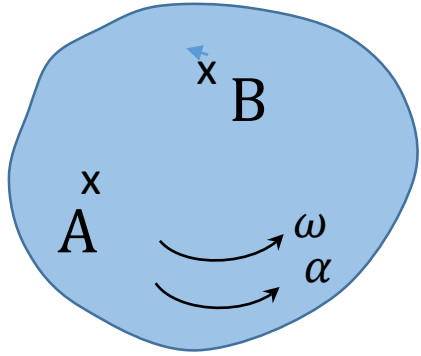
# **3.3 Üç Boyutlu Hareket**

**(Mutlak ve Bağıl Hareket – Örneklerle Hız ve İvme Analizleri)**

## 3.3.1 ) Rijit Cisimlerin 2 ve 3 Boyutlu Hareketinde Hız ve İvme Denklemleri:

**Mutlak Hareket**

A ve B aynı cismin üzerinde iki nokta

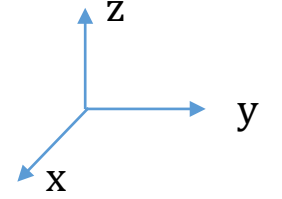
**Mutlak Hız:**

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}, \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

**Mutlak İvme:**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB}$$

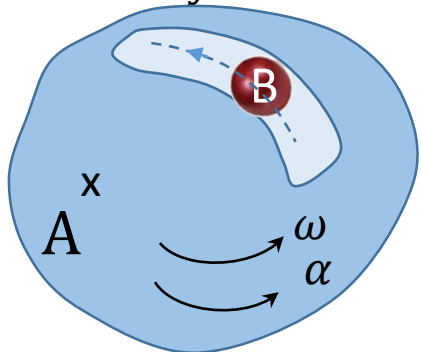
**Üç Boyutta**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \quad (\text{aynı denklem})$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB})$$

**Bağıl Hareket**

B, A'nın bulunduğu cisim üzerinde kayan bir nokta

**Mutlak Hız:**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{bağ}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{bağ} \quad (\text{aynı denklem})$$

**Mutlak İvme:**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB} + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}) + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor}$$



$$\vec{i}: 1 + 0.3\omega_{2y} - 0.6\omega_{2z} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{j}: -0.3\omega_{2x} - 0.2\omega_{2z} = v_B \quad (2)$$

$$\vec{k}: 0.6\omega_{2x} + 0.2\omega_{2y} = 0 \quad (3)$$

$\vec{\omega}_2 \perp \overrightarrow{CB}$  (Birbirlerine dik iki vektörün skaler çarpımı sıfırdır.)

$$(\omega_{2x}\vec{i} + \omega_{2y}\vec{j} + \omega_{2z}\vec{k}) \cdot (-0.2\vec{i} + 0.6\vec{j} + 0.3\vec{k}) = 0$$

$$-0.2\omega_{2x} + 0.6\omega_{2y} + 0.3\omega_{2z} = 0 \quad (4)$$

Bu dört denklemden:

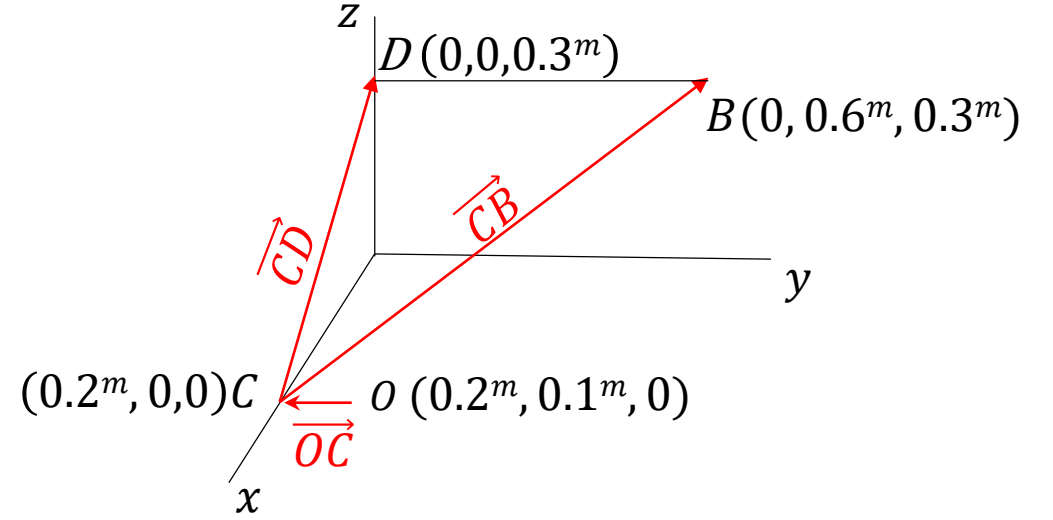
$$\omega_{2x} = 0.204 \text{ rad/s}, \quad \omega_{2y} = -0.612 \text{ rad/s}$$

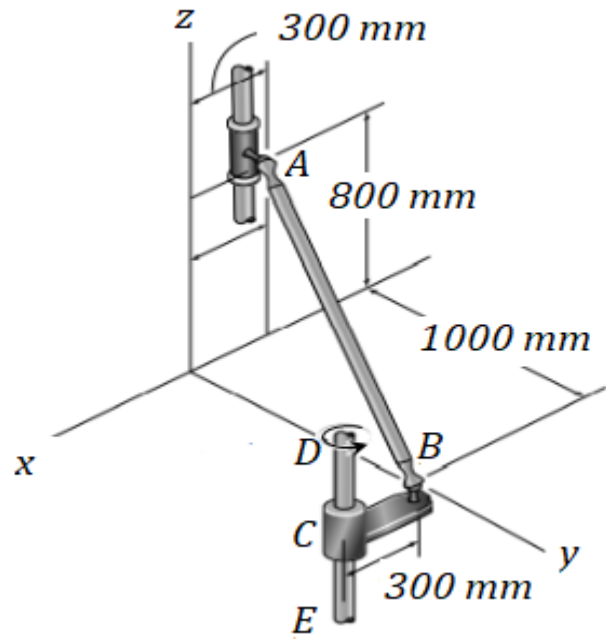
$$\omega_{2z} = 1.36 \text{ rad/s}, \quad v_B = -0.333 \text{ m/s}$$

Vektörel ifadeler:

$$\vec{v}_B = -0.333\vec{j}$$

$$\vec{\omega}_2 = 0.204\vec{i} - 0.612\vec{j} + 1.36\vec{k}$$



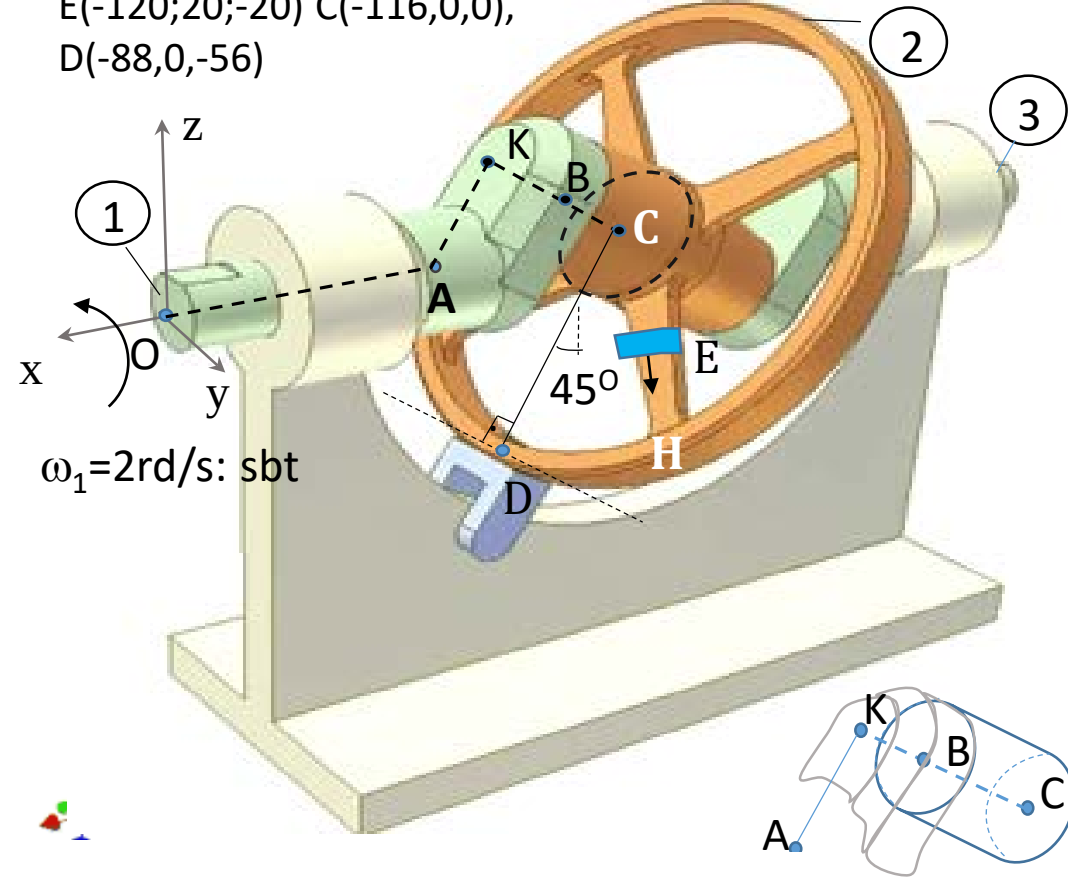


**Örnek 3.3.2(\*):** Şekildeki mekanizmada gösterilen konumda DE mili üstten bakışta saat ibreleri tersi yönünde  $6\text{rad/s}$  lik açısal hıza ve  $1.5\text{rad/s}^2$  lik açısal ivmeye sahiptir. BC elemanı ise DE miline sıkı geçirilmiştir. AB çubuğu A kayar elemanına ve BC parçasına küresel mafsallarla bağlıdır. A kayar elemanı düşey yönde sabitlenmiş çubuk üzerinde kayabilmektedir. Bu an için, A kayar elemanının ivmesini hesaplayınız. (AB çubuğunun kendi eksenin etrafında dönmediğini kabul ediniz.)

**Cevap:**  $\vec{a}_A = -13.9\vec{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$



cm biriminden koordinatlar: A(-60, 0, 0), B(-88,0,28),  
E(-120;20;-20) C(-116,0,0),  
D(-88,0,-56)



### ÖRNEK 3.3.3 ([video 3.3a – örnek 3.7](#))

Şekildeki mekanizmada, 1nolu OAKB kolu, soldan bakışta saat ibreleri tersi yönünde x eksenini etrafında  $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$  lik sabit açısal hızla döndürülüyor. 2 nolu tekerleğe sabitlenmiş olan D kızıağı yarım çember şeklindeki rampada kayabilmektedir. B noktası, 1 ve 2 nolu kolun birbirine bağlı olduğu ortak düzlemde yer almaktadır. Gösterilen an için ;

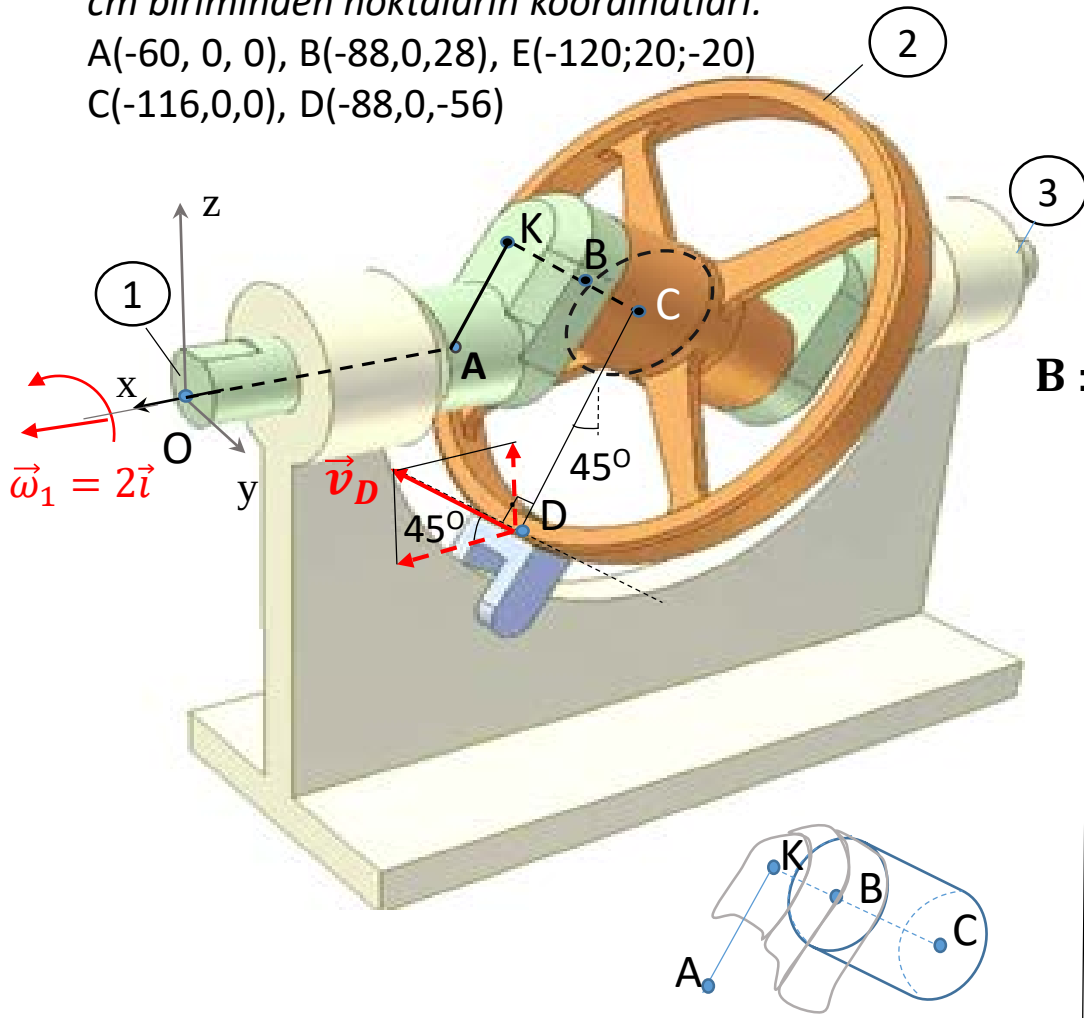
- D kızıağının hızını ve 2 nolu tekerleğin açısal hızını,
- D kızıağının ivmesi ve 2 nolu tekerleğin açısal ivmesini hesaplayınız.
- Tekerleğin CH kolu üzerine geçirilmiş olan E bileziği kol üzerinde serbestçe kayabilmektedir. Gösterilen konumda, E bileziğinin tekerleğe göre hız ve ivmesi CE yönünde (aşağı doğru) şiddetleri ise sırasıyla  $28.56 \text{ cm/s}$  ve  $7.14 \text{ cm/s}^2$  dir. Bu konum için E tekerleğinin mutlak hız ve mutlak ivmesini hesaplayınız.



cm biriminden noktaların koordinatları:

A(-60, 0, 0), B(-88,0,28), E(-120;20;-20)

C(-116,0,0), D(-88,0,-56)



## Çözüm:

a-) Gösterilen konum için kızıağın hızını ifade edersek:

$$\vec{v}_D = v_D(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{k}) \rightarrow \vec{v}_D = 0.707v_D\vec{i} + 0.707v_D\vec{k}$$

Bu aynı zamanda 2 nolu tekerleğin kızağa bağlı D noktasının hızıdır.

**B :** 1 ve 2 nolu cisimlerin ortak noktasıdır. Her iki taraftan hızını yazalım:

(A noktası, 1 nolu kolun dönme eksenini (x) üzerinde olduğundan hız ve ivmesi sıfırdır)

(B ve A: 1 nolu cismin, B ve D : 2 nolu cismin noktalarıdır. Mutlak hareket denklemleri yazılır.)

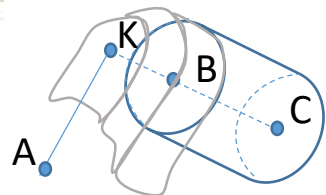
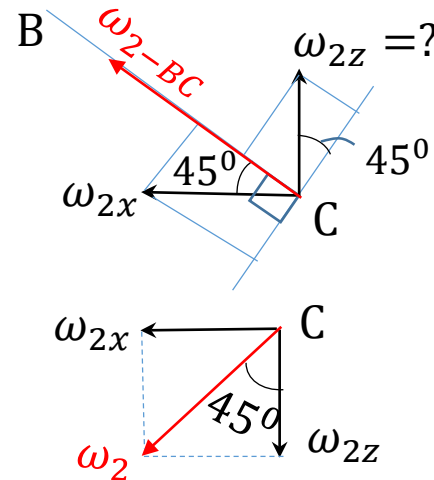
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_2 \times \vec{DB}$$

$$\vec{AB} = [-88 - (-60)]\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (28 - 0)\vec{k} = -28\vec{i} + 28\vec{k}$$

$$\vec{DB} = [-88 - (-88)]\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (28 - (-56))\vec{k} = 84\vec{k}$$

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{2x} & \omega_{2y} & \omega_{2z} \\ 0 & 0 & 84 \end{vmatrix} = 84\omega_{2y}\vec{i} - 84\omega_{2x}\vec{j}$$

$$2\vec{i} \times (-28\vec{i} + 28\vec{k}) = 0.707v_D\vec{i} + 0.707v_D\vec{k} + 84\omega_{2y}\vec{i} - 84\omega_{2x}\vec{j}$$


$$\left. \begin{array}{l} \omega_{2-BC} = 0 \text{ (olmalıdır.)} , \\ \omega_{2x} = 0.66 \text{ rd/s} \\ \omega_{2y} = 0 \end{array} \right\} \text{ (hesaplanmıştı.)}$$


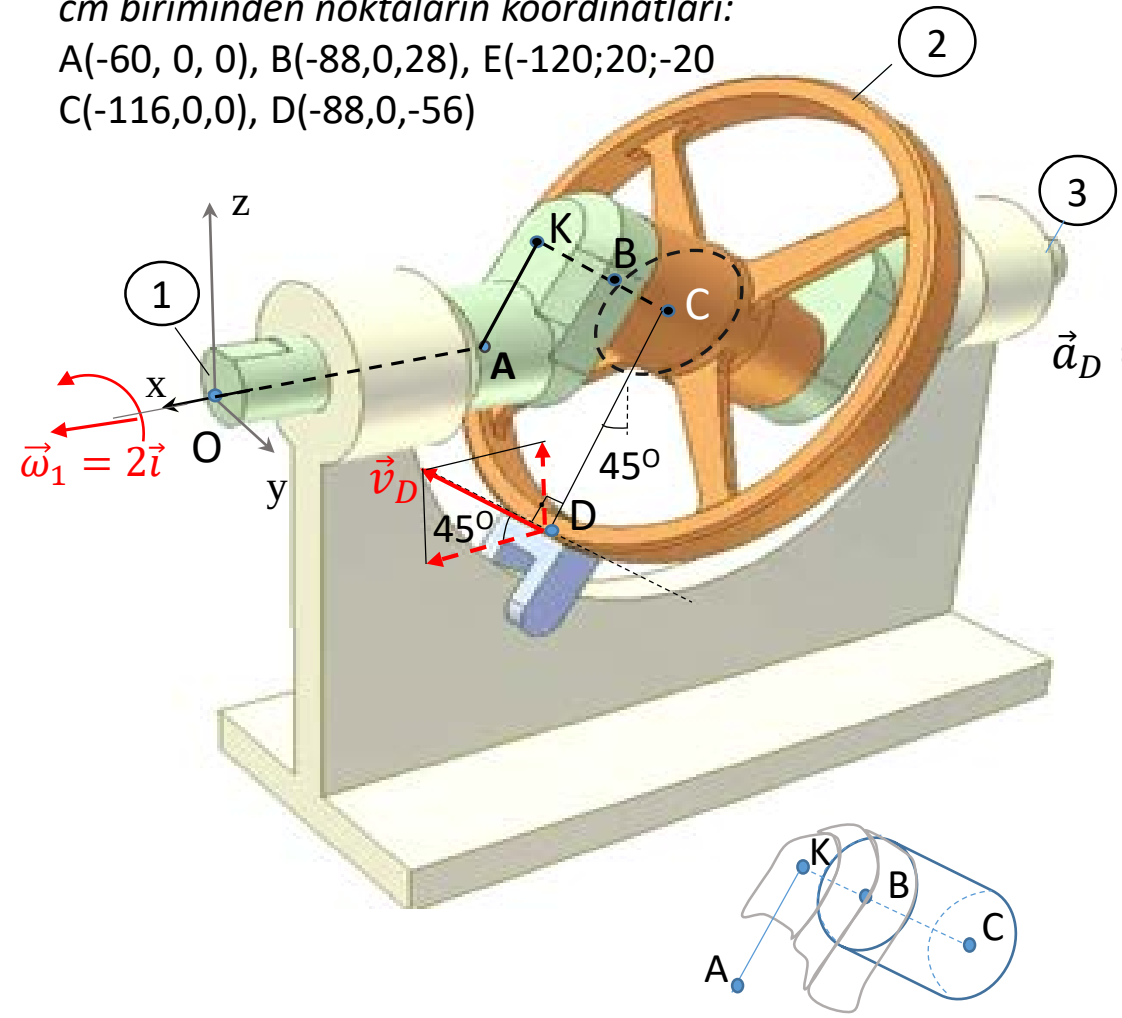
$$\omega_2 = \sqrt{0.66^2 + (-0.66)^2} \rightarrow \omega_2 = 0.93 \text{ rad/s}$$

228

cm biriminden noktaların koordinatları:

A(-60, 0, 0), B(-88,0,28), E(-120;20;-20)

C(-116,0,0), D(-88,0,-56)



b-) incelenen anda  $v_D = 0$  olarak bulunmuştu.

D noktasının (ve kızıağın) normal ivmesi:  $a_{Dn} = \frac{v_D^2}{\rho} = 0$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{Dt} = a_D (\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{k}) \rightarrow \vec{a}_D = 0.707 a_D \vec{i} + 0.707 a_D \vec{k} \quad (I)$$

D.3.5 mutlak ivme denkleminde:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \times \vec{BD} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{BD})$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \times \vec{AB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{AB})$$

$$\vec{a}_B = 2\vec{i} \times [2\vec{i} \times (-28\vec{i} + 28\vec{k})] = 2\vec{i} \times (-56\vec{j}) \rightarrow \vec{a}_B = -112\vec{k}$$

$$\vec{a}_D = -112\vec{k} + \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_{2x} & \alpha_{2y} & \alpha_{2z} \\ 0 & 0 & -84 \end{bmatrix}}^{\vec{\alpha}_2 \times \vec{BD}} + (0.66\vec{i} - 0.66\vec{k}) \times \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.66 & 0 & -0.66 \\ 0 & 0 & -84 \end{bmatrix}}^{\vec{\omega}_2 \times \vec{BD}}$$

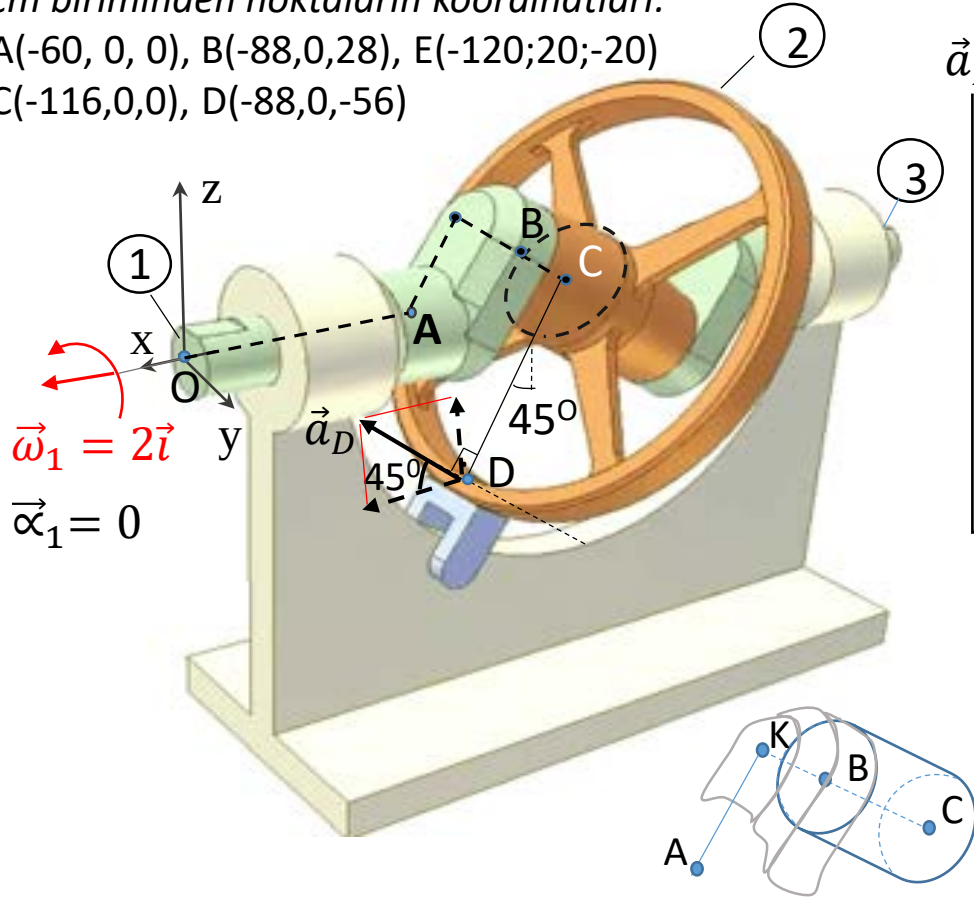
$$\vec{a}_D = -112\vec{k} - 84 \alpha_{2y} \vec{i} + 84 \alpha_{2x} \vec{j} + 36.6\vec{k} + 36.6\vec{i}$$

(II)

cm biriminden noktaların koordinatları:

A(-60, 0, 0), B(-88,0,28), E(-120;20;-20)

C(-116,0,0), D(-88,0,-56)



(I) ve (II) denklemleri birbirlerine eşitlenir.

$$\vec{a}_D = 0.707a_D\vec{i} + 0.707a_D\vec{k} = -112\vec{k} - 84\alpha_{2y}\vec{i} + 84\alpha_{2x}\vec{j} + 36.6\vec{k} + 36.6\vec{i}$$

$$\vec{i}: 0.707a_D = -84\alpha_{2y} + 36.6$$

$$\vec{j}: 0 = 84\alpha_{2x}$$

$$\vec{k}: 0.707a_D = -112 + 36.6$$

$$\alpha_{2y} = 1.33 \text{ rd/s}^2$$

$$\alpha_{2x} = 0$$

$$a_D = -106.6 \text{ cm/s}^2$$

$$\vec{a}_D = 0.707(-106.6)\vec{i} + 0.707(-106.6)\vec{k} \rightarrow \vec{a}_D = -75.36\vec{i} - 75.36\vec{k}$$

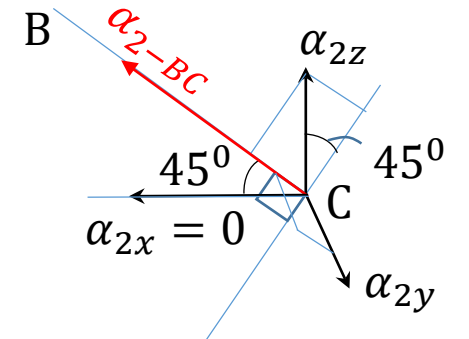
2 nolu tekerlek BC ekseninde dönme yapmadığından  $\alpha_{2-BC} = 0$  olur

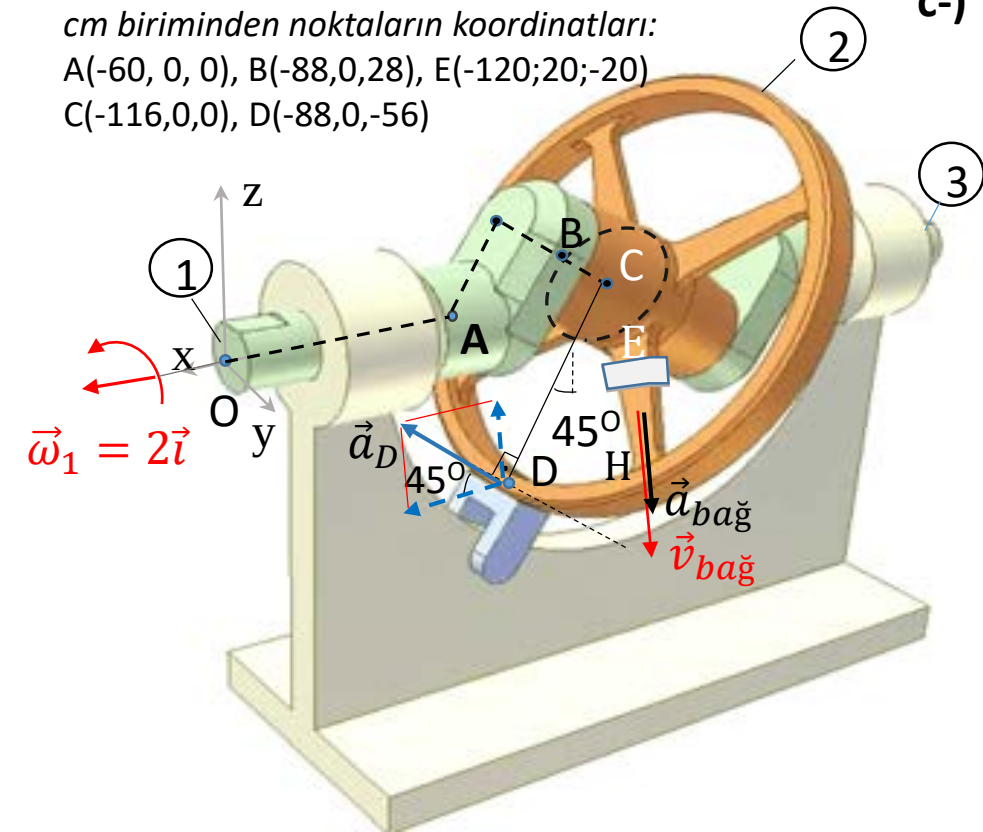
$BC \perp y \rightarrow \alpha_{2y} \perp BC \rightarrow \alpha_{2y}$  nin BC üzerinde bileşeni yoktur.

$$\alpha_{2z} \cdot \sin 45^\circ = \alpha_{2-BC} = 0 \rightarrow \alpha_{2z} = 0$$

$$\alpha_2 = \alpha_{2y} = 1.33 \text{ rd/s}^2$$

$$\rightarrow \vec{\alpha}_2 = 1.33\vec{j}$$




$$\vec{v}_{ba\ddot{g}} = v_{ba\ddot{g}} \frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = 28.56 \frac{-4\vec{i} + 20\vec{j} - 20\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 20^2 + 20^2}}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{ba\ddot{g}} = -4\vec{i} + 20\vec{j} - 20\vec{k}$$

- E noktası D nin bulunduğu cisim üzerinde kayan bir noktadır.

*(D.3.6) bağıl hız denkleminde:*

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega}_2 x \overrightarrow{DE} + \vec{v}_{ba\ddot{g}}$$

$$\vec{v}_E = 0 + (0.66\vec{i} - 0.66\vec{k})x(-32\vec{i} + 20\vec{j} + 36\vec{k}) - 4\vec{i} + 20\vec{j} - 20\vec{k}$$

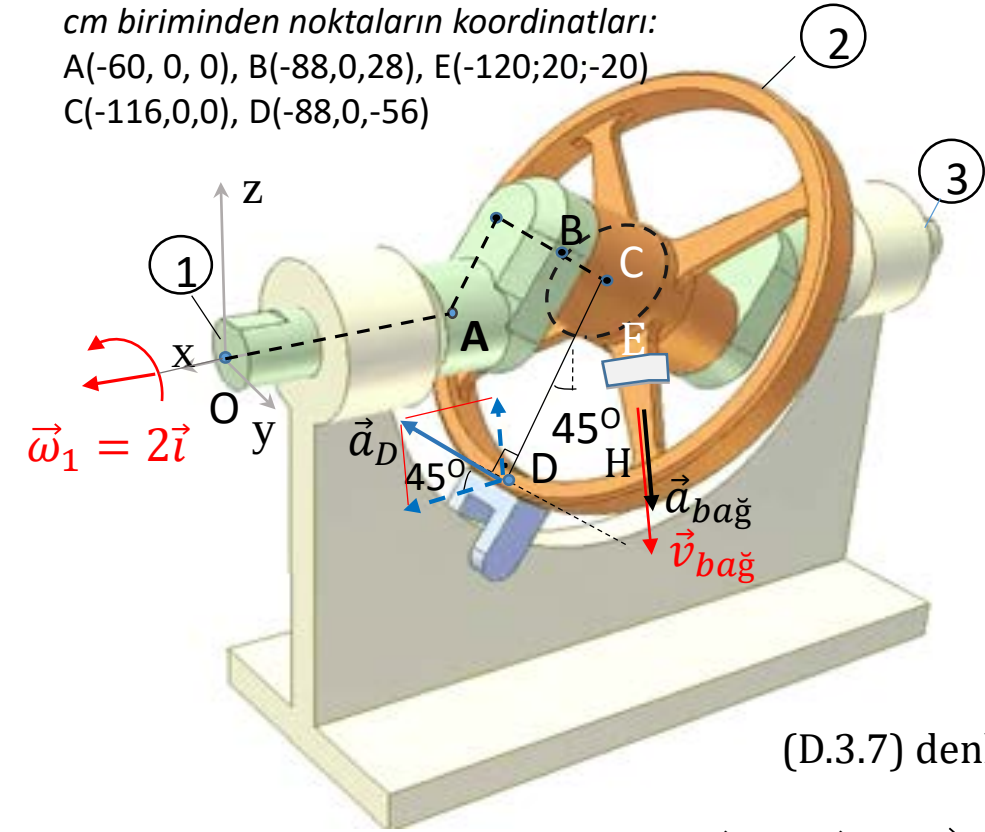
$$\rightarrow \vec{v}_E = 9.2\vec{i} + 17.36\vec{j} - 6.8\vec{k} \quad (E \text{ bileziğinin mutlak hızı})$$

### 3.3 Rijid Cismin 3 Boyutlu Kinematiği

cm biriminden noktaların koordinatları:

A(-60, 0, 0), B(-88,0,28), E(-120;20;-20)

C(-116,0,0), D(-88,0,-56)



$$\vec{a}_{bağ} = a_{bağ} \frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = 7,14 \frac{-4\vec{i} + 20\vec{j} - 20\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 20^2 + 20^2}} \rightarrow \vec{a}_{bağ} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

Üzerinde kayılan cismin  
(2 nolu tekerleğin) açısal hızı

Coriolis ivmesi:  $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{bağ} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.66 & 0 & -0.66 \\ -4 & 20 & -20 \end{vmatrix}$

$$\rightarrow \vec{a}_{cor} = 26.4\vec{i} + 31.68\vec{j} + 26.4\vec{k}$$

(D.3.7) denkleminde E bileziğinin mutlak ivmesi:

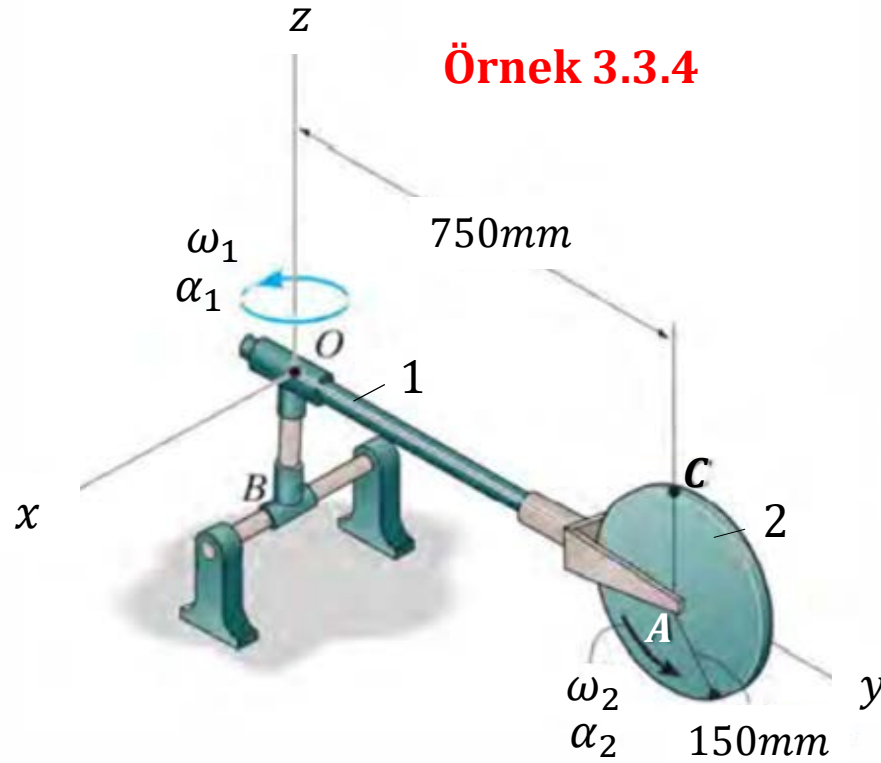
$$\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{DE} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{DE}) + \vec{a}_{bağ} + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_E = (-75.36\vec{i} - 75.36\vec{k}) + 1.33\vec{j} \times (-32\vec{i} + 20\vec{j} + 36\vec{k}) + (0.66\vec{i} - 0.66\vec{k}) \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.66 & 0 & -0.66 \\ -32 & 20 & +36 \end{vmatrix} + (-\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}) + (26.4\vec{i} + 31.68\vec{j} + 26.4\vec{k})$$

Bu eşitlikteki işlemler yapıldığında: (E bileziğinin mutlak ivmesi)  $\rightarrow \vec{a}_E = -3.82\vec{i} + 19.26\vec{j} - 13.14\vec{k}$





**Örnek 3.3.4**

1 nolu BOA kolu z eksenini etrafında (üstten bakışta saat ibreleri tersi yönünde) döndürülüyor. 1 nolu kolun ucuna bağlı A merkezli 2 nolu disk ise şekilde yönde ilaveten  $\omega_2$  açısal hızı ve  $\alpha_2$  açısal ivmesiyle döndürülüyor. Gösterilen konumda açısal hızlar ve açısal ivmeler,  $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_1 = 3 \text{ rad/s}^2$ ,  $\omega_2 = 12 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_2 = 6 \text{ rad/s}^2$  ise diskin üzerindeki C noktasının ivmesini hesaplayınız.

**Püf Noktaları:**

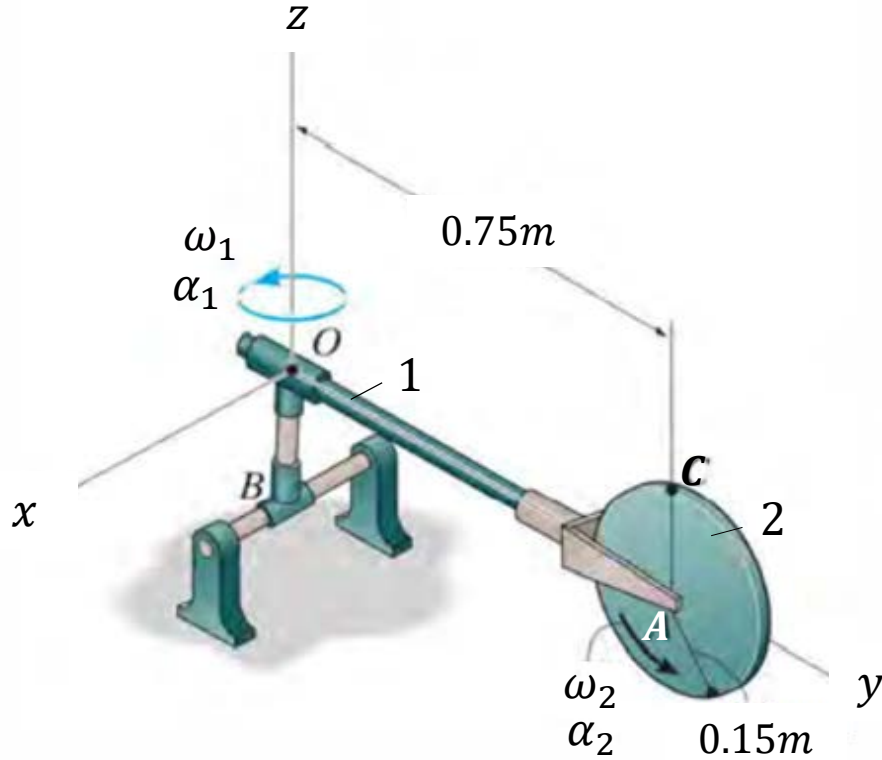
**1- Birden fazla hareket yapan cisimler:** Bu tip problemlerde sistemdeki bazı cisimlerin verilen hareketlerden birden fazlasını aynı anda yaptığını öncelikle fark etmek gerekir. Bu cisimlerin yaptığı her bir hareketin açısal hız ve açısal ivmeleri, yaptığı her bir harekete ait açısal hız ve açısal ivmelerin toplamıdır.

Bu örnekte disk her iki dönme hareketini aynı anda yapmaktadır. Disk kendi merkezi etrafında dönmesinin yanısıra 1 kolu ile birlikte z etrafında da dönmektedir. Bu durumda diskin toplam açısal hızı ve açısal ivmesi:

$$\vec{\omega}_{disk} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 = 12\vec{i} + 6\vec{k}, \quad \vec{\alpha}_{disk} = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_1 = 6\vec{i} + 3\vec{k}$$

**2- Mutlak hareket mantığıyla çözüm:** Hızı aranan nokta, birden fazla hareket yapıyorsa, üzerinde bulunduğu cismin toplam açısal hızı hesaplarda kullanılır.





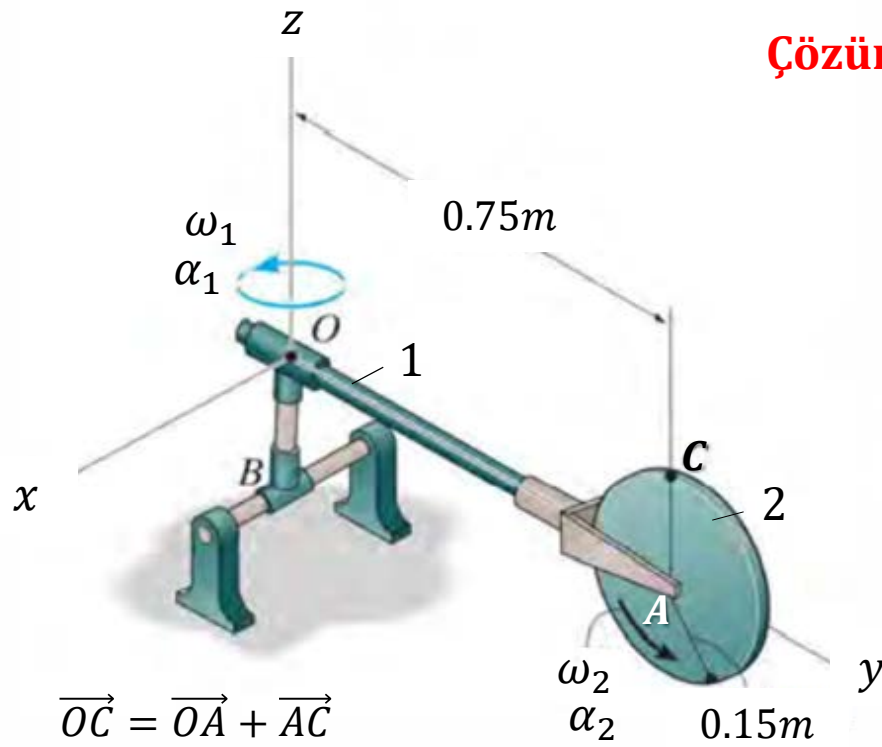
### Püf Noktaları-Devam

**3-Bağlı hareket mantığıyla çözüm:** Hızı veya ivmesi aranan nokta, birden fazla hareket yapıyorsa, sadece kendisinin yaptığı bir hareket, bağlı hareket olarak düşünülür ve çözüm bağlı hareket mantığıyla kurulur ki, bu özellikle ivmelerde hata yapma riskimizi azaltır.

**4- Daha düzenli ve karışık olmayan bir çözüm yolu** olarak hız ve ivmesi sıfır olan noktadan itibaren, tüm hareketleri yapan noktaya doğru ilerlenmelidir. Bu örnekte  $O \rightarrow A \rightarrow C$  sırası takip edilmelidir.

**5- Coriolis ivmesinde kullanılacak olan açısal hız ( $\Omega$ ):** kayan noktanın üzerinde kaydığı cismin bağlı harekete dahil edilmeyen diğer hareketlerinden kaynaklı toplam açısal hızıdır.

Şimdi bu örneği çözelim..>>



**Çözüm:** C noktasının hızını 2 yolla bulabiliriz:

**1.Yol:** (Mutlak Hareket Mantığıyla Hız Hesabı)

Disk, her iki hareketi de yaptığı için toplam açısal hızı:

$$\vec{\omega}_{disk} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 = 12\vec{i} + 6\vec{k}$$

A noktasının mutlak hızı 1 nolu koldan bulunur.

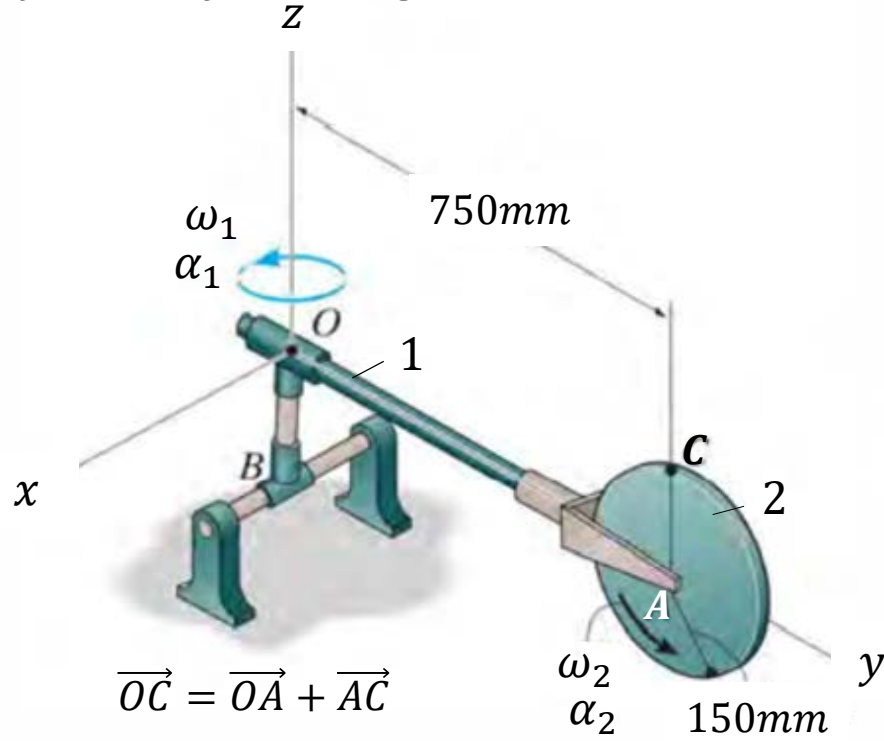
(A, diskin merkezinde olduğundan 2 nolu hareketten gelen bir hızı olmaz.)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} = 0 + 6\vec{k} \times 0.75\vec{j} \rightarrow \vec{v}_A = -4.5\vec{i}$$

C noktasının mutlak hızını şimdi 2 nolu diskin mutlak hareketinden bulalım:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{disk} \times \vec{AC} = -4.5\vec{i} + (12\vec{i} + 6\vec{k}) \times 0.15\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v}_C = -4.5\vec{i} - 1.8\vec{j}$$



Dikkat edilmesi gereken hususlar:

1-Bağıl hareketi sadece kayan nokta yapar.

2- Kayan nokta aynı zamanda diğer hareketleri de yapar.

Bu örnekte C noktası kayan nokta olup, her iki hareketi birden yaptığını fark edin. Bazı problemlerde 3 farklı hareket olma durumu söz konusudur. Bunun için vantilötör paleti örneğini (video 3.3) seyredebilirsiniz.

(videolara mehmetzor.com sitesinden erişebilirsiniz.)

**2.Yol:** (Bağıl Hareket Mantığıyla Hız Hesabı)

Disk  $\omega_2$  bağımsız dönme hareketini bağıl hareket gibi düşünebiliriz:

Hız hesabı:

Bu durumda C noktası 1 nolu dönen kol üzerinde kayan bir noktadır.

Bir an için  $\omega_2$  hareketinin durdursaydık, C ile aynı koordinatlardaki P noktasının hızı:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC}$$

C'nin ilaveten  $\omega_2$  den kaynaklı P'ye göre hızı olur ki bu bağıl hızıdır:

$$\vec{v}_{C/P} = \vec{v}_{bağ} = \vec{\omega}_2 \times \vec{AC}$$

$$\vec{v}_{bağ} = 12\vec{i} \times 0.15\vec{k} = -1.8\vec{j}$$

C'nin mutlak hızı:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{v}_{bağ} \rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC} + \vec{v}_{bağ}$$

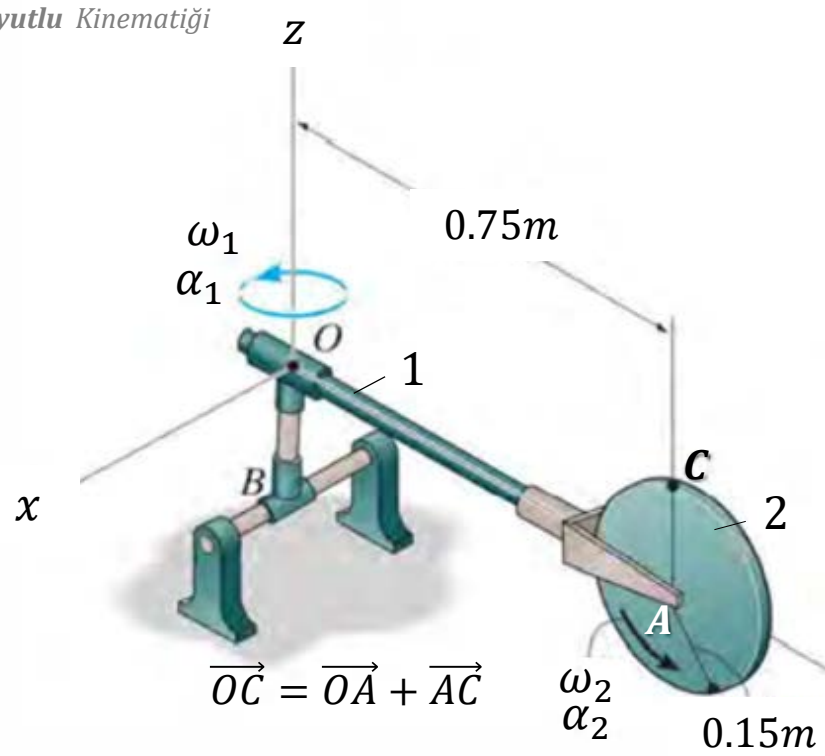
A noktasının 1 nolu koldan mutlak hızı:  
(1 nolu kol sadece  $\omega_1$  hareketini yapıyor):

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC} + \vec{v}_{bağ}$$

$$= \vec{\omega}_1 \times (\vec{OA} + \vec{AC}) + \vec{v}_{bağ} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{OC}) + \vec{v}_{bağ}$$

$$= 6\vec{k} \times (0.75\vec{j} + 0.15\vec{k}) + 12\vec{i} \times 0.15\vec{k} \rightarrow \vec{v}_C = -4.5\vec{i} - 1.8\vec{j} \quad \text{Aynı sonuç}$$



## 2.Yol'dan : İvme hesabı:

$$\vec{a}_C = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{AC})}_{\vec{a}_p} + \underbrace{\vec{a}_{bağ}}_{\vec{a}_{C/p}} + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_p + \vec{a}_{C/p} + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \times \vec{OA} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OA})$$

$$\vec{a}_{bağ} = \vec{\alpha}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) \quad ; \quad \vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{bağ}$$

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha}_1 \times \vec{OA} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OA}) + \vec{\alpha}_1 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{AC}) + \vec{\alpha}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{bağ}$$

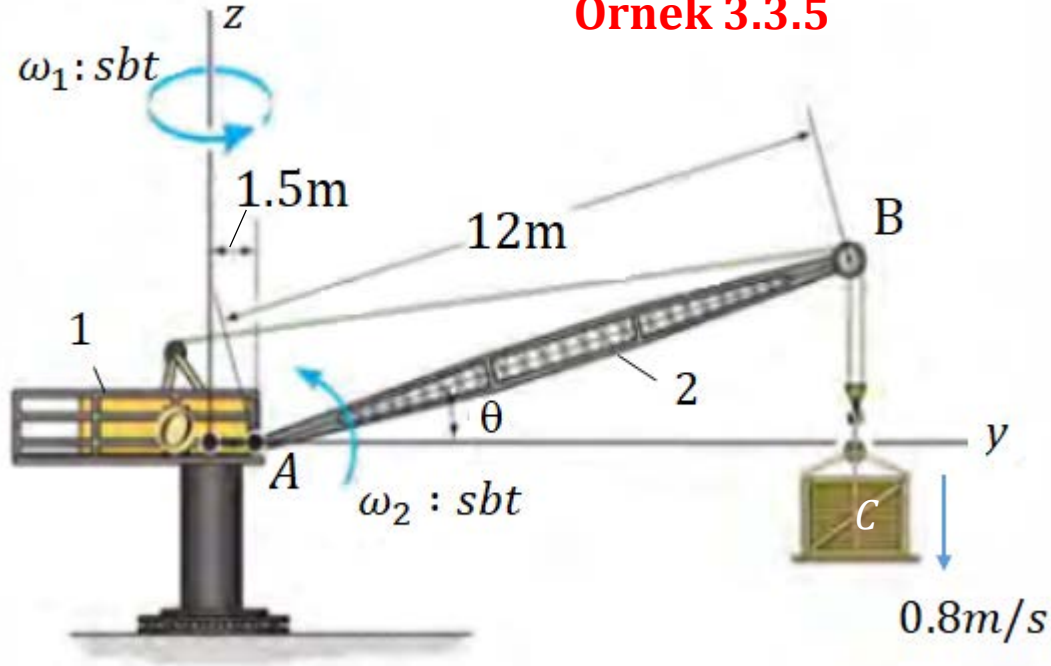
$$\vec{a}_C = \vec{\alpha}_1 \times (\vec{OA} + \vec{AC}) + \vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_1 \times (\vec{OA} + \vec{AC})] + \vec{\alpha}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{bağ}$$

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha}_1 \times \vec{OC} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OC}) + \vec{\alpha}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{bağ}$$

$$= 3\vec{k} \times (0.75\vec{j} + 0.15\vec{k}) + (6\vec{k}) \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0.75 & 0.15 \end{vmatrix} + 6\vec{i} \times 0.15\vec{k} + (12\vec{i}) \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{vmatrix} + 2(6\vec{k}) \times (-1.8\vec{j})$$

$$\vec{a}_C = -2.25\vec{i} - 27\vec{j} - 0.9\vec{j} - 21.6\vec{k} + 21.6\vec{i} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_C = 19.35\vec{i} - 27.9\vec{j} - 21.6\vec{k}$$

## Örnek 3.3.5



Bir vinç ucuna asılı bir C yükünü aşağıya doğru 0.8m/s lik sabit hızla indirmektedir. Bu sırada aynı anda vincin 1 nolu O merkezli gövdesi z eksenini etrafında, 2 nolu AB taşıyıcı çerçevesi x eksenini etrafından döndürülüyor. Gösterilen konumda,  $\theta = 30^\circ$ , açısal hızlar ise sabit olup değerleri  $\omega_1 = 1.5 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 0.5 \text{ rad/s}$ , yönleri ise şekildeki gibidir. Buna göre: BC=7m olduğu anda B noktasının ve C yükünün a-) mutlak hızlarını, b-) mutlak ivmelerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  Çözüm sırası takip edilmiştir.

Sabit nokta olduğu için O noktasının hız ve ivmesi sıfırdır.

A noktasının hızını 1 nolu cisimden buluruz:

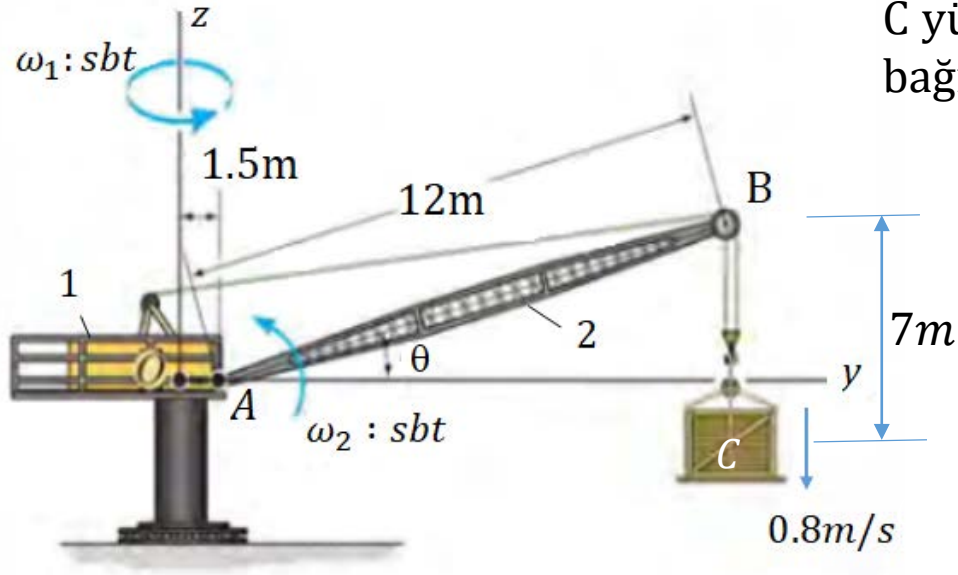
$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} = 1.5\vec{k} \times 1.5\vec{j} \rightarrow \vec{v}_A = -2.25\vec{i} \text{ m/s}$$

(2 nolu kol A etrafından döner ve bu hareketin A'nın hızına veya ivmesine bir katkısı olmaz)

AB kolu her iki dönme hareketini birden yapar:  $\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \rightarrow \vec{\omega}_{AB} = 1.5\vec{k} + 0.5\vec{i}$

B'nin hızını, mutlak hareket çözüm mantığıyla elde ederiz:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} = -2.25\vec{i} + (1.5\vec{k} + 0.5\vec{i}) \times 12(\cos 30^\circ \vec{j} + \sin 30^\circ \vec{k}) \\ &= -2.25\vec{i} - 15.58\vec{i} + 5.2\vec{k} - 3\vec{j} \rightarrow \vec{v}_B = -17.83\vec{i} - 3\vec{j} + 5.2\vec{k} \end{aligned}$$



C yükünün hızını, bağıl hareket ile çözmemiz gerekir. C yükü 0.8m/s lik bir bağıl hıza sahiptir. O halde C, dönen bir cismin üzerinde kayan bir noktadır.

$$\vec{v}_{C/B} = \vec{v}_{bağ_c} = -0.8\vec{k}:sabit \rightarrow \vec{a}_{C/B} = \vec{a}_{bağ_c} = 0$$

$$\vec{\omega}_{BC} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 1.5\vec{k} + 0.5\vec{i}$$

$$\vec{v}_c = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC} + \vec{v}_{bağ_c}$$

$$\rightarrow \vec{v}_c = -17.83\vec{i} - 3\vec{j} + 5.2\vec{k} + (1.5\vec{k} + 0.5\vec{i}) \times (-7\vec{k}) - 0.8\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v}_c = -17.83\vec{i} - 3\vec{j} + 5.2\vec{k} + 3.5\vec{j} - 0.8\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{v}_c = -17.83\vec{i} + 0.5\vec{j} + 4.4\vec{k} \quad m/s$$

**b-)** B ve C noktasının ivmelerini bağıl hareket çözüm mantığıyla bulacağız:

B noktasının ivmesini bulmak için  $\omega_2$  hareketini bağıl hareket gibi düşüneceğiz.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OA}) = 0 + 0 + 1.5\vec{k} \times (1.5\vec{k} \times 1.5\vec{j}) \rightarrow \vec{a}_A = -3.375\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}) + \vec{a}_{bağ_B} + \vec{a}_{cor_B}$$

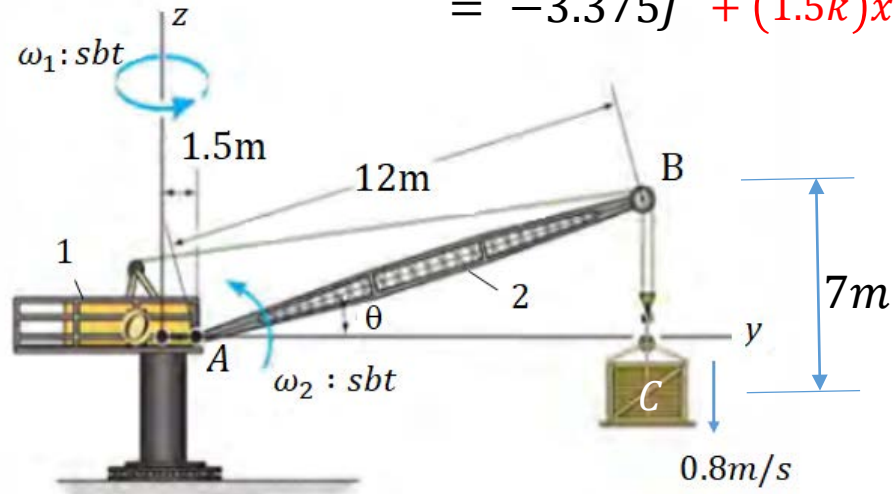
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}) + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB}) + 2(\vec{\Omega}_B \times \vec{v}_{bağ_B})$$

$$\vec{v}_{bağ_B} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = (0.5\vec{i}) \times (10.39\vec{j} + 6\vec{k}) = 5.19\vec{k} - 3\vec{j}$$

B kayan noktasının üzerinde kaydığı AB cisminin bağıl harekete dahil edilmemiş diğer hareketlerinden kaynaklı açısal hızı sadece  $\omega_1$  dir. Bu sebeple  $\Omega_B = \omega_1$  alınır.

..>>





$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_{BC}$$

C noktasının ivmesini bulmak için ise yükün düşey hızını bağıl hareket olarak düşüneceğiz:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{BC} + \vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times \vec{BC}) + \vec{a}_{bağC} + \vec{a}_{corC} , \\ &= +9\vec{i} - 29.345\vec{j} - 1.5\vec{k} + (0.5\vec{i} + 1.5\vec{k}) \times [(0.5\vec{i} + 1.5\vec{k}) \times (-7\vec{k})] + (2)(0.5\vec{i} + 1.5\vec{k}) \times (-0.8\vec{k}) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_C = +9\vec{i} - 29.345\vec{j} - 1.5\vec{k} + (0.5\vec{i} + 1.5\vec{k}) \times [3.5\vec{j}] + 0.8\vec{j} \rightarrow \vec{a}_C = 3.75\vec{i} - 28.54\vec{j} + 0.25\vec{k}$$

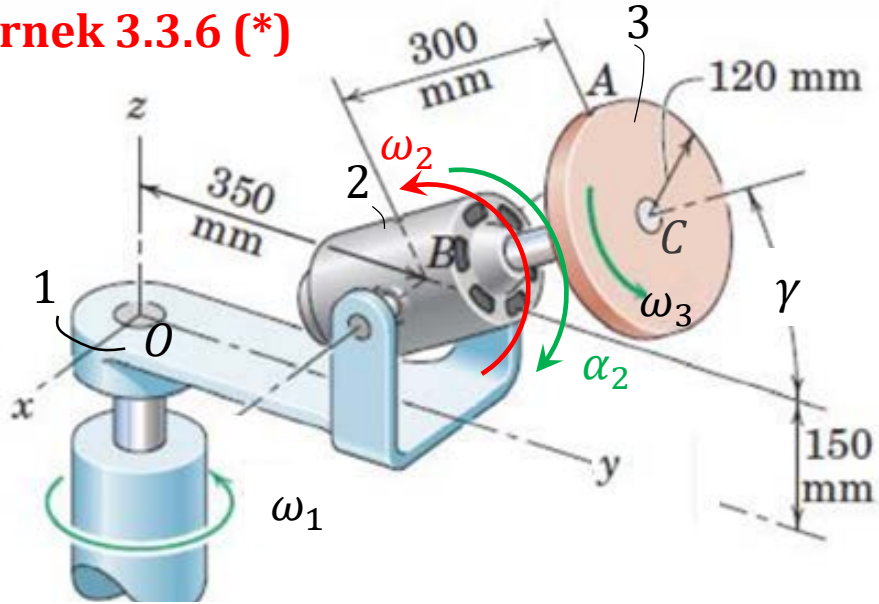
$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{AB}) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AB}) + 2(\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{bağB}) \\ &= -3.375\vec{j} + (1.5\vec{k}) \times [(1.5\vec{k})(10.39\vec{j} + 6\vec{k})] + (0.5\vec{i}) \times [(0.5\vec{i}) \times (10.39\vec{j} + 6\vec{k})] + (2)(1.5\vec{k}) \times (5.19\vec{k} - 3\vec{j}) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_B = -3.375\vec{j} + (1.5\vec{k}) \times (-15.58\vec{i}) + (0.5\vec{i}) \times (-3\vec{j} + 5.19\vec{k}) + 9\vec{i}$$

$$\vec{a}_B = -3.375\vec{j} - 23.37\vec{j} - 1.5\vec{k} - 2.6\vec{j} + 9\vec{i}$$

$$\rightarrow \vec{a}_B = +9\vec{i} - 29.345\vec{j} - 1.5\vec{k}$$

C kayan noktasının üzerinde kaydığı AB cisminin bağıl harekete dahil edilmemiş diğer hareketlerinden kaynaklı toplam açılal hızdır:  $\vec{\Omega}_C = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$  alınır.

**Örnek 3.3.6 (\*)**

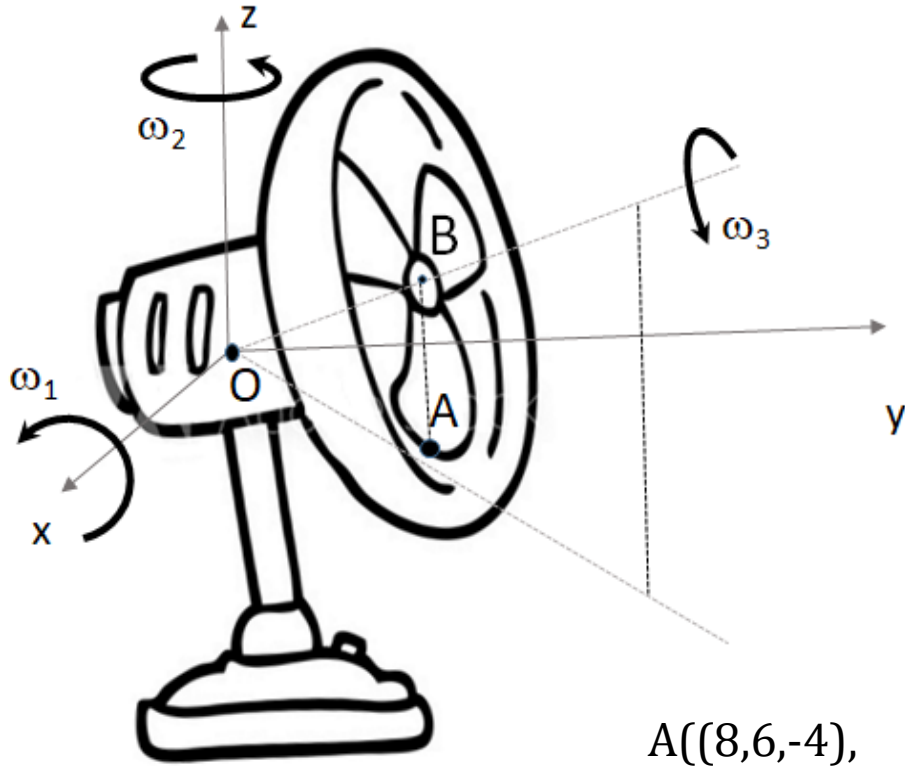
Bir motorun bağlı olduğu 1 nolu gövde, z eksenini etrafında  $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$  lik sabit açısal hızla dönerken, 2 nolu Motor B noktasından geçen x eksenine paralel eksen etrafında dönebilmektedir. Motor mili ve ona bağlı 3 nolu disk ise  $\omega_3 = 8 \text{ rad/s}$  lik sabit açısal hızla BC eksenini etrafında dönmektedir. Gösterilen konumda  $\gamma = 30^\circ$ ,  $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_2 = -0.5 \text{ rad/s}^2$  olduğuna göre Bu konum için diskin A üst noktasının mutlak hız ve mutlak ivmesini hesaplayınız.

Cevaplar: 
$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_A &= -0.69\vec{i} - 0.25\vec{j} + 0.2\vec{k} \\ \vec{a}_A &= 0.76\vec{i} + 4.45\vec{j} - 7\vec{k} \end{aligned} \right\}$$









A((8,6,-4),

B(8, 6, 2)

$\omega_1 = 4 \text{ rd/s}$ ,

$\omega_2 = 2 \text{ rd/s}$ ,

$\omega_3 = 10.2 \text{ rd/s}$

$\vec{v}_A = ?$

$\vec{a}_A = ?$

### ÖRNEK Soru 3.3.7 [\[video 3.3b – örnek 3.8\]](#)

Şekildeki masa vantilatörü, x ve z eksenlerinde bağımsız dönmesinin yanısıra, pervane kısmı OB ekseninde dönebilmektedir.

$\omega_1 = 4 \text{ rd/s}$ ,  $\omega_2 = 2 \text{ rd/s}$ ,  $\omega_3 = 10.2 \text{ rd/s}$  lik sabit açısal hızlarla vantilatör dönerken, sağdaki şekilde gösterilen konum için Pervane paleti üzerindeki A noktasının mutlak hız ve mutlak ivmesini hesaplayınız. Koordinatlar: A((8,6,-4), B(8, 6, 2)

**Cevaplar:**

$$\vec{v}_A = -48\vec{i} + 80\vec{j} + 24\vec{k}$$

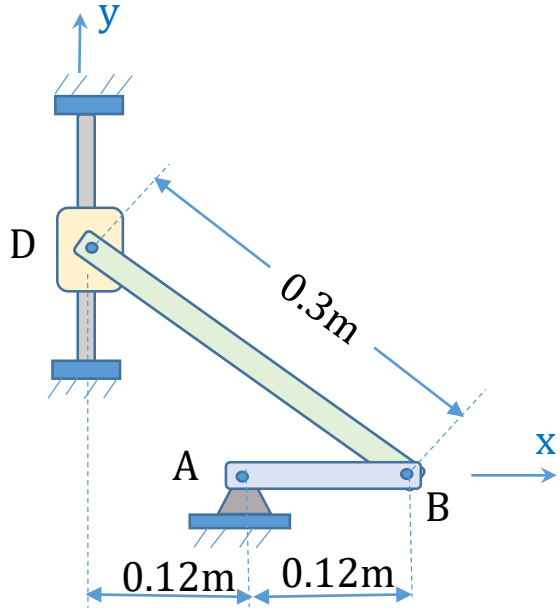
$$\vec{a}_A = -352\vec{i} - 336\vec{j} + 1112\vec{k}$$

# 3.4

## 3.Bölüm (Rijid Cisim Kinematığı)

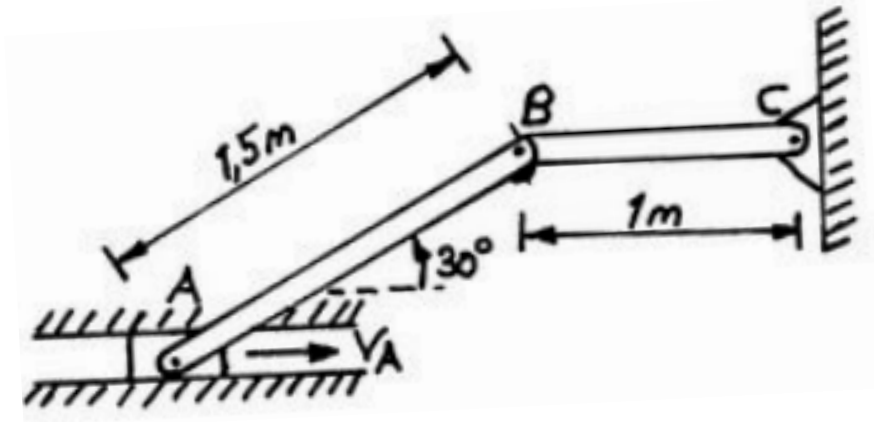
ile İlgili

Cevaplı Sınav Soruları



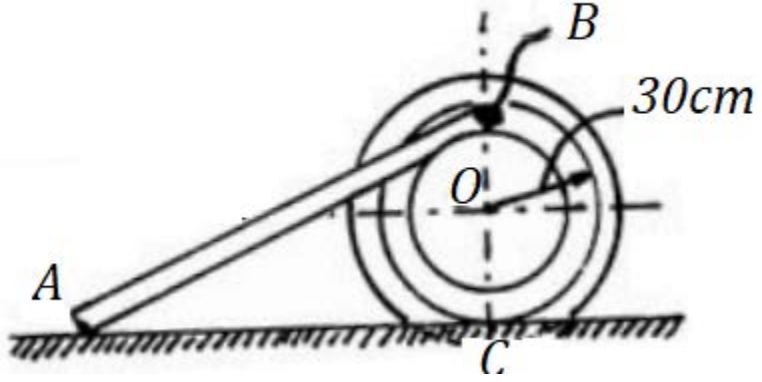
**Soru 3.4.1 )** AB krankı saat ibreleri tersi yönünde 30 rd/s sabit açısal hızı ile dönmekte; D bileziği düşey sabit çubuk üzerinde kayabilmektedir. Gösterilen anda a-) BD çubuğunun açısal hızını ve D bileziğinin hızını bulunuz, b-) BD çubuğunun açısal ivmesini ve D bileziğinin ivmesini bulunuz.

**(Cevaplar:** a-)  $\omega_{BD} = 0$  ,  $v_D = 3.6m/s$  , b-)  $\alpha_{BD} = 600 \text{ rad/s}^2$  ,  $a_D = 144m/s^2$



**Soru 3.4.2 )** Şekildeki sistemde A kayar elemanının sağa doğru 3 m/sn lik hızı ve  $1,5 \text{ m/s}^2$  lik ivmesi vardır. Gösterilen konum için AB çubuğunun açısal hızını ve açısal ivmesini hesaplayınız.

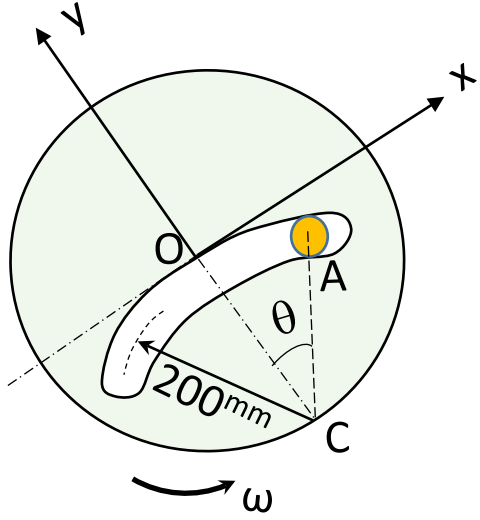
**Cevaplar:**  $\omega_{AB} = 4 \text{ rad/s}$  ,  $\alpha_{AB} = 10.32 \text{ rad/s}^2$



**Soru 3.4.3 )** Şekilde görülen tekerlek sağa doğru 120 cm/sn lik sabit bir hızla kaymadan yuvarlanıyor. C noktası tekerleğin raylara temas eden noktasıdır. AB çubuğunun boyu 120 cm dir ve B noktasından tekerleğe bağlıdır. AB nin açısal hızını ve A noktasının hızını şekildeki konum için hesaplayınız.

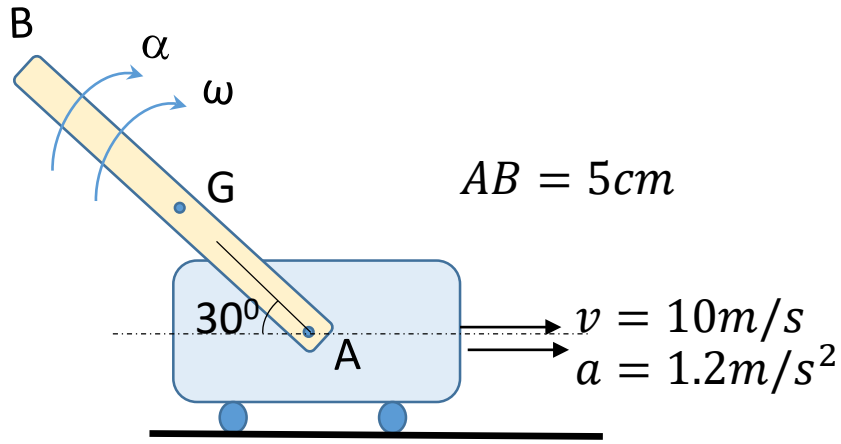
**(Cevaplar:  $\omega_{AB} = 0$  ,  $v_A = 240 \text{ cm/s}$ )**



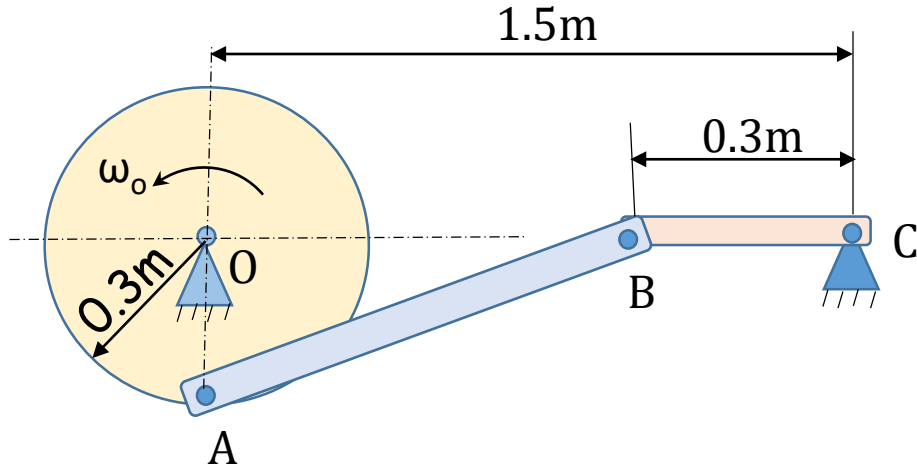


**Soru 3.4.4 )** Yatay düzlemdeki bir disk kendi O merkezi etrafında  $\omega = 15 \text{ rad/s}$  lik sabit açısal hız ile dönmektedir. A bilyesi ise diskin üzerine açılmış C merkezli 200mm yarıçaplı yay şeklindeki kanal içine yerleştirilmiştir. Bilye kanal içerisinde serbestçe hareket edebilmektedir. A bilyesi O noktasından geçerken  $\dot{\theta} = 12 \text{ rad/s}$  ve  $\ddot{\theta} = 0$  ise, A bilyesinin bu andaki mutlak ivmesini hesaplayınız. (**Cevap:**  $\vec{a}_A = 43.2 \vec{j} \text{ mm/s}^2$ )

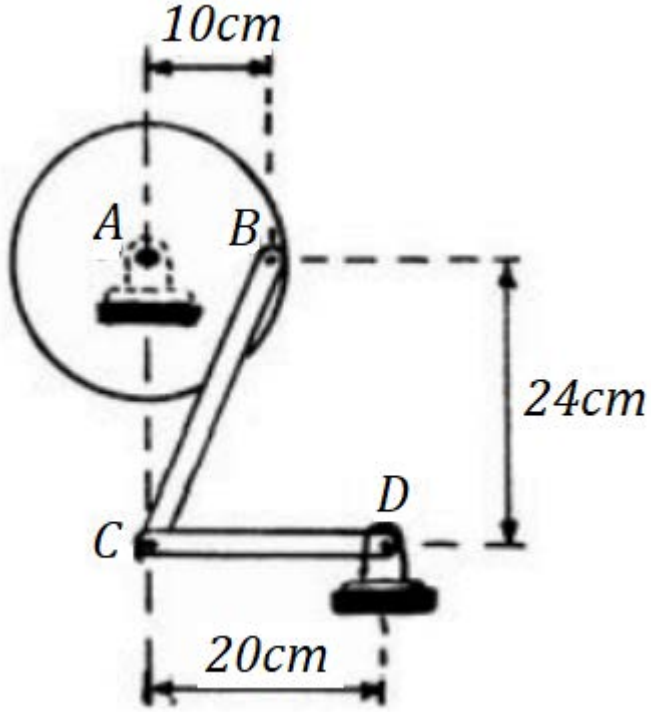




**Soru 3.4.5 )** Bir araba sağa doğru  $1.2 \text{ m/s}^2$  lik ivme ile hareket ederken gösterilen anda hızı sağa doğru  $10 \text{ m/s}$  dir. Arabaya mafsallanmış AB kolu A noktası etrafında dönebilmektedir ve gösterilen anda saat ibreleri yönünde  $\omega = 5 \text{ rd/sn}$  ve  $\alpha = 20 \text{ rd/sn}^2$  lik açısal hız ve açısal ivmeyle sahiptir. Şekilde gösterilen konum için B noktasının hızını ve G noktasının ivmesini bulunuz. **(Cevaplar:  $\vec{v}_B = 22.5\vec{i} + 21.65\vec{j}$  ,  $\vec{a}_G = 80.325\vec{i} + 12.05\vec{j}$  )**



**Soru 3.4.6 )** Şekildeki mekanizmada O diski  $\omega_0=2$  rad/s lik sabit açısal hızla saat ibreleri tersi yönünde döndürülmektedir. Gösterilen konum için AB ve BC çubuklarının açısal hızlarını ve açısal ivmelerini hesaplayınız.



**Soru 3.4.7 )** Şekilde verilen konumda diskin açısal hızı saat ibreleri yönünde 8 rad/sn ve açısal ivmesi ise saat ibreleri ters yönünde 30 rd/sn<sup>2</sup> dir. Bu an için,

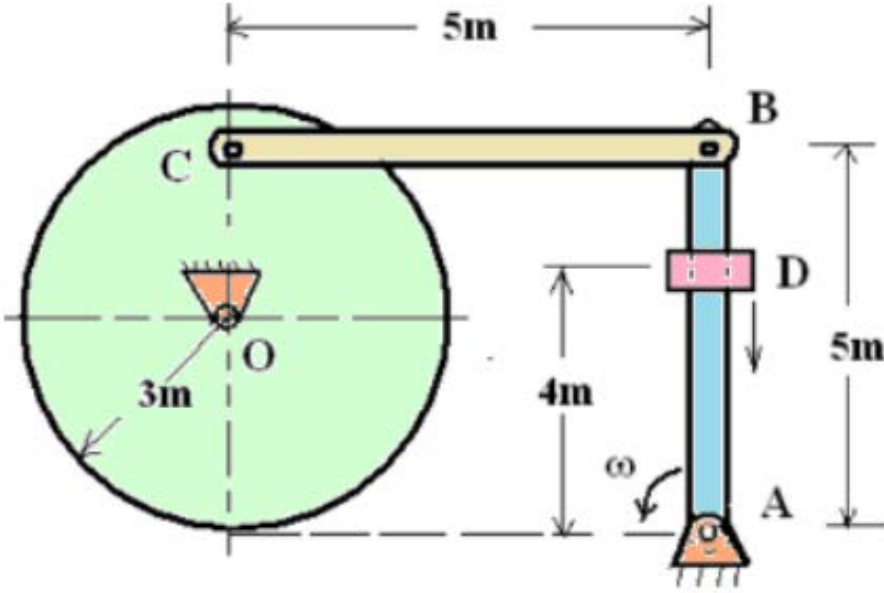
a-) Her iki çubuğun açısal hızlarını ve C noktasının hızını;

b-) Her iki çubuğun açısal ivmelerini ve C noktasının ivmesini bulunuz.

Cevaplar:

a-)  $\omega_{BC} = 0$  ,  $\omega_{CD} = 4 \text{ rad/s}$ ,  $v_C = 80j \text{ cm/s}$

b-)  $\alpha_{BC} = 40 \text{ rad/s}^2$  ,  $\alpha_{CD} = 5 \text{ rad/s}^2$ ,  $a_C = 320i - 100j \text{ ( cm/s}^2 \text{ )}$

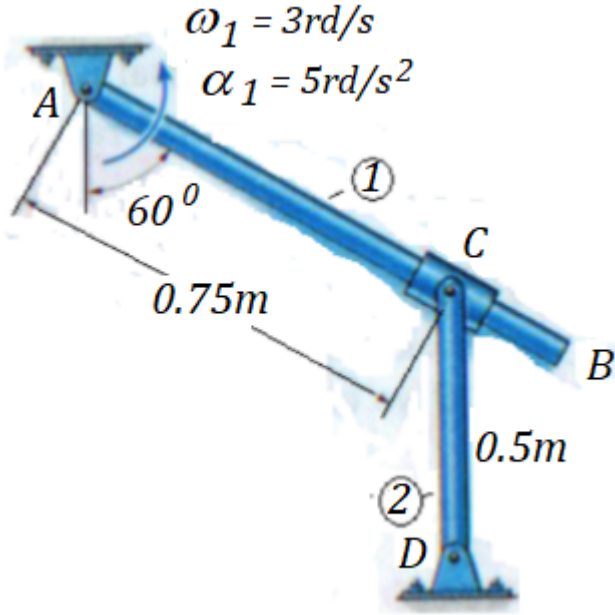
**Soru 3.4.8**

Şekildeki mekanizmada AB kolunun açısal hızı ( $\omega$ ) saat ibreleri tersi yönünde, sabit ve  $4\text{rd/sn}$  şiddetindedir. Şekildeki konum için,

a-) CB kolunun ve O merkezli silindirin açısal hızlarını bulunuz.

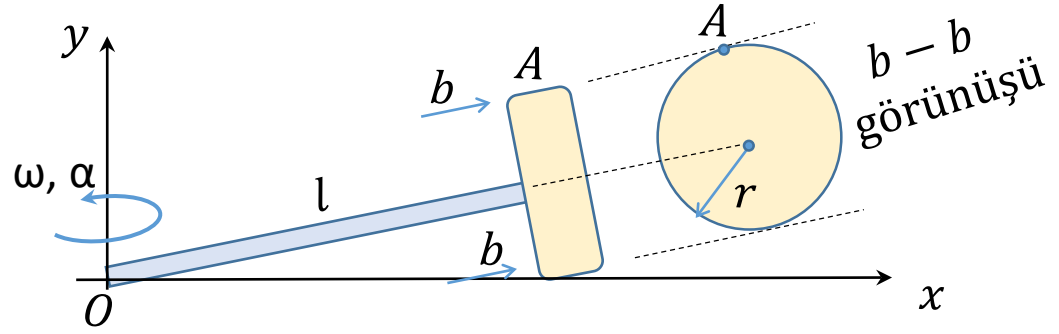
b-) AB kolu üzerine takılmış olan D bileziğinin hızı görülen konumda aşağıya doğru sabit ve  $5\text{m/s}$  ise, D bileziğinin mutlak hız ve mutlak ivmesini hesaplayınız.

Cevaplar: a-)  $\omega_{BC} = 0$  ,  $\omega_O = 10\text{rad/s}$  b-)  $\vec{v}_D = -16\vec{i} - 5\vec{j}$ ,  $\vec{a}_D = 40\vec{i} - 64\vec{j}$



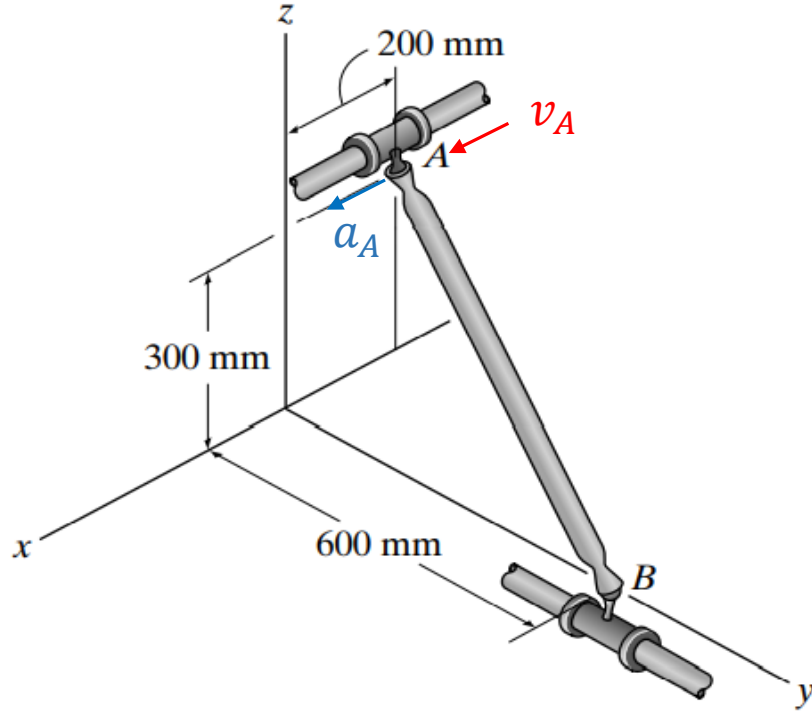
### Soru 3.4.9 )

Şekildeki mekanizmada, gösterilen konumda 1 nolu AB çubuğunun açısal hızı ve açısal ivmesi saat ibreleri tersi yönünde sırasıyla  $3\text{rd/s}$  ve  $5\text{rd/s}^2$  dir. Bu konum için 2 nolu CD çubuğunun açısal hızını ve açısal ivmesini hesaplayınız. (C bileziği 2 nolu kola bağlı olup, 1 nolu kol üzerinde serbestçe kayabilmektedir.)  
 (Cevap:  $\omega_2 = -8.95\text{ rad/s}$  ,  $\alpha_2 = 249\text{ rad/s}^2$  )



**Soru 3.4.10 )** Bir ucuna tekerlek bağlanmış OC çubuğu y eksenini etrafında  $\omega$  açısal hızı ve  $\alpha = 0,5 \text{ rd/s}^2$  açısal ivmesi ile döndürülmektedir.  $\omega = 1 \text{ rd/s}$  olduğu anda A noktasının mutlak hızını ve ivmesini bulunuz. ( $r=10\text{cm}$ ,  $l=0.5\text{m}$ )

(Cevap:  $\vec{a}_A = -0.97\vec{i} - 2.6\vec{j} - 0.495\vec{k}$ )



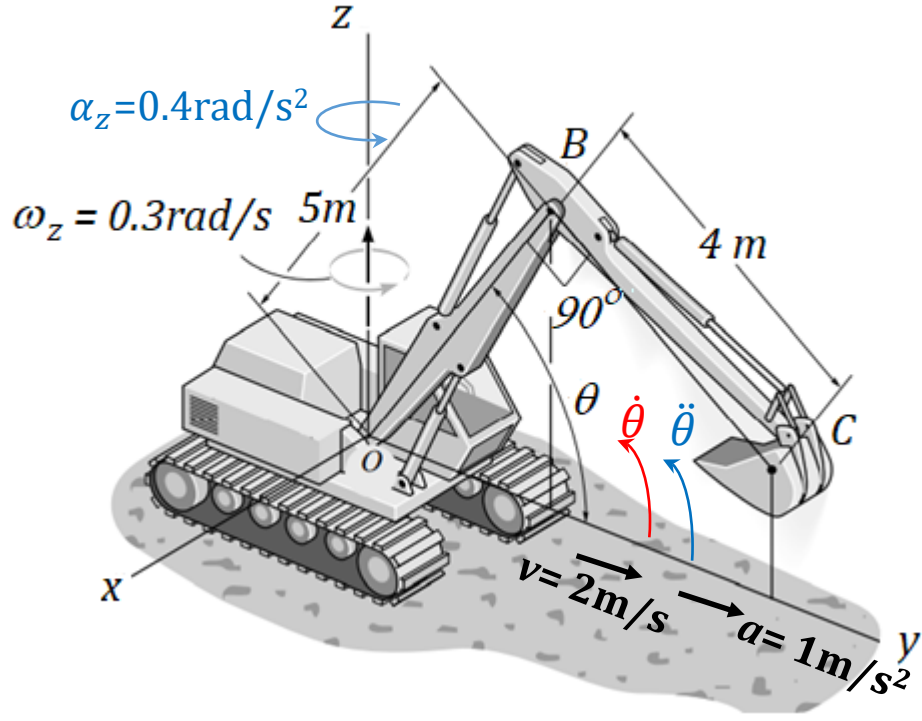
### Soru 3.4.11 )

Şekildeki mekanizmada, AB çubuğu, x ve y eksenlerine paralel olan sabit çubuklar üzerindeki kayar elemanlara küresel mafsallarla bağlanmıştır. Gösterilen konumda A kayar elemanın hızı 3m/s ve ivmesi  $0.5\text{m/s}^2$  dir ve her ikisi de +x yönündedir. Bu anda

a-) AB çubuğunun açısal hız ve ivmesini b-) B kayar elemanın hız ve ivmesini hesaplayınız.

(AB çubuğunun açısal hızı ve açısal ivmesini çubuğa dik kabul ediniz.)

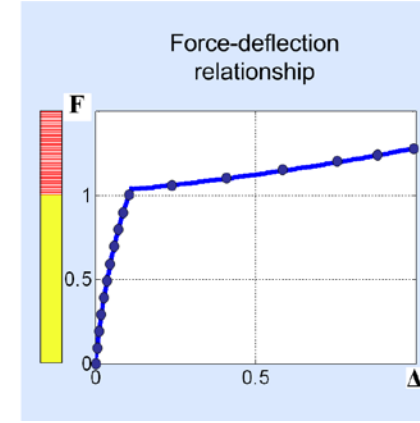
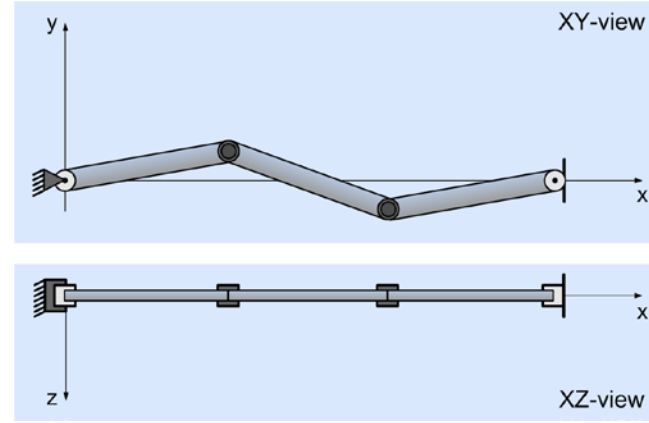
Cevap: **a-)**  $\vec{\omega}_{AB} = 0.612\vec{i} + 1.837\vec{j} + 4.082\vec{k}$  ;  $\vec{\alpha}_{AB} = -10.102\vec{i} + 0.306\vec{j} - 6.122\vec{k}$     **b-)**  $\vec{v}_B = 1\vec{j}$  (m/s) ,  $a_B = -16.5\vec{j}$  (m/s<sup>2</sup>)

**Soru 3.4.12 )**

Şekildeki iş makinası gösterilen anda, +y yönünde 2m/s lik hız ve 1m/s<sup>2</sup> lik ivme ile giderken, kabin kısmı z eksenini etrafında  $\omega_z=0.3\text{rad/s}$  açısal hızı ve  $\alpha_z=0.4\text{rad/s}^2$  açısal ivmesi ile dönmektedir. Aynı anda vinç kolu  $\theta = 60^\circ$  konumunda olup, bu açı  $\dot{\theta} = 0.6\text{rad/s}$ , lik açısal hızla ve  $\ddot{\theta} = 0.2\text{rad/s}^2$  lik hızla artmaktadır. Bu an için kepçenin ucundaki C noktasının mutlak hız ve ivmesini hesaplayınız.

Cevap:  $\vec{v}_C = -1.79\vec{i} + 0.602\vec{j} + 3.58\vec{k}$  (m/s);  $\vec{a}_C = -1.55\vec{i} - 2.15\vec{j} + 0.354\vec{k}$  (m/s<sup>2</sup>)





# 4. RİJİD CİSİMLERİN DÜZLEMSEL KİNETİĞİ

(Mekanizmalarda Hareketin Sebepleri)

*Bölüm Sonundaki 4.3 nolu kısımda tüm bölüm konularıyla ilgili **Cevaplı Sınav Soruları** mevcuttur.*

## Rijid Cisim Kinetiği ile İlgili Genel Açıklamalar

### Bu bölümde Amacımız,

Rijid cisimlerde hareketin sebepleri olan dış kuvvetleri de hesaba katarak, bir  $t$  anında

- cismin açısal hızını, açısal ivmesini veya
- herhangi bir noktasının hız, ivme, konumunu veya
- dış yüklerden bilinmeyenleri

belirleyecek yöntemleri göstermek ve örnek problemlerle konuları pekiştirmektir.

Temel denklemimiz yine  $F=ma$  newtonun 2nci kanunudur.

- Maddesel nokta kinetiğinde kullanılan aşağıdaki 3 yöntem rijid cisim kinetiğinde de aynen kullanılır. Ancak rijid cisim kinetiğinde kuvvetlerin moment etkisi ile ilgili olacak şekilde herbir yöntem için ek denklemler gelecektir.

**1.Yöntem:** D'Alembert prensibi ile  $F=ma$  denkleminin doğrudan uygulanması: Bu yöntemde cismin ivmesi doğrudan hesaba katılarak çözümler yapılır. Özellikle dış kuvvetlerin veya ivmenin belirgin olduğu problemlerde tercih edilir.

**2. Yöntem:** İş-Enerji Yöntemi: İvmenin belli olmadığı veya sorulmadığı problemlerde daha çok tercih edilen yöntemdir.

**3.Yöntem:** İmpuls\_momentum Yöntemi: Özellikle dış kuvvetlerin zamanla değiştiği problemlerde veya çarpışma problemlerinde tercih edilir. İvmeyi hesaplamamıza gerek kalmadan sonuca gidebiliriz. (Bu konu notlara ileride dahil edilecektir.)

Bu notlarda düzlemsel hareket için ilk iki yöntem örneklerle anlatılmıştır. Şimdi bu yöntemleri incelemeye başlıyoruz.. >>

RİJİD CİSİM DÜZLEMSEL KİNETİĞİ

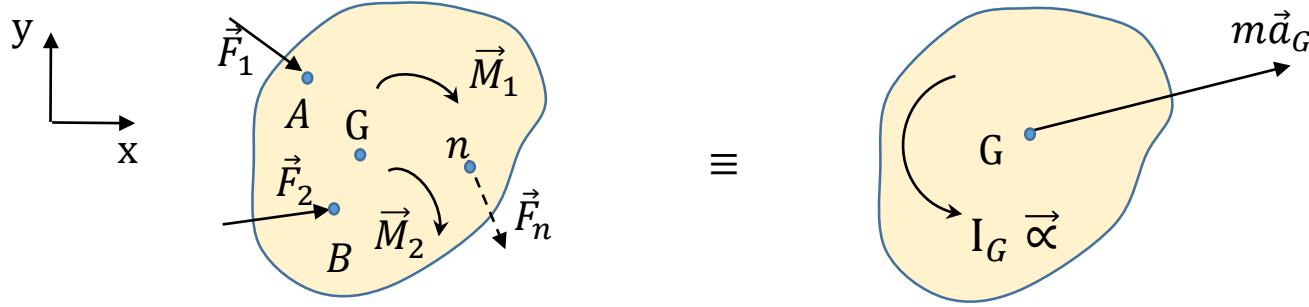
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

# 4.1 Denklemimin Rijid Cisimlere Doğrudan Uygulaması (D'Alembert Prensibi)

## 4.1 Newton 2.kanunu ( $F = ma$ ) Denkleminin Rijid Cisimlere Doğrudan Uygulanması

**D’alembert Prensibine göre** bir  $t$  anında rijid cisme etki eden dış kuvvetler, efektif kuvvetlere eşitlenir. Maddesel noktadan farklı olarak Dış kuvvetlerin momentlerinin eşitlendiği efektif kuvvetler ( $I\alpha$ ) ek denklemler olarak yazılır. Hareket x-y düzleminde ve dönme eksenini düzleme dik olan z eksenidir. G: Cismin ağırlık merkezidir.

Dış kuvvetler sistemi  $\equiv$  Efektif kuvvetler sistemi



$I_G$  = G’den geçen z dönme eksene göre kütle atalet momentidir. (diğer sayfada açıklanmıştır..)

2 bağımsız  
Vektörel  
Denklem



$$\Sigma \vec{F}$$

$$\Sigma \vec{M}_G$$

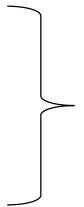
=

$$m\vec{a}_G \quad (\text{D.4.1})$$

=

$$I_G \vec{\alpha} \quad (\text{D.4.2})$$

3 bağımsız  
Skaler  
Denklem



$$\Sigma F_x$$

$$\Sigma F_y$$

$$\Sigma M_z$$

=

$$ma_{G_x} \quad (\text{D.4.3})$$

=

$$ma_{G_y} \quad (\text{D.4.4})$$

=

$$I_G \alpha \quad (\text{D.4.5})$$

Denklemlerin daha açık ifadeleri:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n = m\vec{a}_G$$

$$\overrightarrow{GA} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{GB} \times \vec{F}_2 + \dots \overrightarrow{Gn} \times \vec{F}_n + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots = I_G \vec{\alpha}$$

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots F_{nx} = ma_{G_x}$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots F_{ny} = ma_{G_y}$$

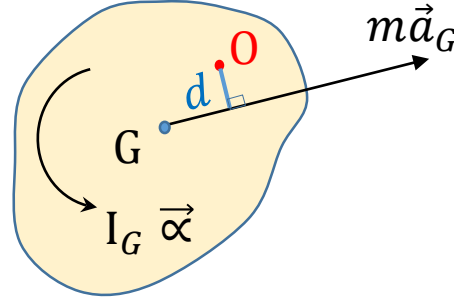
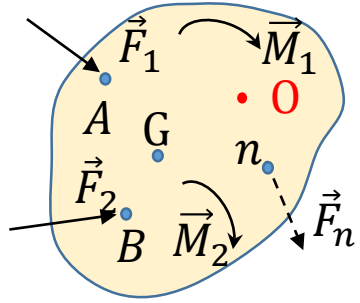
$$d_1 \cdot F_{1y} + d_2 \cdot F_{2y} + \dots d_n \cdot F_{ny} = I_G \alpha$$

(Pozitif yönler eşitliğin her iki tarafında da aynıdır.)

### 4.1.1 Başka Bir Noktaya Göre Moment:

Dış kuvvetlerin O gibi herhangi bir noktaya göre momenti alınabilir. Bu durumda, kuvvet denklemleri değişmez ancak moment denklemlerinde aşağıdaki gibi değişiklik olur.

Dış kuvvetler sistemi  $\equiv$  Efektif kuvvetler sistemi



Vektörel

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_G \\ \Sigma \vec{M}_O = I_O \vec{\alpha} = I_G \vec{\alpha} + \vec{OG} \times m \vec{a}_G \end{array} \right. \quad (D.4.6)$$

Skaler

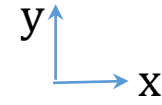
$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = m a_{Gx} \\ \Sigma F_y = m a_{Gy} \\ \Sigma M_{z-O} = I_O \alpha = I_G \alpha + d \cdot m a_G \end{array} \right. \quad (D.4.7)$$

dik uzaklık

( $I_O$  : O noktasından geçen dik eksene göre kütle atalet momentidir.)

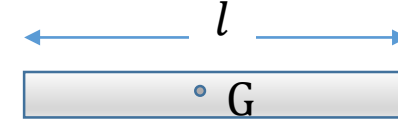
### 4.1.2 Kütle Atalet Momenti:

$I_G$ : G ağırlık merkezinden geçen dik (z) eksenine göre kütle atalet momentidir. Cismin geometrisine göre değişir.



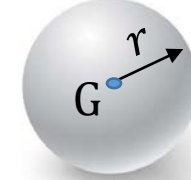
(m: cismin kütlesi)

Çubuk



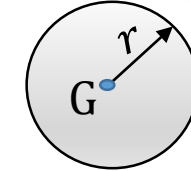
$$I_G = \frac{1}{12} m l^2 \quad (D.4.8)$$

Küre



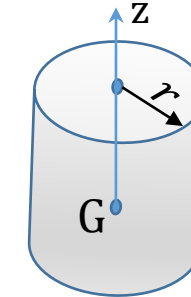
$$I_G = \frac{2}{5} m r^2 \quad (D.4.9)$$

Disk

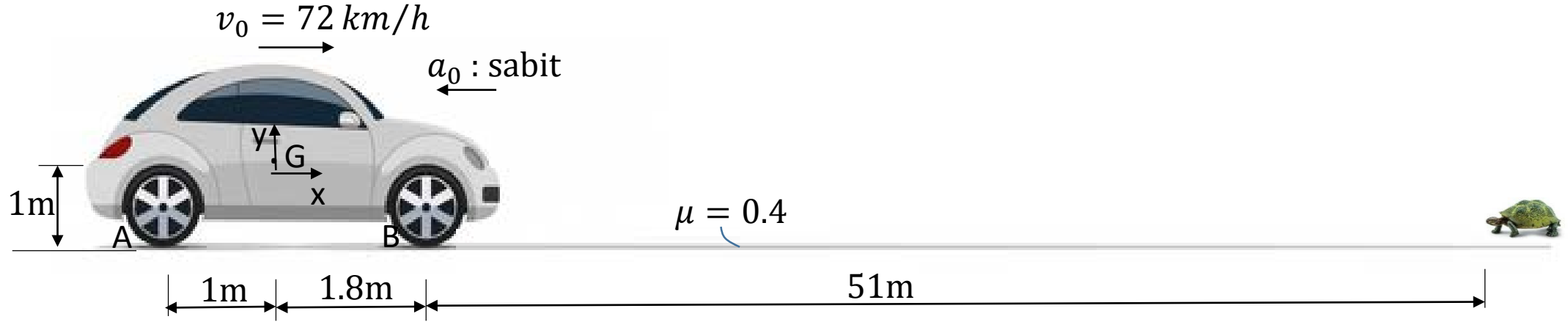


$$I_G = \frac{1}{2} m r^2 \quad (D.4.10)$$

Silindir



$$I_G = \frac{1}{2} m r^2 \quad (D.4.11)$$

**Örnek 4.1.1** ([video 4.1a - Örnek 4.1](#))

1 ton ağırlığındaki bir otomobil 72km/h sabit hızlı sürtünmeli ve düz bir yolda ilerlerken, sürücü 51metre ilerideki yol üzerinde durmakta olan bir kaplumbağayı fark edip aniden frene basıyor.

a-) Kaplumbağanın ezilmekten kurtulup kurtulamayacağını tespit ediniz.

b-) Tekerleklerden yere gelen normal kuvvetleri hesaplayınız. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Çözüm mantığı:** Araç sabit ivme ile yavaşlayacaktır. Eğer ivmesini bulursak, sabit ivmeli doğrusal hareket için geçerli olan zamansız hız formülünden, alınan s yolunu bulabiliriz. s değeri 51 metreden küçük ise kaplumbağa ezilmeyecektir.

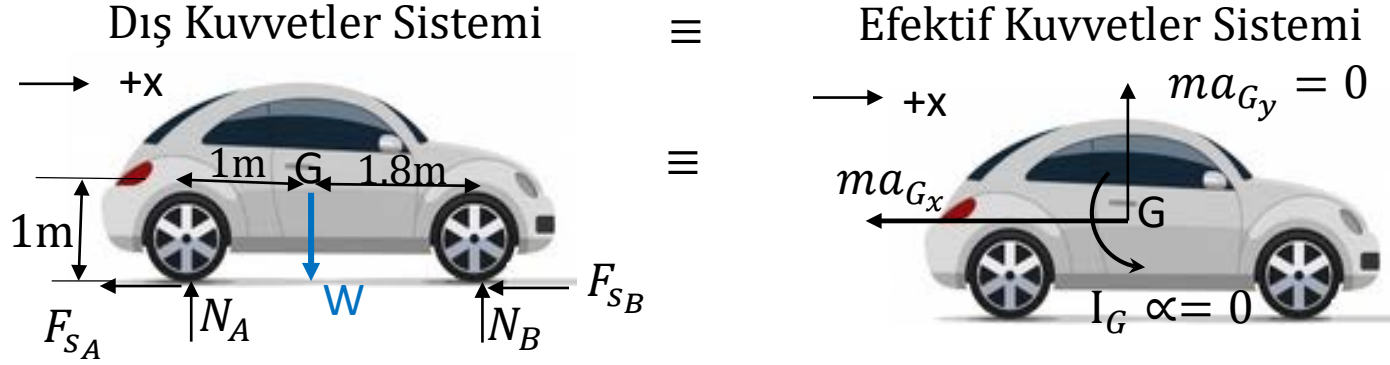
$$\text{İlk hız: } v_0 = 72 \times \frac{1000}{3600} = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{İlk konum } s_0 = 0$$

Durduğu andaki  
(Son) hız :  $v = 0$

(D. 1.9) denklemi  
Zamansız hız formülü:  $v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0)$

$a_0$  sabit ivmesinin bulunması:..>>



$$m=1 \text{ ton}=1000\text{kg}, \quad W=mg=10000\text{N}$$

$$y \text{ yönünden hareket olmadığından: } a_{G_y} = 0$$

$$\text{Otomobil } z \text{ ekseninde dönmediğinden: } \alpha = 0$$

$$\Sigma F_x = -ma_{G_x} \rightarrow -F_{SA} - F_{SB} = -ma_{G_x} \rightarrow -\mu N_A - \mu N_B = -ma_{G_x} \rightarrow -0.4(N_A + N_B) = -1000a_{G_x} \quad (I)$$

$$\Sigma F_y = ma_{G_y} = 0 \rightarrow N_A + N_B - W = 0 \rightarrow N_A + N_B = 10000\text{N} \quad (II)$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha = 0 \rightarrow -F_{SA} \cdot 1 - F_{SB} \cdot 1 - N_A \cdot 1 + N_B \cdot 1.8 = 0 \rightarrow -0.4(N_A + N_B) \cdot 1 - N_A \cdot 1 + N_B \cdot 1.8 = 0$$

$$\rightarrow -1.4N_A + 1.4N_B = 0 \quad (III)$$

**(I), (II) ve (III) denklemlerinden:**  $N_A = N_B = 5000\text{N}$  ve  $a_{G_x} = 4 \text{ m/s}^2$  bulunur.

Sola (-x yönünde) doğru olduğundan gerçekte  $a_{G_x} = -4 \text{ m/s}^2$  dir.

$$\text{Zamansız hız formülünden: } (a_0 = a_{G_x} = -4 \text{ m/s}^2) \rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0) \rightarrow 0 = 20^2 + 2(-4)s \rightarrow s = 50\text{m}$$

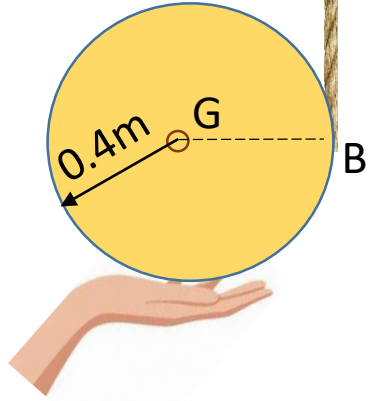
$s < 51\text{m}$  olduğundan  $\rightarrow$  Kaplumbağa ezilmez 😊

**Dikkat:**  $a_{G_x}$  'in + çıkması seçilen yönünün doğru olduğunu gösterir. Ancak - x yönünde olduğundan işareti gerçekte negatiftir. Yani  $a_{G_x} = -4 \text{ m/s}^2$  dir.  $a_{G_x}$  sağa doğru seçilseydi formülde - işareti olmayacak ve  $a_{G_x}$  negatif çıkacaktı.  $\Sigma F_x$  denkleminde  $ma_{G_x}$  in önüne «-» işareti koyduğumuz için  $a_{G_x}$  pozitif çıkmıştır.

**Pratik bir bilgi:** İşlemlerde işaret hatası yapmamak için bilinmeyen değerlerin yönlerini doğru tahmin etsek bile yine de + yönde seçeriz ve çıkan sonucu, işaretiyle birlikte işlemlerde aynen kullanabiliriz.

**Örnek 4.1.2** (video 4.1a - Örnek 4.2)

$g = 10 \text{ m/s}^2$



80N ağırlığında, 0.4m yarıçapındaki bir disk boşlukta tutan kişi, birden elini çekiyor ve tam o sırada diskin üzerine sarılmış ipe düşey yönde 120N luk bir P çekme kuvveti uygulanıyor. Buna göre bu anda,  
**a-)** diskin açısal ivmesi ve  
**b-)** ipin ivmesini hesaplayınız.

**Çözüm:** G'den geçen, düzleme dik eksene göre kütle atalet momentini hesaplayalım:

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{10} \cdot 0.4^2 \rightarrow I_G = 0.64 \text{ kg/m}^2$$

**a-)**Dış kuvvetler sistemi  $\equiv$  Efektif kuvvetler sistemi

$$\begin{aligned}
 \rightarrow +x \quad \Sigma F_x &= ma_{Gx} \\
 0 &= ma_{Gx} \rightarrow a_{Gx} = 0 \\
 +y \uparrow \Sigma F_y &= ma_{Gy} \\
 120 - 80 &= \frac{80}{10} a_{Gy} \rightarrow a_{Gy} = a_G = 5 \text{ m/s}^2 \\
 \Sigma M_G &= I_G \alpha \\
 P \times 0.4 &= 0.64 \alpha \\
 120 \times 0.4 &= 0.64 \alpha \rightarrow \alpha = 75 \text{ rd/s}^2
 \end{aligned}$$

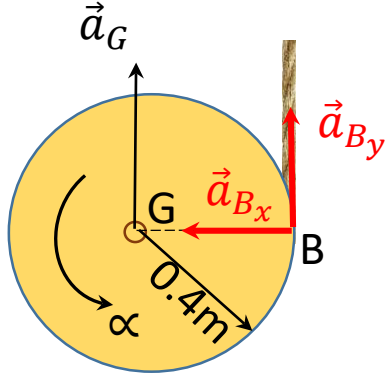


**b-)** B, disk ile ipin ortak noktasıdır.

İpin ivmesi B noktasının y yönündeki ivme bileşine eşit olur:

$$a_{ip} = a_{By}$$

O halde B nin ivmesini vektörel olarak bulmalıyız.



$$a_0 = a_G = a_{Gy} = 5 \text{ m/s}^2 \text{ bulunmuştur.}$$

+y yönünde olduğu için vektörel ifadesi:  $\vec{a}_G = 5\vec{j}$

**(t=0 anı için)**

### Kinematik Analiz

G ile B aynı cismin iki noktası olduğundan aralarında D.3.5 denklemi uygulanabilir.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{GB} - \omega^2 \vec{GB}$$

Harekete terk edildiği t = 0 anında diskin açısal hızı sıfırdır.  $\omega = 0$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{GB}$$

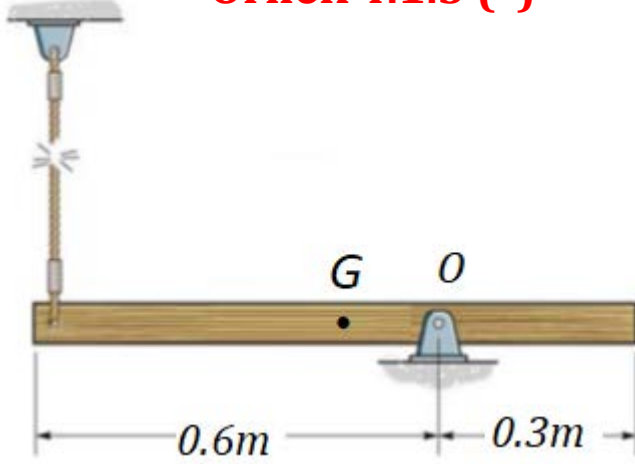
$$\vec{a}_B = 5\vec{j} + 75\vec{k} \times 0.4\vec{i}$$

$$\vec{a}_B = 5\vec{j} + 30\vec{j} = 35\vec{j} = \vec{a}_{By} \quad ; \quad \vec{a}_{Bx} = 0$$

$$\vec{a}_{ip} = \vec{a}_{By} = 35\vec{j}$$

$$a_{ip} = 35 \text{ m/s}^2$$

### Örnek 4.1.3 (\*)



Şekildeki 15kg kütleli çubuğa bağlı olan ip aniden kopuyor ve denge bozuluyor.

a-) İpin kopmasından hemen sonra çubuğun açısal ivmesini

b-) O sabit mafsalsındaki reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız.

Cevap: a-)  $\alpha = 16.35 \text{ rad/s}^2$

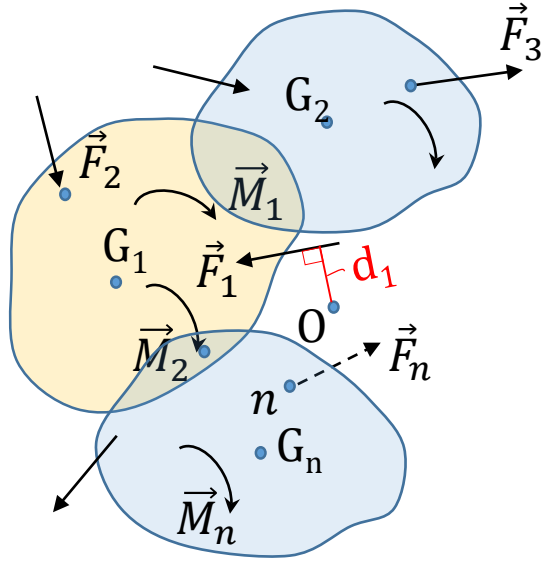
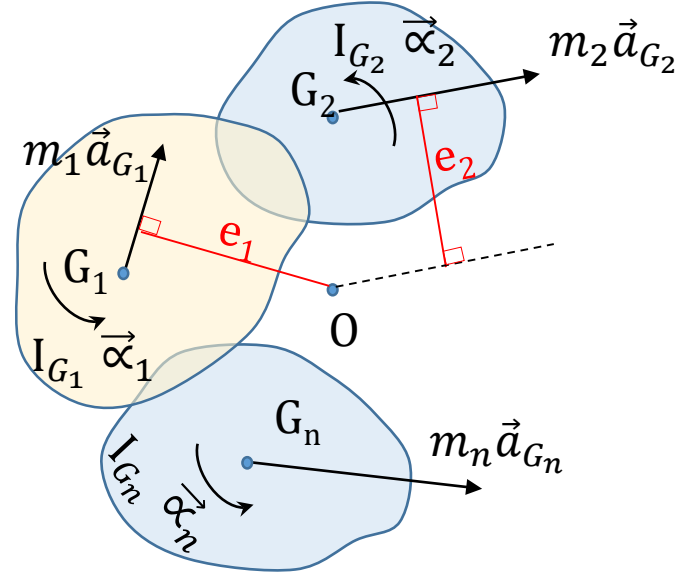
b-)  $O_y = 110.3625 \text{ N}$

### 4.1.3 Rijid Cisim Sistemleri : Birden fazla rijid cisimden oluşan sistemler için D'Alembert prensibi uygulanabilir.

Dış kuvvetler sist.

 $\equiv$ 

Efektif kuvvetler sist.

 $\equiv$ 

2 Vektörel Denklem

$$1-) \quad \Sigma \vec{F} = \Sigma m_i \vec{a}_{G_i} \quad (D.4.12)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m_1 \vec{a}_{G_1} + m_2 \vec{a}_{G_2} + \dots$$

$$2-) \quad \Sigma \vec{M}_O = \Sigma (I_{G_i} \vec{\alpha}_i + \vec{OG_i} \times m_i \vec{a}_{G_i}) \quad (D.4.13)$$

$$\vec{OA_1} \times \vec{F_1} + \vec{OA_2} \times \vec{F_2} + \dots + \vec{M_1} + \vec{M_2} + \dots = I_{G_1} \vec{\alpha_1} + I_{G_2} \vec{\alpha_2} + \vec{OG_1} \times m_1 \vec{a}_{G_1} + \vec{OG_2} \times m_2 \vec{a}_{G_2} + \dots$$

Düzlemsel Harekette 3 Skaler Denklem yazılır:

$$1-) \quad \Sigma F_x = \Sigma m_i a_{G_{ix}} \quad (D.4.14)$$

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots = m_1 a_{G_{1x}} + m_2 a_{G_{2x}} + \dots + m_n a_{G_{nx}}$$

$$2-) \quad \Sigma F_y = \Sigma m_i a_{G_{iy}} \quad (D.4.15)$$

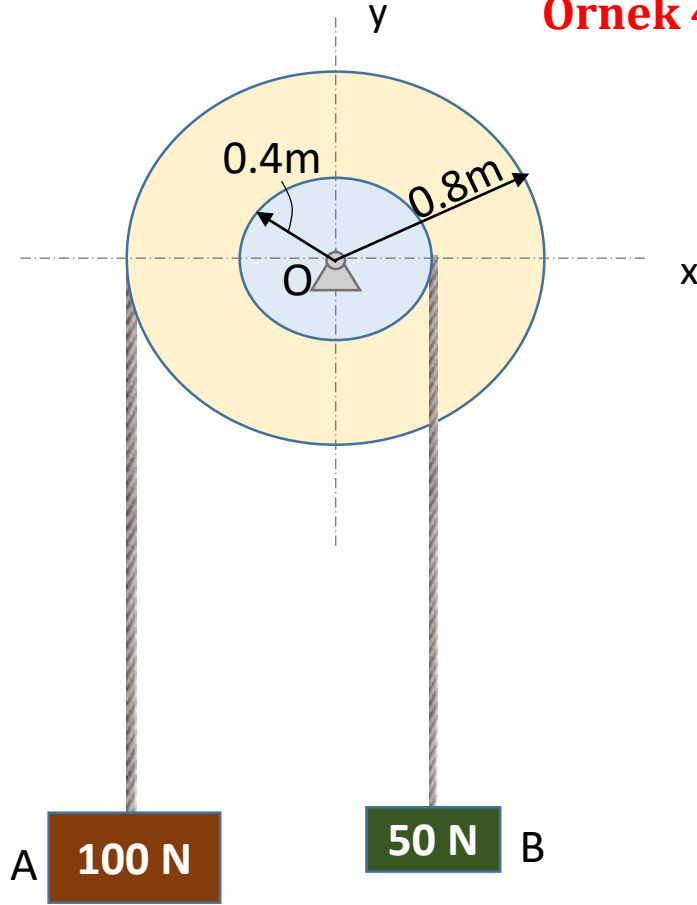
$$F_{1y} + F_{2y} + \dots = m_1 a_{G_{1y}} + m_2 a_{G_{2y}} + \dots + m_n a_{G_{ny}}$$

$$3-) \quad \Sigma M_O = \Sigma (I_{G_i} \alpha_i + I_{G_i} \cdot m_i a_{G_i}) \quad (D.4.16)$$

$$F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + \dots - M_1 - M_2$$

$$= I_{G_1} \alpha_1 + I_{G_2} \alpha_2 + \dots - m_1 a_{G_1} e_1 - m_2 a_{G_2} e_2 + \dots$$

Şekildeki Döndürme yönlerine dikkat edilerek işaretleri yazılmıştır.

**Örnek 4.1.4** (video 4.1b – Örnek 4.3)

O merkezinden yataklanmış ve bu noktadan geçen dik eksen etrafında serbestçe dönebilen makara sistemine A ve B ağırlıkları asılmış ve sistem harekete terk edilmiştir. Buna göre herhangi bir  $t$  anında,

- a-)** makaraların açısal ivmesini,
- b-)** A ve B ağırlıklarının ötelenme ivmelerini,
- c-)** yataktan makaraya gelen reaksiyon kuvvetini,
- d-)** iplerdeki kuvvetleri hesaplayınız.

*Makaraların toplam Ağırlığı  $W_o = 49N$ ,*

*makaraların toplam atalet yarıçapı:  $k = 1m$*

*Yerçekimi ivmesi :  $g=9.8m/s^2$  alınacaktır.*

**Çözüm..>>**

**Çözüm:**

- Sistem, 2 kütle ve 2 makaradan oluşan bir rijid cisim sistemidir.
- Makaralar birbirlerine O noktasından montajlı olduğundan tek cisim gibi kabul edilebilir, aynı açısal ivme ( $\alpha$ ) değerine sahiptirler.
- A ve B kütleleri y yönünde hareket ederler ve ivmeleri makaralarla o andaki ortak noktaları (c ve d) nin ivmelerinin y bileşenlerine (veya teğetsel bileşenlerine) eşit olur.

O ve c aynı cismin noktalarıdır. Herhangi bir t anında c noktasının ivmesi:

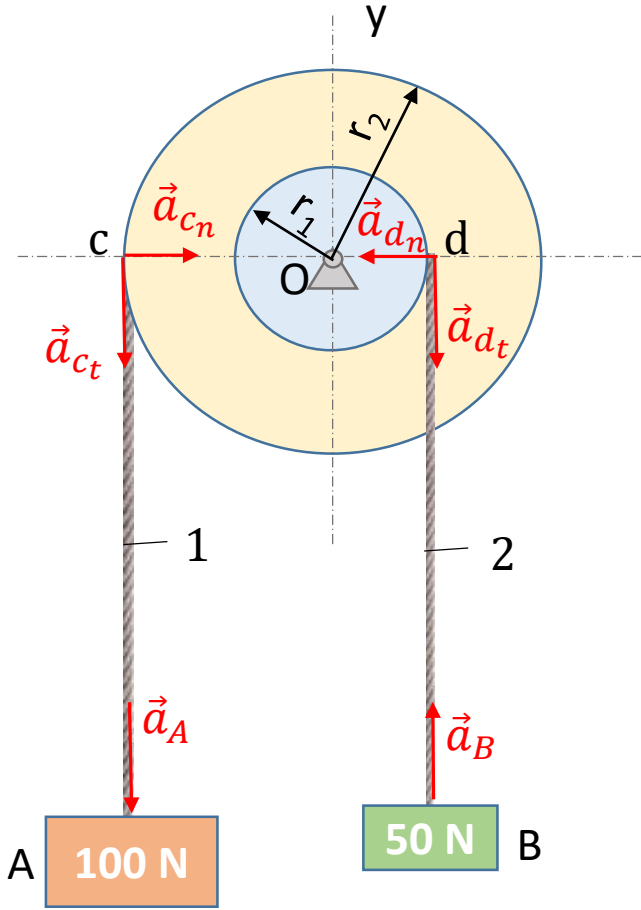
D.3.5 denkleminde: 
$$\vec{a}_c = \vec{a}_O + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{OC}}_{\vec{a}_{ct}} - \underbrace{\omega^2 \vec{OC}}_{\vec{a}_{cn}}$$

Bize gerekli olan teğetsel ivme bileşenini artık skaler olarak yazabiliriz:

$$a_{ct} = r_2 \alpha = 0.8 \alpha = a_{cy} = a_{ip-1} = a_A \rightarrow a_A = 0.8 \alpha$$

Benzer şekilde d noktası için;

$$a_{dt} = r_1 \alpha = 0.4 \alpha = a_{dy} = a_{ip-2} = a_B \rightarrow a_B = 0.4 \alpha$$

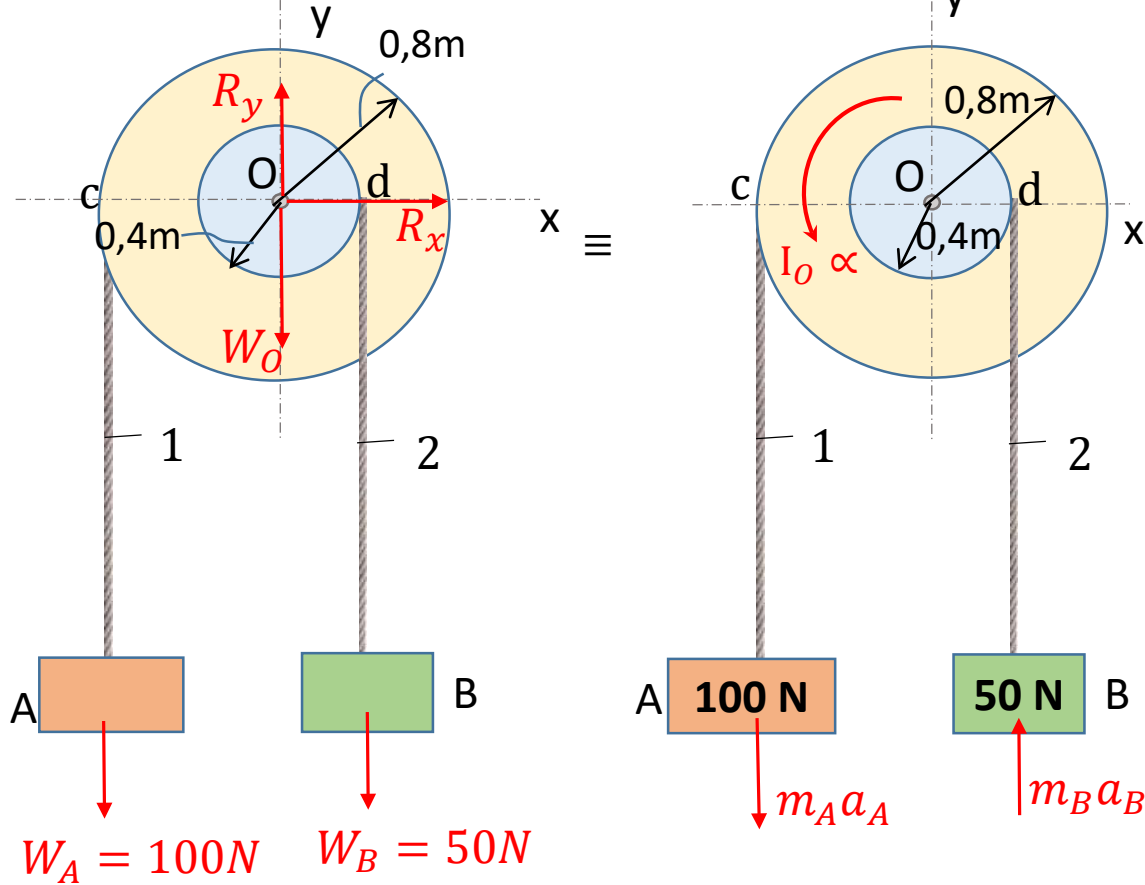


Makaraların O ağırlık merkezine göre toplam kütle atalet momenti :

$$I_O = mk^2 = \frac{49}{9.8} 1^2 = 5 \text{ kg/m}^2$$

$$r_1 = 0.4m, \quad r_2 = 0.8m$$

Tüm sistem için

Dış Kuvvetler Sistemi  $\equiv$  Efektif Kuvvetler Sistemi

3 bağımsız skaler denklem

$$\begin{aligned} (1) \quad \Sigma F_x &= \Sigma m_i a_{G_{ix}} \\ (2) \quad \Sigma F_y &= \Sigma m_i a_{G_{iy}} \\ (3) \quad \Sigma M_O &= \Sigma (I_{G_i} \alpha_i + m_i a_{G_i} x d_i) \end{aligned}$$

Şimdi bu denklemleri açalım:

(1)'den  $\Sigma F_x = R_x = m_A a_{A_x} + m_B a_{B_x} + m_O a_{O_x} \rightarrow R_x = 0$

(3)'den  $\Sigma M_O = W_A 0.8 - W_B 0.4 = I_O \alpha + m_A a_A x 0.8 + m_B a_B x 0.4$

$$100x0.8 - 50x0.4 = 5 \alpha + \frac{100}{9.8} x 0.8 \alpha x 0.8 + \frac{50}{9.8} 0.4 \alpha x 0.4$$

$$60 = 5 \alpha + 6.53 \alpha + 0.816 \alpha \cong 12.35 \alpha \rightarrow \alpha = 4.86 \text{ rd/s}^2$$

$$a_A = 0.8 \alpha = 0.8 x 4.86 \rightarrow a_A = 3.88 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = 0.4 \alpha = 0.4 x 4.86 \rightarrow a_B = 1.94 \text{ m/s}^2$$

(2)'den  $\Sigma F_y = -m_A a_A + m_B a_B + m_O a_{O_y}$

$$R_y - W_O - W_A - W_B = -m_A a_A + m_B a_B$$

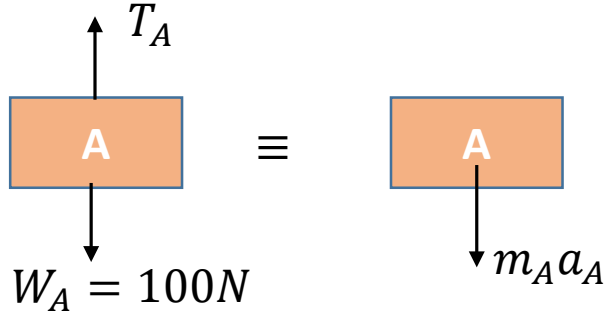
$$R_y - 49 - 100 - 50 = \frac{-100}{9.8} 3.88 + \frac{50}{9.8} 1.94 \rightarrow R_y = 169.3N$$

(a, b ve c şıklarında sorulanları bulmuş olduk)

Dikkat: Tüm sistem için ip kuvvetleri iç kuvvettir ve dolayısıyla dış kuvvetler sisteminde gösterilmezler. O daki sabit mafsaldan sistemi ayırdığımız için  $R_x$ ,  $R_y$  kuvvetleri gösterilir. Sistemden ayırdığımız her bir kısımda mutlaka bir dış kuvvet gösterilir. (Daha iyi anlamak için Statik'te anlatılan Serbest Cisim Diyagramları konusunu inceleyiniz.)

d-) İplerdeki kuvvetleri bulmak için A ve B cisimlerini ayrı ayrı incelememiz gerekir.

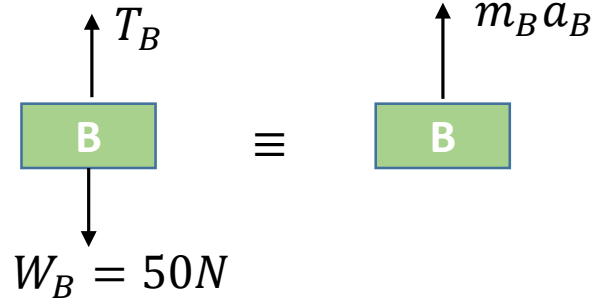
Dış kuvvetler sist.  $\equiv$  Efektif kuvvetler sist.



$$\begin{aligned}
 +y \uparrow \quad \Sigma F_y &= -m_A a_A \\
 T_A - W_A &= -\frac{W_A}{g} a_A \\
 T_A &= W_A - \frac{W_A}{g} a_A \\
 T_A &= 100 - \frac{100}{9.8} 3.88
 \end{aligned}$$

$$T_A = 60.4 \text{ N}$$

Dış kuvvetler sist.  $\equiv$  Efektif kuvvetler sist.



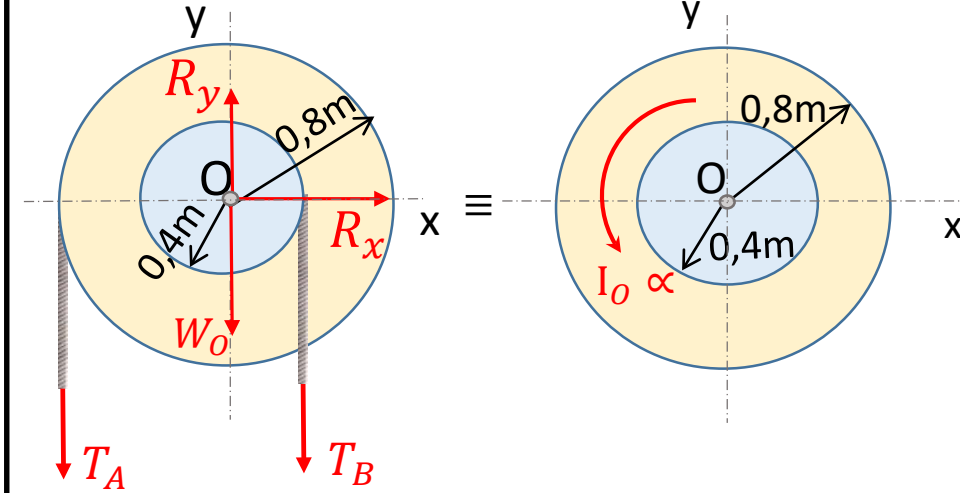
$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y &= m_B a_B \\
 T_B - W_B &= \frac{W_B}{g} a_B \\
 T_B &= W_B + \frac{W_B}{g} a_B \\
 T_B &= 50 + \frac{50}{9.8} 1.94
 \end{aligned}$$

$$T_B \cong 59.9 \text{ N}$$

### Sağlama

Makara sistemini ayrı incelersek

Dış kuvvetler sist.  $\equiv$  Efektif kuvvetler sist.



$$\Sigma F_y = m a_{O_y} = 0$$

$$R_y - W_O - T_A - T_B = 0$$

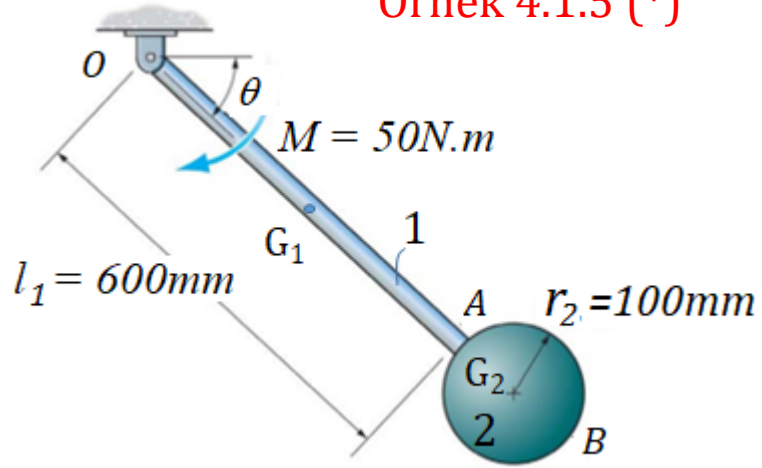
$$R_y = 49 + 60.4 + 59.9 \rightarrow R_y = 169.3 \text{ N}$$

$$\Sigma M_O = T_A 0.8 - T_B 0.4 = I_O \alpha$$

$$60.4 \times 0.8 - 59.9 \times 0.4 = 5 \alpha \rightarrow \alpha \cong 4.86 \text{ rd/s}^2$$

Daha önce bulduğumuz sonuçlarla aynı

## Örnek 4.1.5 (\*)



10kg kütleli OA çubuğuna 15kg kütleli, 100mm yarıçaplı bir küre bağlanarak bir sarkaç oluşturulmuştur. Çubuğa saat ibreleri yönünde  $M = 50\text{Nm}$  lik bir dış moment uygulanıyor. Gösterilen konumda  $\theta = 45^\circ$  ve sarkacın açısal hızı  $\omega = 3\text{rad/s}$  olduğuna göre,

a-) sarkacın açısal ivmesini,

b-) O sabit mafsalındaki reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.

**Cevap**

a-)  $\alpha = 16.7\text{rd/s}^2$ ,

b-)  $O_n = 295\text{N}$  ;  $O_t = 52.04\text{N}$





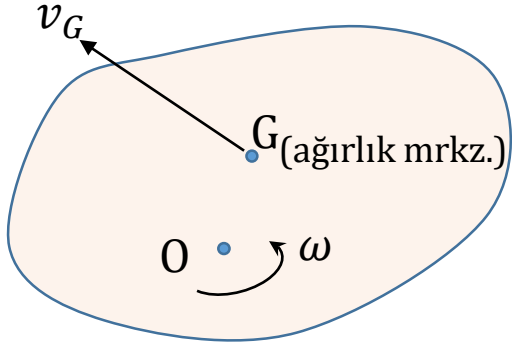
## RİJİD CİSİM KİNETİĞİ

# 4.2 İş-Enerji İlkesi

## 4.2 Rijid Cisimler İçin İş-Enerji İlkesi

Rijid Cismin kinetiğinde ivmelerin  $(a, \alpha)$  belirtilmesine gerek olmadığı yöntemdir. Maddesel noktada olduğu gibi 2 konum arasında yazılır ancak cismin dönmesinden dolayı aşağıda belirtilen ilave terimler gelecektir.

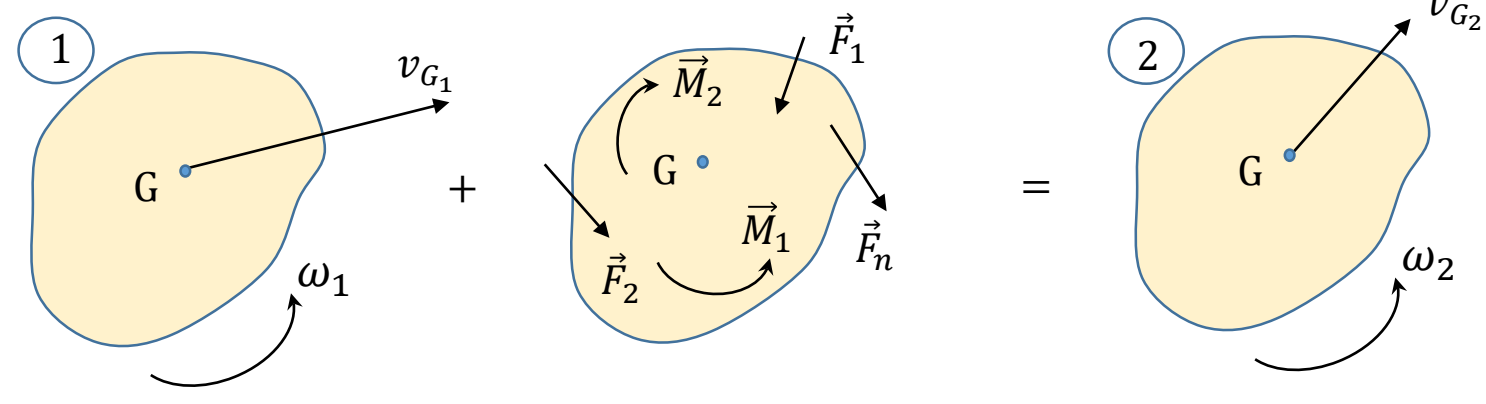
Bir  $t$  anındaki toplam kinetik enerji:  $T$



$$T = \underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{\text{Ötelenme Kinetik enerjisi}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_G\omega^2}_{\text{Dönme Kinetik enerjisi}} \quad (\text{D.4.17})$$

Veya  $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

1-2 konumları arasında İş – Enerji Denklemi:



$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (\text{D.4.18})$$

$$\frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_1^2 + \text{Dış kuvvetlerin toplam işi} = \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$$

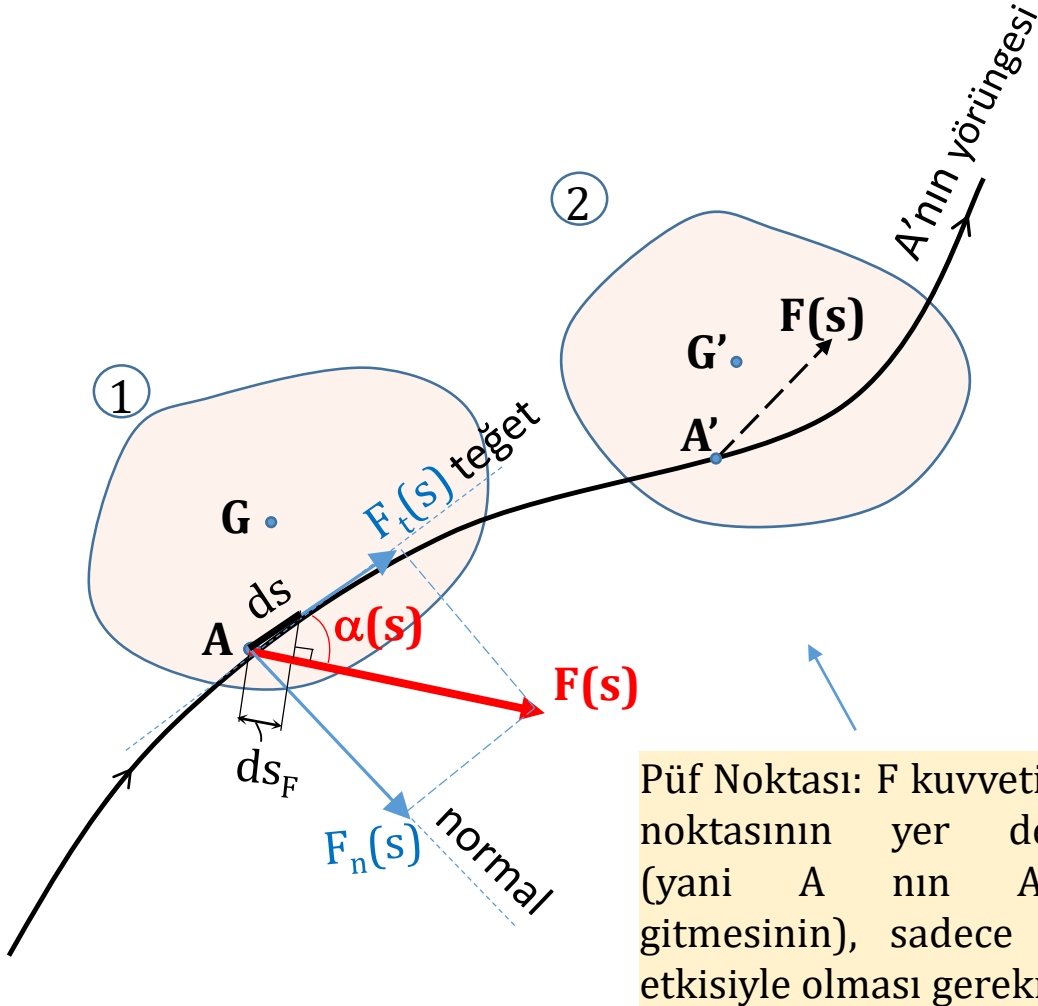
Şimdi her bir dış kuvvet tipi için işin nasıl hesaplanacağını göreceğiz..>>

1 ve 2 konumlarındaki hız vektörlerinin yönü değişse bile hesaplamaları etkilemediğini fark edin.

Rijit Cisim sistemleri için İş Enerji İlkesi: D.4.18 denklemindeki terimler her bir cisim için yazılır ve toplanır.

**4.2.1 Tekil Dış Kuvvetin İş:** Kuvvetin uygulama noktasının yer değiştirmesi ile kuvvetin çarpımıdır. Ancak kuvvet değişken olursa uygulama noktasının yörüngesi boyunca integrasyonla işi bulmak gerekir.

**a-) Değişken Dış Tekil Kuvvetin İş:** Her t anında teğet yönünde yol alındığından  $F_t$  bileşeni iş yapar.



$ds$  : Kuvvetin Uygulama Noktasının aldığı diferensiyel yoldur.

$$\text{Diferansiyel İş: } du = F_t(s)ds \quad (\text{D.4.19})$$

Toplam İş:

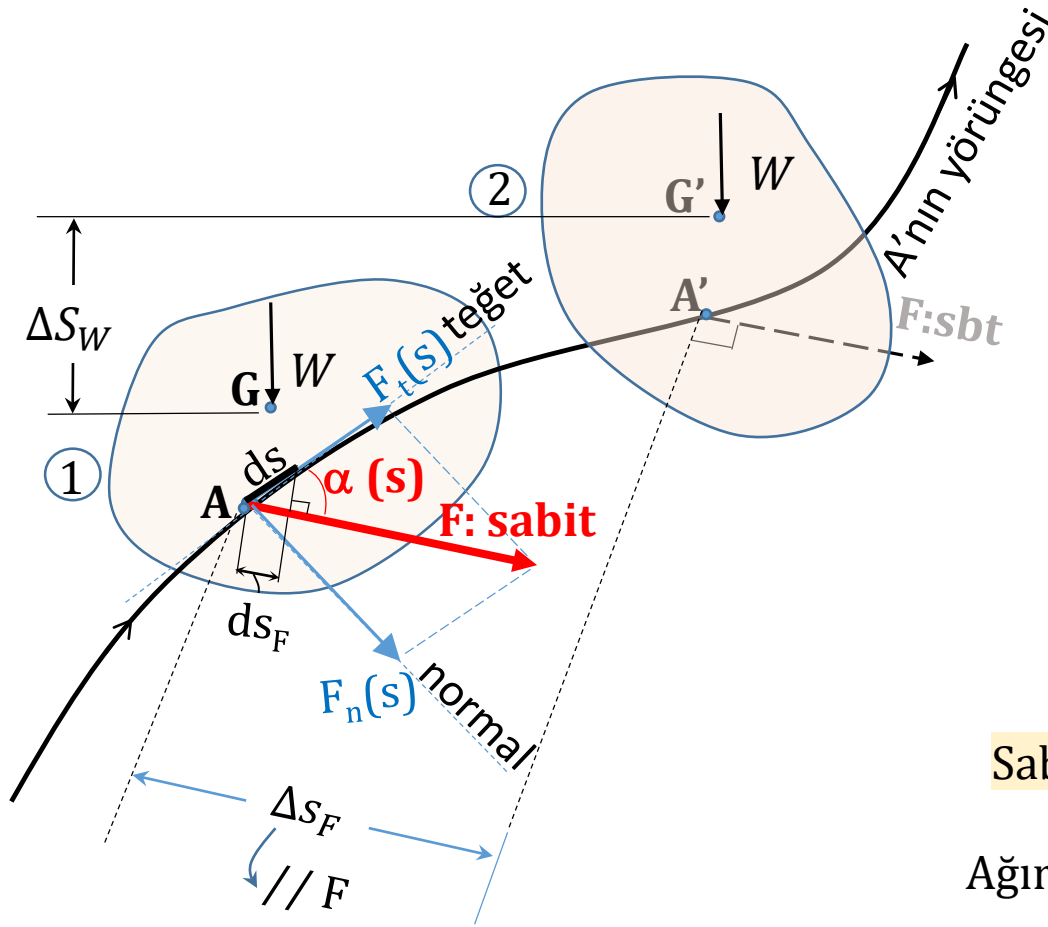
$$U^F_{1-2} = \int_A^{A'} du = \int_A^{A'} F_t(s)ds = \int_A^{A'} F(s) \cos \alpha(s) ds \quad (\text{D.4.20})$$

A: Kuvvetin uygulama Noktasıdır.

Püf Noktası: F kuvvetinin uygulama noktasının yer değiştirmesinin (yani A'nın A' noktasına gitmesinin), sadece F kuvvetinin etkisiyle olması gerekmez.

1-2 konumları arası şiddeti ve yönü değişmeyen

**b-) Sabit Dış Tekil Kuvvetin İş:** = Kuvvet (F) x Uygulama Noktasının Kuvvet doğrultusunda aldığı net yol ( $\Delta s_F$ )



$$ds_F = ds \cdot \cos \alpha(s),$$

4.20 denkleminde genel iş denklemi

$$U^F_{1-2} = \int_A^{A'} F(s) \cos \alpha(s) ds \quad (\text{D.4.21})$$

$F(s) = F$  : sabit olursa

$$U^F_{1-2} = F \int_A^{A'} \underbrace{\cos \alpha(s) ds}_{ds_F} = F \int_A^{A'} \underbrace{ds_F}_{\Delta s_F} \rightarrow F \text{ doğrultusunda alınan net yol}$$

Sabit F kuvvetinin İş:  $\rightarrow U^F_{1-2} = F \cdot \Delta s_F$  (D.4.22)

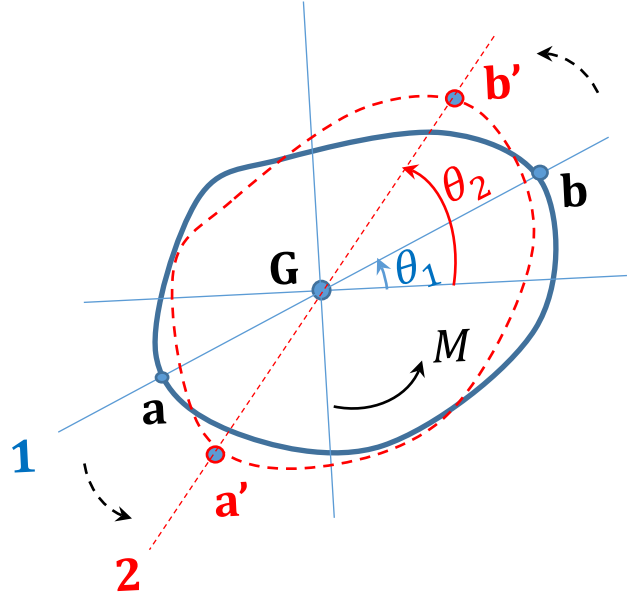
Sabit kuvvetin yönünde yol alınıyorsa iş pozitif, aksi halde negatiftir.

Ağırlık kuvveti sabit kuvvettir. Yaptığı iş:  $U^W_{1-2} = -W \cdot \Delta s_W$

$\Delta s_W$  : W doğrultusunda alınan net yol

Yandaki örnekte W'nin yönüne zıt yönde yol alınıyor. O yüzden iş negatif olur.

### 4.2.2 Tekil Dış Sabit Momentin İş:



1-2 konumları arasında

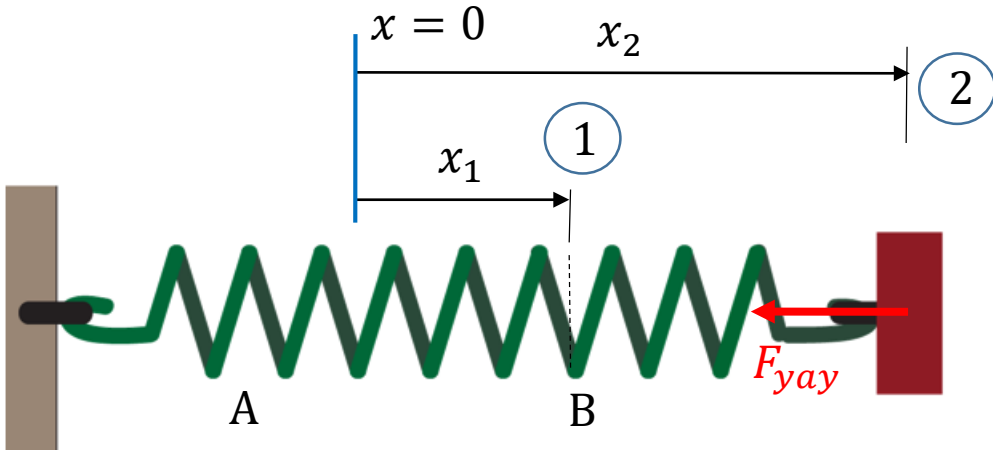
Sabit M momentinin İş= Moment x Dönme Açısı

$$U^M_{1-2} = M. \Delta\theta = M(\theta_2 - \theta_1)$$

(D.4.23)

Dönme yönü ile Moment yönü aynı ise yapılan iş pozitif aksi halde negatiftir.

### 4.2.3 Yay kuvvetinin İş :



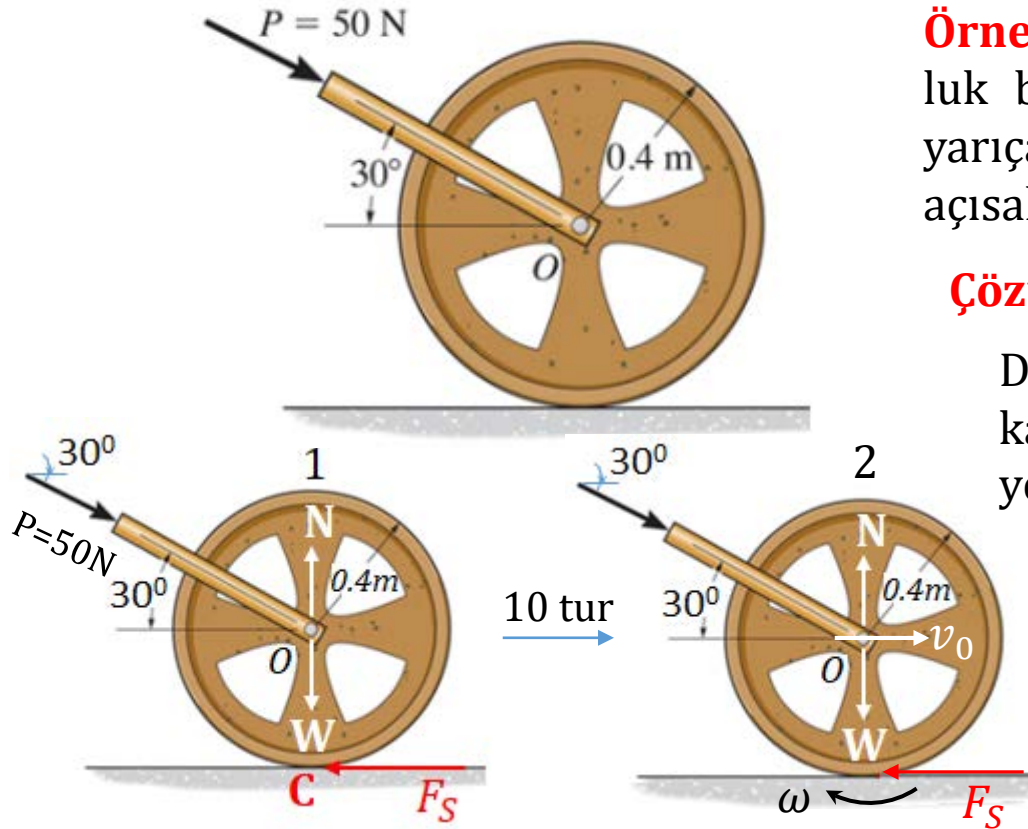
Bir cisme bağlı yayın 1-2 konumları arasında yaptığı iş:

$$U^{F_{yay}}_{1-2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

(D.4.24)

Yay kuvveti yönünde yol alınıyorsa iş pozitif aksi halde negatiftir.

Daima 1 ilk konum, 2 son konum olarak düşünülmelidir.



**Örnek 4.2.1** 50kg kütleli durmakta olan tekerleğe bağlı çubuğa  $P = 50\text{N}$  luk bir kuvvet uygulanıyor. Tekerliğin dış yarıçapı  $r = 0.4\text{m}$  ve atalet yarıçapı  $k = 0.3\text{m}$  olduğuna göre, 10 devir yaptıktan sonra tekerleğin açısal hızını hesaplayınız. (Tekerlek kaymadan yuvarlanmaktadır.)

**Çözüm:** İş-Enerji İlkesi:  $T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$  (I) ,  $T_1 = 0$

Düşey yönde yol alınmadığından o yöndeki kuvvetler iş yapmaz. Tekerlek kaymadan yuvarlandığı için, sürtünme kuvveti de iş yapmaz. Yatay yönde yol alındığı için iş yapan kuvvet sadece  $P$  nin yatay bileşenidir.

Bir tekerlek bir tam tur atınca, çevresi kadar yol alır, yani ötelenir.

$$U_{1 \rightarrow 2} = P \cos 30^\circ (10)(2\pi r) = 50 \cos 30^\circ (10)(2\pi 0.4) \cong 1088 \text{ Nm}$$

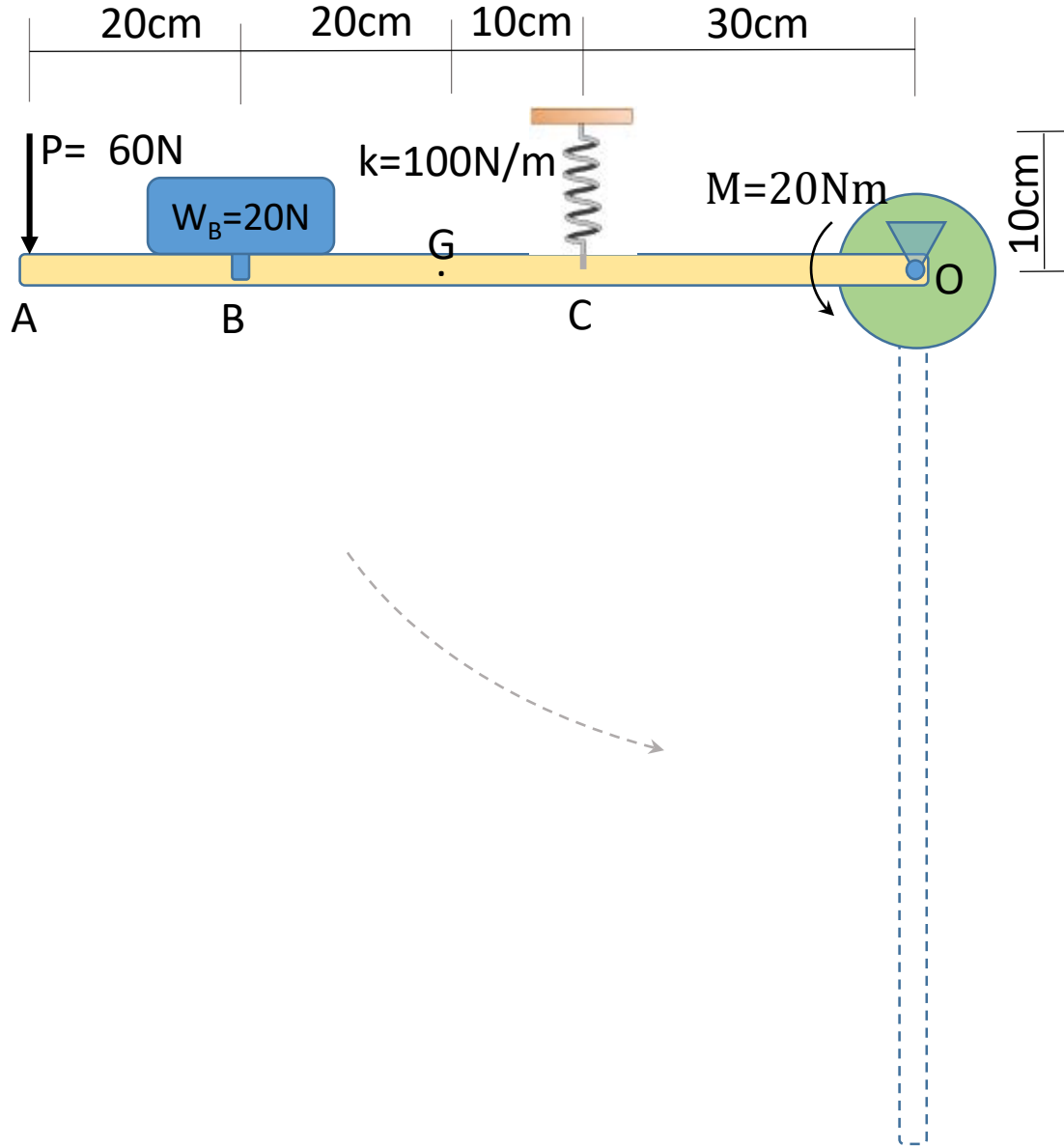
Kaymadan Yuvarlanan bir tekerleğin ani

dönme merkezi zeminle temas ettiği noktadır:  $v_0 = \omega \cdot r = 0.4\omega$

2 konumundaki kinetik enerji:  $T_2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} m (0.4\omega)^2 + \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} 50 (0.4\omega)^2 + \frac{1}{2} 50 (0.3\omega)^2 = 6.25 \omega^2$

(I) nolu denkleme geri dönersek:  $0 + 1088 = 6.25 \omega^2 \rightarrow \omega \cong 13.2 \text{ rad/s}$

**Kaymadan yuvarlanan bir tekerlekte sürtünme kuvveti iş yapmaz:** Çünkü ani dönme merkezi zeminle temas eden C noktasıdır ve bu noktanın hızı her t anı için sıfırdır. Çünkü iki cismin temas noktasının hızı aynıdır. (Zemin sabit olduğundan C ortak temas noktasının hızı bu sebeple sıfırdır). C aynı zamanda  $F_s$  sürtünme kuvvetinin de uygulama noktasıdır. Her an hızı sıfır olan C noktası teorik olarak her an için aynı yerdedir yani hareketsiz gibidir. Bu sebeple  $F_s$  sürtünme kuvveti iş yapmaz.  $F_s$  in sadece döndürmeye etkisi vardır. Eğer tekerlek kayarak ilerleseydi  $F_s$  o zaman negatif iş yapardı.



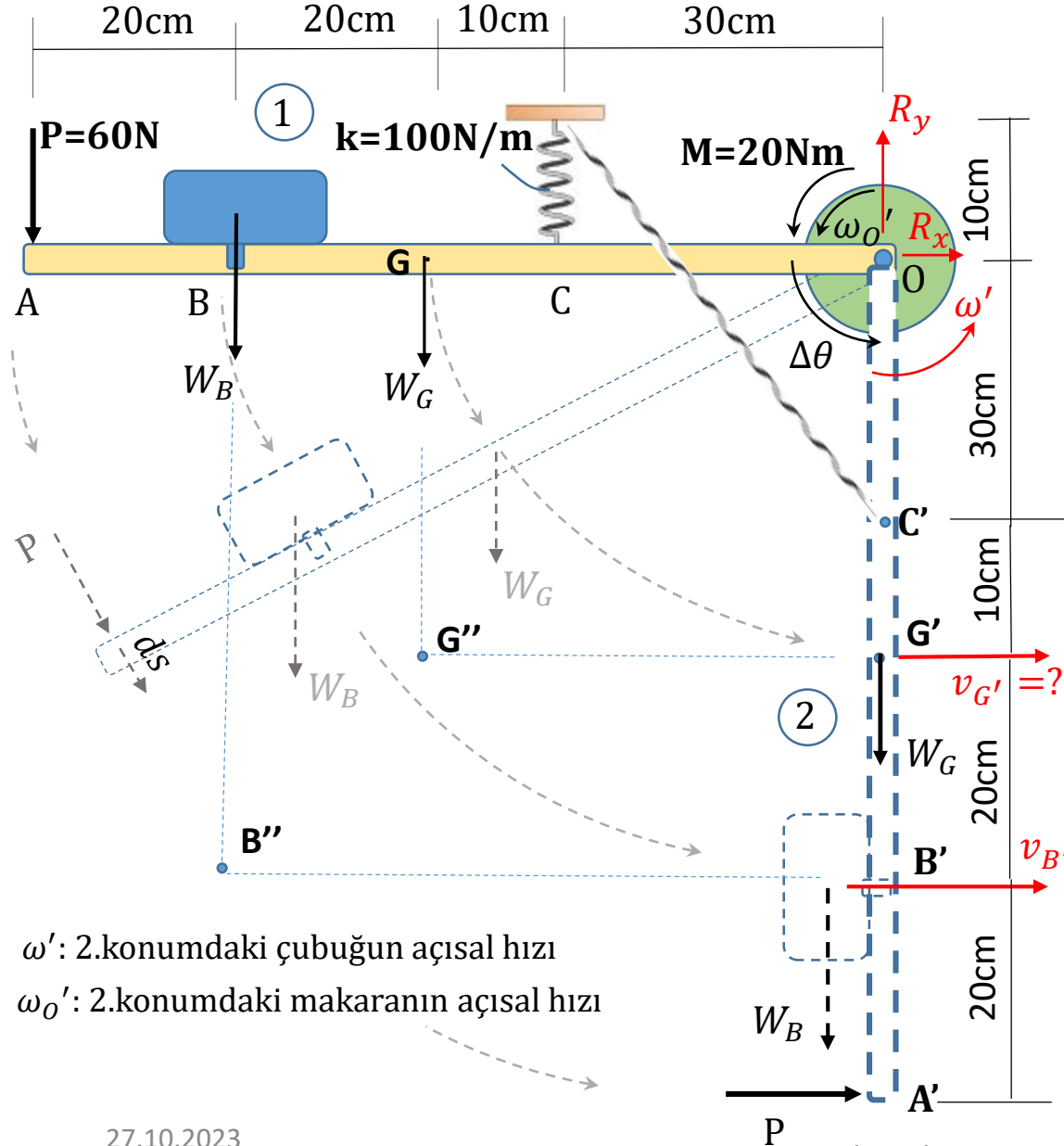
### Örnek 4.2.2

([video 4.2.a](#) – Örnek 4.4)

G merkezli, 40N ağırlığındaki hareketsiz konumdaki homojen OA çubuğunun, B noktasına  $W_B=20\text{N}$  luk bir ağırlık sabitlenmiş, C noktasına ise katsayısı  $k=100\text{N/m}$ , uzamamış boyu 8cm olan bir yay bağlanmıştır. Sistem yatay konumdan serbest bırakılacaktır.

A noktasından çubuğa hareket boyunca sürekli dik olarak P kuvveti, O daki makaraya ise saat ibreleri tersi yönünde  $M=20\text{Nm}$  lik bir moment uygulanacaktır. Düşey konumdan geçerken çubuğun ağırlık merkezinin hızını hesaplayınız. (makara ağırlığı ihmal edilecektir)



**Çözüm:**

OA çubuğu, B ağırlığı ve O makarasından oluşan bu rijit cisim sistemi için,

$$\text{İş – Enerji İlkesi : } T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (I)$$

1 : yatay hareketsiz konum , 2 : Düşey konum

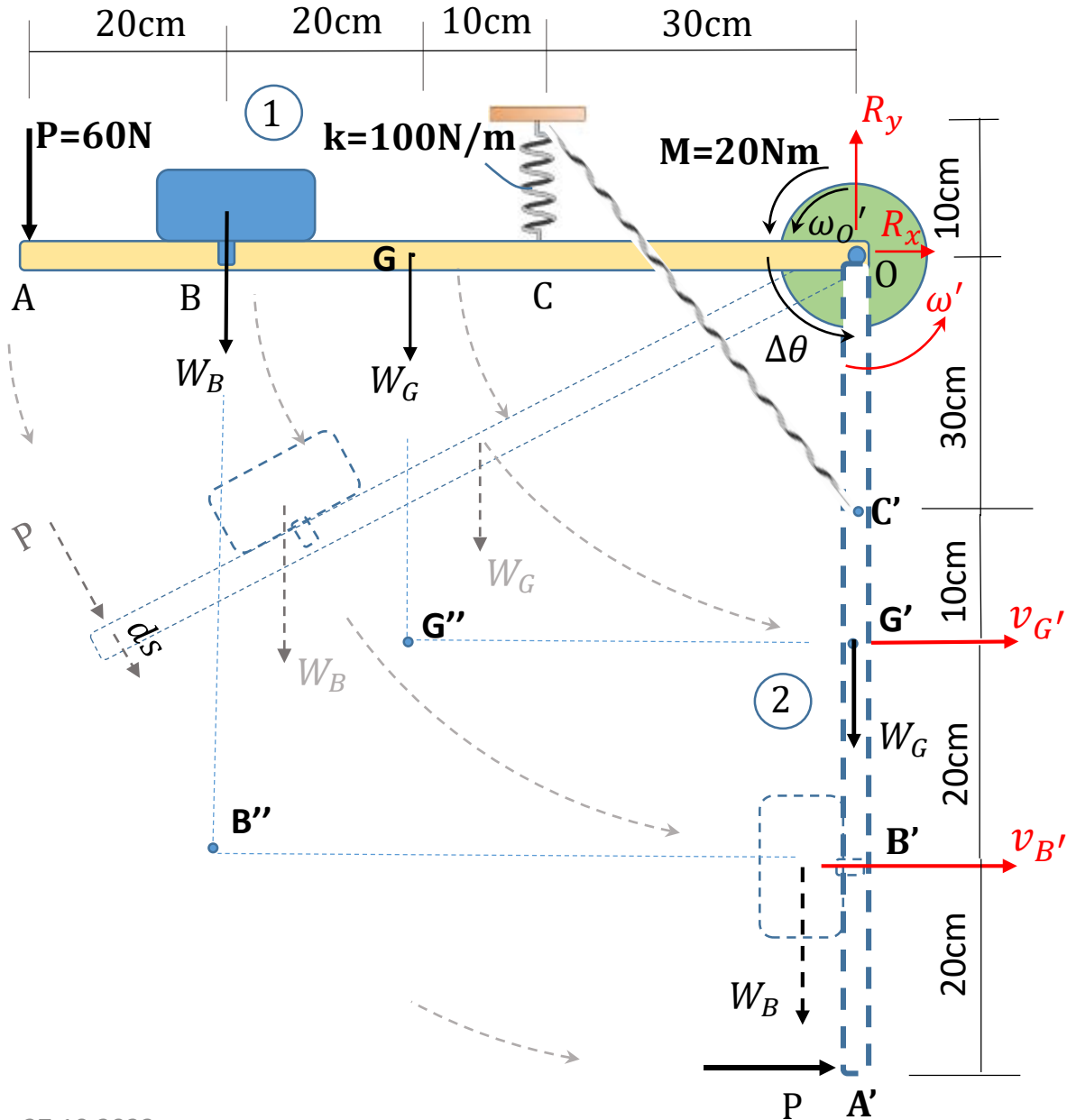
Öncelikle (I) denkleminde kullanacağımız kütle atalet momentlerini hesaplayalım ve bazı tespitler yapalım:

- Çubuğun kütle atalet momenti :

$$I_G = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{40\text{kg}}{9.81\text{m/s}^2} \times 0.8\text{m}^2 = 0.217\text{kgm}^2$$

- Boyutları ihmal edildiğinden B cismi için  $I_{GB} \approx 0$  alınır.
- Makaraların ağırlığı ihmal edildiğinden  $I_O \approx 0$
- $R_x$  e  $R_y$  tepkilerinin uygulama noktası (O) sabit olduğundan iş yapmazlar.

Başlangıçta sistem hareketsiz olduğundan kinetik enerji sıfırdır.  $\rightarrow T_1 = 0$



Yapılan toplam iş:

$$U_{1 \rightarrow 2} = U^P_{1 \rightarrow 2} + U^{W_B}_{1 \rightarrow 2} + U^{F_{yay}}_{1 \rightarrow 2} + U^M_{1 \rightarrow 2}$$

Şimdi bu toplam iş denklemindeki her bir terimi bulacağız:

P kuvvetinin işinin hesaplanması:  $U^P_{1 \rightarrow 2}$

Eğrisel harekette teğet yönde yol alınır. P kuvveti de sürekli teğet yönündedir. O halde

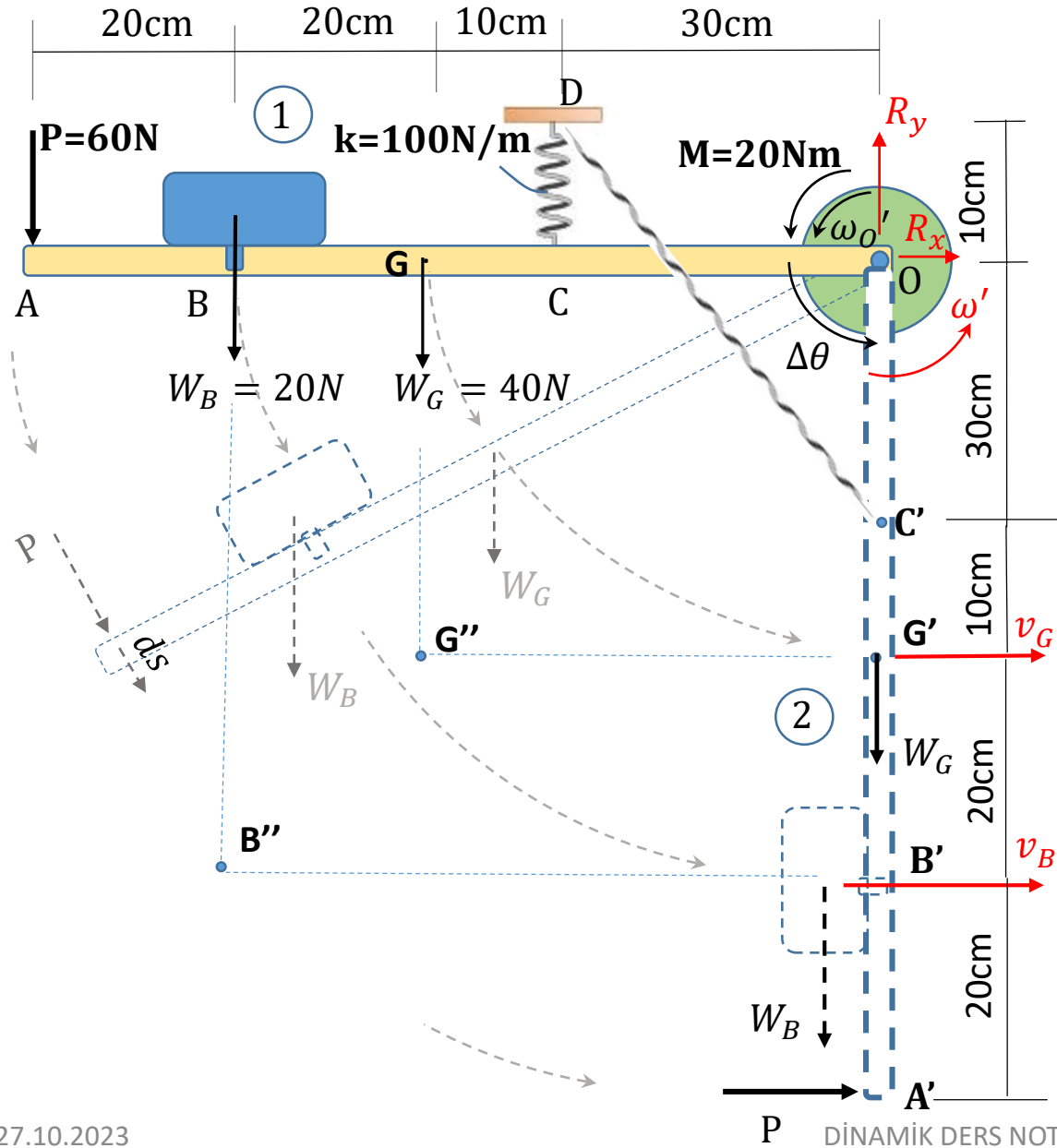
P kuvvetinin işi = kuvvet x ( $\widehat{AA'}$  daire yayı)

*P'nin uygulama noktası (A) nın teğet boyunca aldığı net yol*

(D.4.20)'den:  $U^P_{1 \rightarrow 2} = P \int_{s_A=0}^{s'_A} ds = P(s'_A - s_A)$

$$s'_A = \widehat{AA'} = r\Delta\theta = 0.8x \frac{\pi}{2} \rightarrow U^P_{1 \rightarrow 2} = 60x(0.8x \frac{\pi}{2} - 0)$$

$$\rightarrow U^P_{1 \rightarrow 2} = 75.4\text{N} \quad (P \text{ yönünde yol alındığı için yapılan iş pozitiftir.})$$



### Ağırlık kuvvetlerinin İş:

Ağırlıklar sabit kuvvet olduğu için

Ağırlık kuvvetinin işi = Ağırlık x ağırlık yönünde alınan net yol.

Ağırlıklarla aynı yönde yol alındığı için işleri de pozitiftir.

$$(D.4.22)'den \begin{aligned} U^{W_B}_{1 \rightarrow 2} &= W_B \cdot \overline{BB''} = 20\text{N} \times 0.6\text{m} = 12\text{Nm} \\ U^{W_G}_{1 \rightarrow 2} &= W_G \cdot \overline{GG''} = 40 \times 0.4 = 16\text{Nm} \end{aligned}$$

### Yay kuvvetinin İş:

$$(D.4.24)'den \quad U^{F_{yay}}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}k(\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2)$$

Yayın uzamamış boyu:  $x_0 = 8\text{cm}$

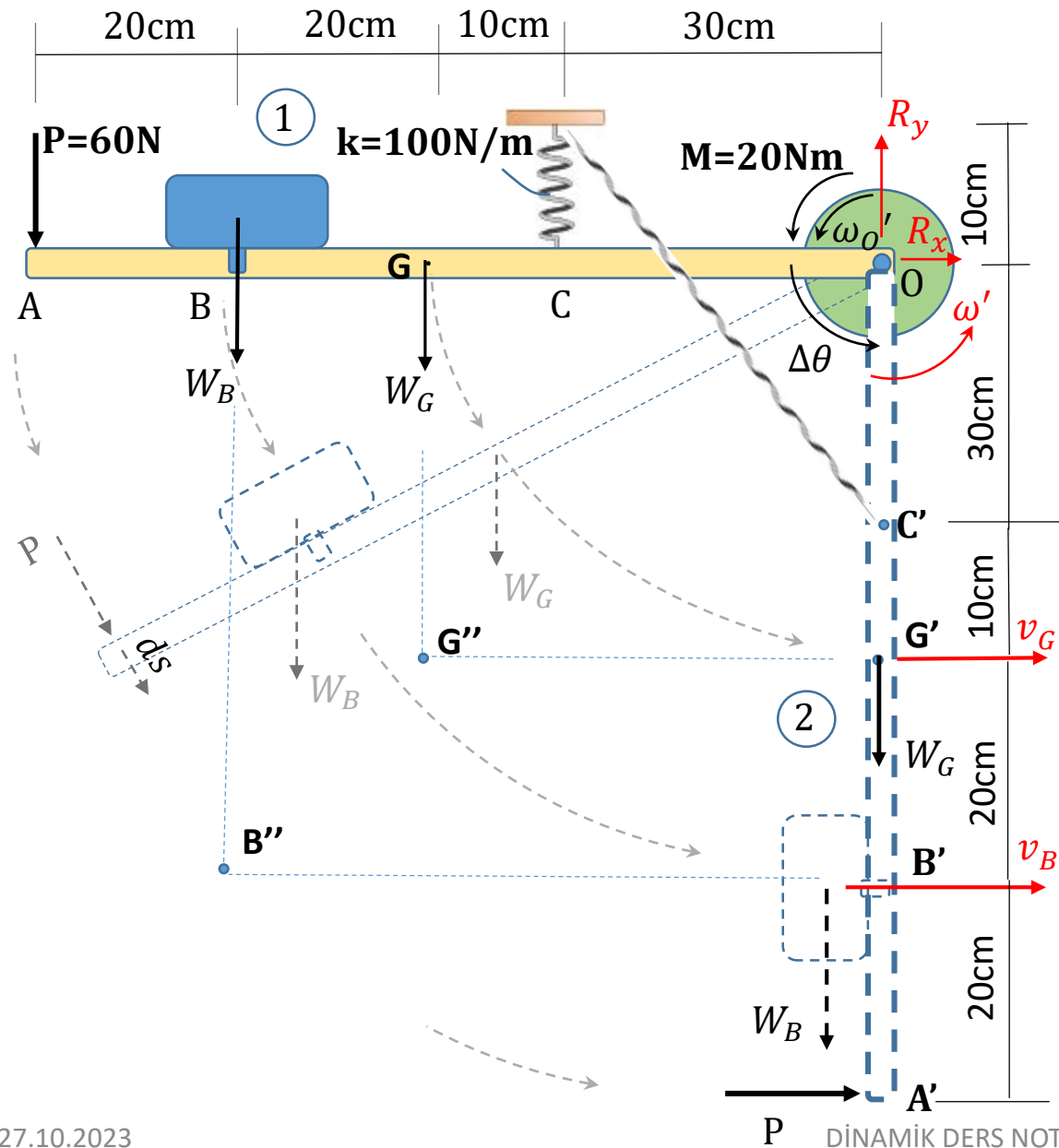
1.konumdaki uzama miktarı:  $x_1 = 10 - 8 = 2\text{cm} = 0.02\text{m}$

2.konumdaki toplam boy:  $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{cm}$

2.konumdaki uzama miktarı:  $x_2 = 50 - 8 = 42\text{cm} = 0.42\text{m}$

$$U^{F_{yay}}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}100(0.42^2 - 0.02^2) = -8.8\text{Nm}$$

Yay kuvvetinin aksi yönünde yol alındığı için işi negatiftir.



- M Momentinin İşi:

(D.4.23)'den

$$U^M_{1 \rightarrow 2} = M\Delta\theta = 20 \frac{\pi}{2} = 31.4 Nm$$

*Makara, M momenti  
yönünde döndüğü  
için işi pozitifdir.*

- Toplam iş denklemine geri dönecek olursak:

$$U_{1 \rightarrow 2} = U^P_{1 \rightarrow 2} + U^{W_B}_{1 \rightarrow 2} + U^{F_{yay}}_{1 \rightarrow 2} + U^M_{1 \rightarrow 2}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = 75.4 + 12 + 16 - 8.8 + 31.4 = 126 Nm$$

- 2.Konumda kinetik enerji:

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_G'^2 + \frac{1}{2} I_G \omega'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 + \frac{1}{2} I_{G_B}^0 \omega_B'^2 + \frac{1}{2} I_O^0 \omega_O'^2$$

- Çubuk O noktası etrafından dairesel hareket yaptığından:

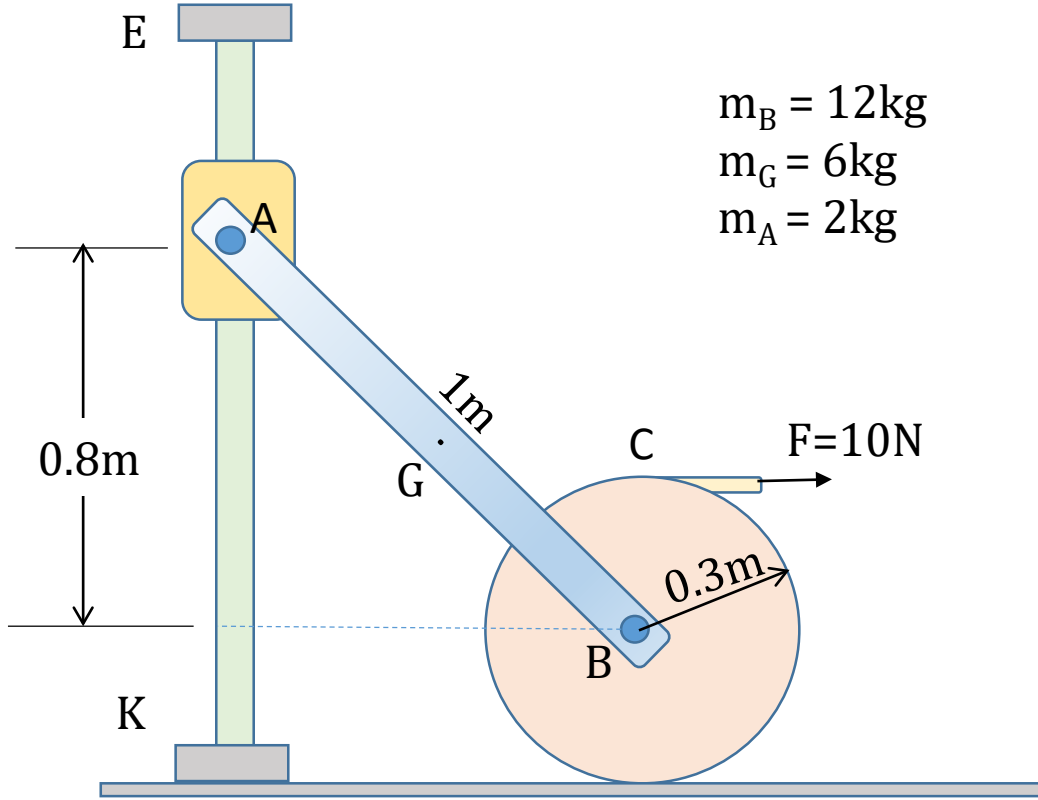
$$v'_G = \omega' \cdot \overline{OG'} = 0.4\omega' \quad ; \quad v'_B = \omega' \cdot \overline{OB'} = 0.6\omega'$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{9.81} (0.4\omega')^2 + \frac{1}{2} 0.217 \omega'^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{9.81} (0.6\omega')^2 \cong 0.8\omega'^2$$

- (I) denkleme geri dönecek olursak:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad \rightarrow \quad 0 + \textcolor{red}{126} \cong 0.8\omega'^2 \quad \rightarrow \quad \omega' = \textcolor{red}{12.55} \text{ } rd/s$$

$$\rightarrow v'_G = 0.4\omega' = 0.4 \times 12.55 \rightarrow v'_G = 5.02 \text{ m/s}$$

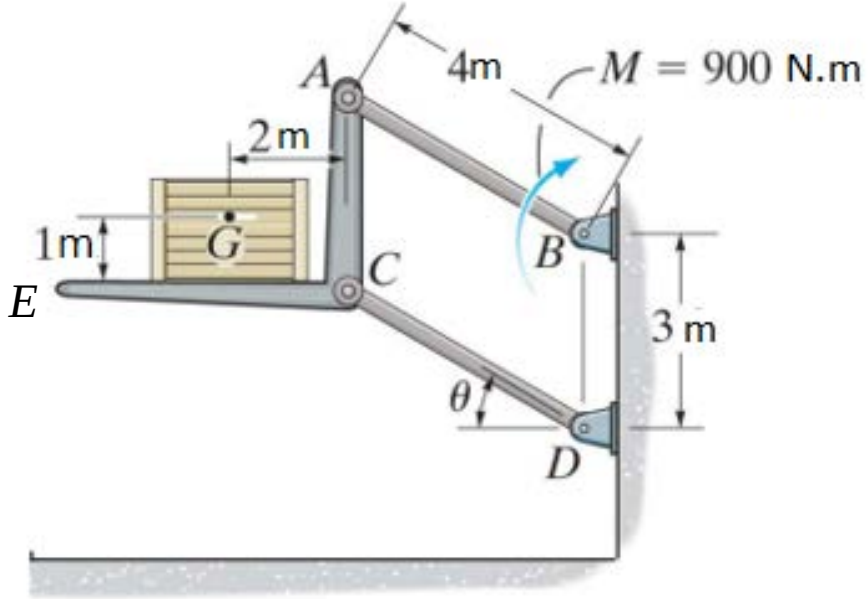


### Örnek 4.2.3 (\*) ([video 4.2.a - Örnek 4.5](#))

12kg kütleli B diski, 6kg kütleli AB çubuğu ve 2kg kütleli A kayar elemanından oluşan durağan haldeki sistem şekildeki konumda harekete terk edilirken, aynı anda diske bağlı ip  $F=10\text{N}$  luk yatay kuvvetle çekiliyor. AB çubuğu yatay konuma geldiğinde, A kayar elemanının hızını hesaplayınız. Sürtünmeleri ve ipin ağırlığını ihmal ediniz.

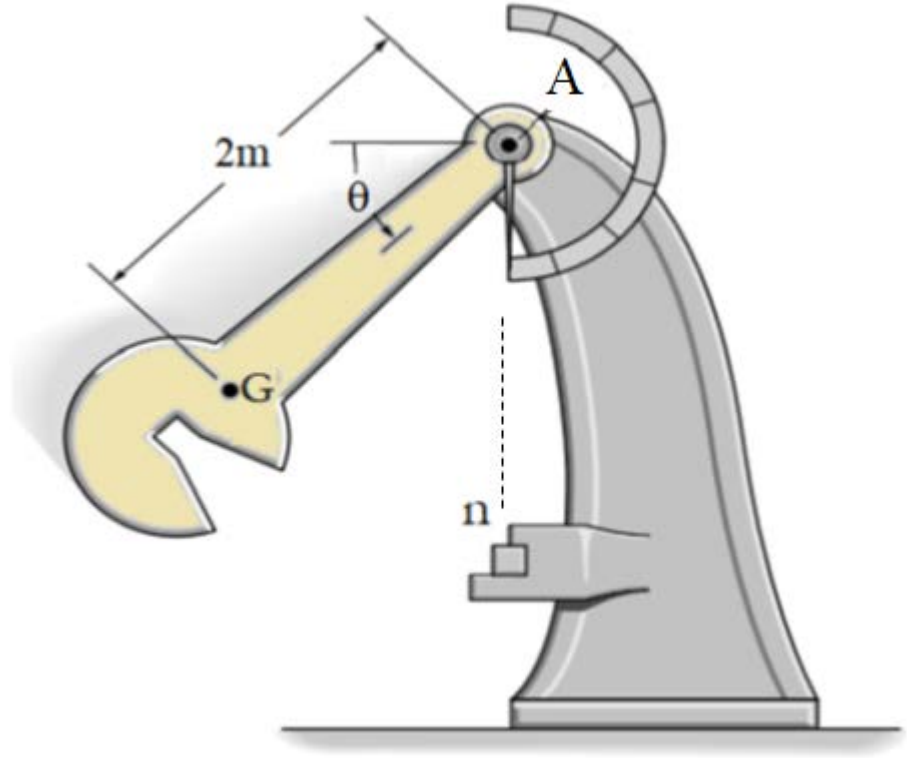
**Cevap :**  $4.65\text{ m/s}$



**Örnek 4.2.4 (\*)**

Şekildeki ECA taşıyıcı platformunun ve üzerindeki sandığın toplam ağırlığı 200N olup, ağırlık merkezi G noktasıdır. Sistem  $\theta = 0^\circ$  de durağan halde iken  $M=900\text{Nm}$  lik bir dış moment AB koluna uygulanıyor ve sistem hareket kazanıyor.  $\theta = 60^\circ$  lik konumdan geçerken AB ve CD kollarının açısal hızlarını hesaplayınız. Bu kolların ağırlıklarını ihmal ediniz.

**Cevap:**  $\omega = 1.23 \text{ rad/s}$



### Örnek 4.2.5 (\*)

Çentik darbe (Charpy) test makinesinin G merkezli 60 kg kütleli çekici,  $\theta = 0^\circ$  konumundan serbest bırakılıyor. A bağlantısında 10Nm lik bir sürtünme momenti oluşuyor. Bu durumda n numunesine çarpacağı anda çekicinin açısal hızını hesaplayınız. Çekicinin A dönme merkezine göre atalet yarıçapı  $k_A = 1.5\text{m}$  dir. ( $I_A = mk_A^2$ )

**Cevap:**  $\omega = 4.15 \text{ rad/s}$ ,



### 4.2.4 Rijid Cisimler İçin Enerjinin Korunumu

(Bu konuyu daha kolay anlamak için öncelikle 2.2 nolu maddesel nokta için enerjinin korunumu konusunu inceleyiniz.)

Rijid cisimde (veya rijid cisim sistemlerinde) iş yapan kuvvetler sadece konservatif kuvvetler (ağırlık ve/veya yay kuvvetleri) ise cismin (veya sistemin) toplam mekanik enerjisi korunur:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (\text{D.4.25})$$

Konservatif kuvvetler: Yaptığı iş gidilen yoldan bağımsız olan ağırlık ve yay kuvvetleridir.

Enerjinin korunumu sözkonusu ise: konservatif kuvvetlerin işi artık potansiyel enerji (V) olarak yazılır.

Toplam Potansiyel Enerji:

$$V = V_g + V_e$$

ağırlık potansiyel  
enerjisi

$$V_g = Wh$$

Referans ekseninden  
olan yükseklik

yaydan kaynaklanan  
elastik potansiyel enerji

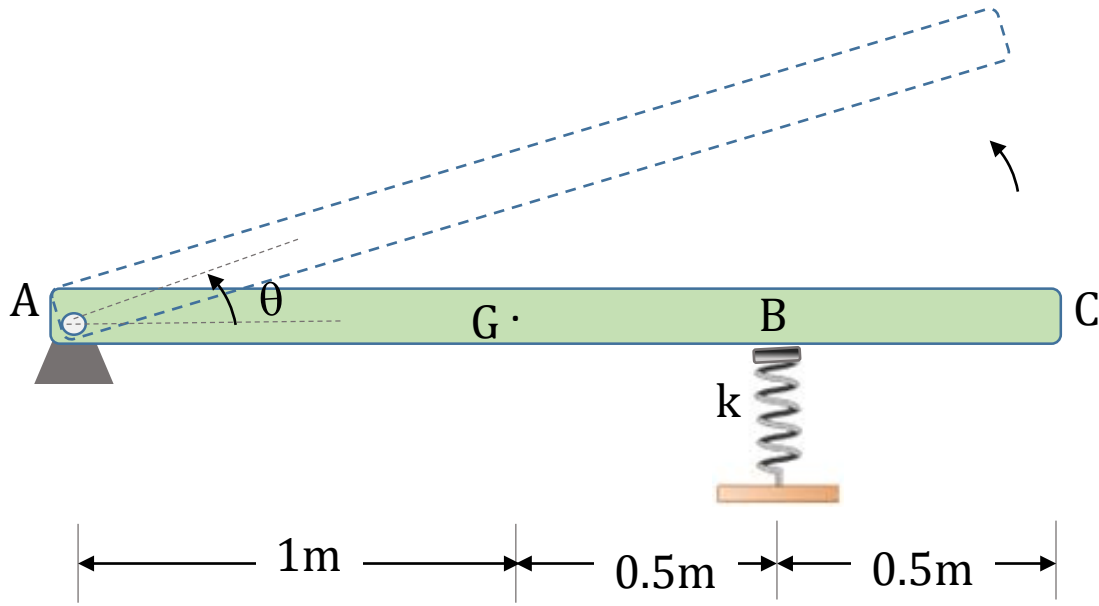
$$V_e = \frac{1}{2} kx^2$$

Yayın boyundaki değişim

Toplam Kinetik Enerji:

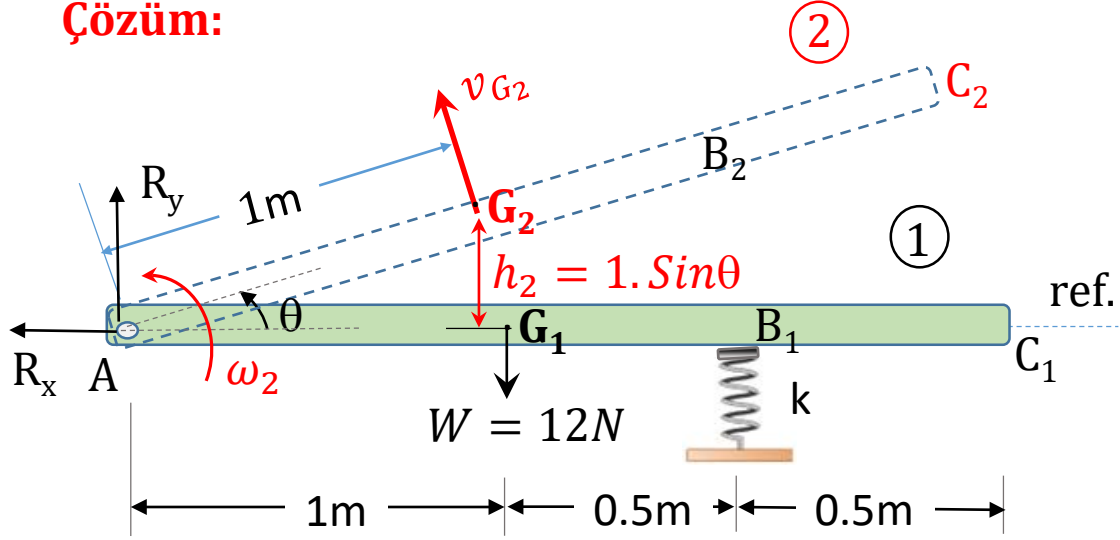
$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Şimdi bu konuyu örnekler üzerinden pekiştirelim:..>>



### Örnek 4.2.6 [\(video 4.2.b – örnek 4.5\)](#)

B noktasındaki yayı 6cm sıkıştırmış olan 12 N ağırlığındaki AC çubuğu yatay konumda tutulmakta iken serbest bırakılıyor. Çubuk  $\theta=30^\circ$  konumundan geçerken, açısal hızını, açısal ivmesini ve A bağlantısındaki kuvveti hesaplayınız. Çubuk yaya bağlı değildir, sadece temas halindedir. Yay katsayısı,  $k=300\text{N/cm}$ , yerçekimi ivmesi  $g=10\text{m/s}^2$  alınacaktır.

**Çözüm:**

$R_x$  ve  $R_y$  tepki kuvvetleri iş yapmaz. Çünkü uygulama noktası A yer değiştirmez.

İş yapan kuvvetler ağırlık ve yay kuvvetleridir.

O halde sistemin enerjisi korunur:  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

İlk anda sistem durağan olduğundan:  $T_1 = 0$

Çubuk için ağırlık merkezinden geçen dik eksene göre kütle atalet momenti:

$$I_G = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{10} 2^2$$

$$I_G = 0.4 \text{ kgm}^2$$

**Potansiyel Enerjiler:**

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V_{g_1} + V_{e_1} \quad , \quad V_{g_1} = Wh_1 = 0 \\ V_{e_1} &= \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{300 \text{ N}}{10^{-2} \text{ m}} x (0.06 \text{ m})^2 = 54 \text{ Nm} \end{aligned} \right\} V_1 = V_{e_1} = 54 \text{ Nm}$$

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= V_{g_2} + V_{e_2} \quad , \quad V_{e_2} = \frac{1}{2} kx_2^2 = 0 \\ &\quad \text{(yay çubuğa bağlı değil)} \end{aligned} \right\} V_2 = V_{g_2} = 6 \text{ Nm}$$

$$V_{g_2} = Wh_2 = 12 \times 1 \times \sin 30^\circ = 6 \text{ Nm}$$

(çubuk A noktası etrafında döner.):  $\vec{v}_{G_2} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AG_2}$

Veya D3.1a denkleminde hızın şiddeti:

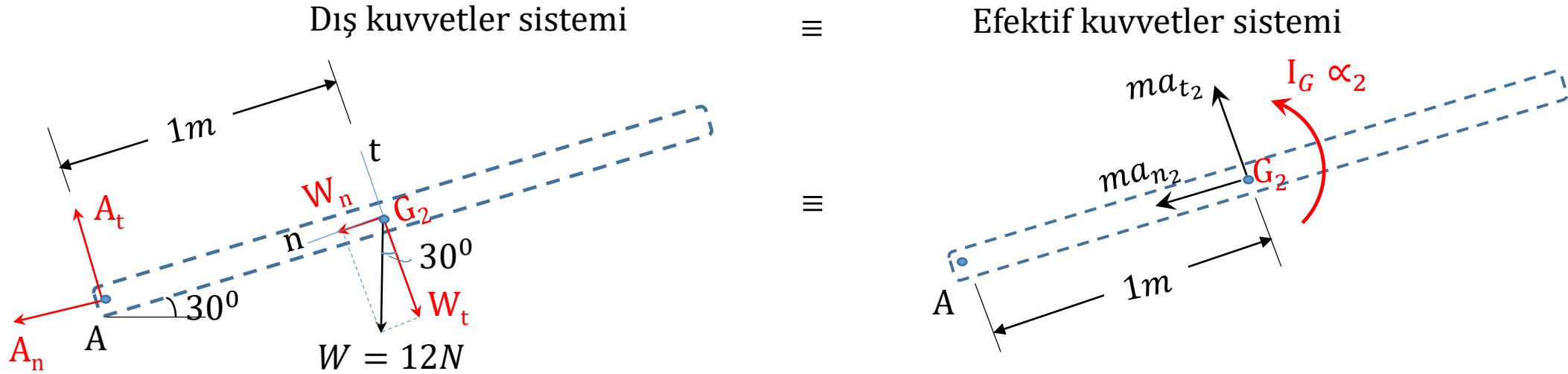
$$v_{G_2} = \omega_2 \cdot r = \omega_2 \cdot AG_2 \rightarrow v_{G_2} = \omega_2 \cdot 1 \rightarrow v_{G_2} = \omega_2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{10} \omega_2^2 + \frac{1}{2} 0.4 \omega_2^2 \rightarrow T_2 = 0.8 \omega_2^2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \rightarrow 0 + 54 = 0.8 \omega_2^2 + 6 \rightarrow \omega_2 = 7.74 \text{ rd/s}$$

$$\rightarrow v_{G_2} = 7.74 \text{ m/s}$$

## 2. Konumda çubuk için D'Alembert Prensibini uygularsak:



Çubuk A etrafından dairesel hareket yapar.

D.3.2a denklemden teğetsel ivme:

$$a_{t_2} = \alpha_2 \cdot r = \alpha_2 \cdot \overline{AG_2} = \alpha_2 \cdot 1 = \alpha_2$$

$$\Sigma M_A = I_G \alpha_2 + ma_{t_2} \cdot 1 \rightarrow -W_t \cdot 1 = 0.4 \alpha_2 + \frac{12}{10} \alpha_2$$

$$\rightarrow -12 \cos 30^\circ = 0.4 \alpha_2 + 1.2 \alpha_2$$

$$\rightarrow \alpha_2 = -6.49 \text{ rad/s}^2$$

$$\Sigma F_t = ma_{t_2} \rightarrow A_t - W_t = m \alpha_2 \rightarrow A_t - 12 \cos 30^\circ = \frac{12}{10} (-6.49) \rightarrow A_t = 2.6 \text{ N}$$

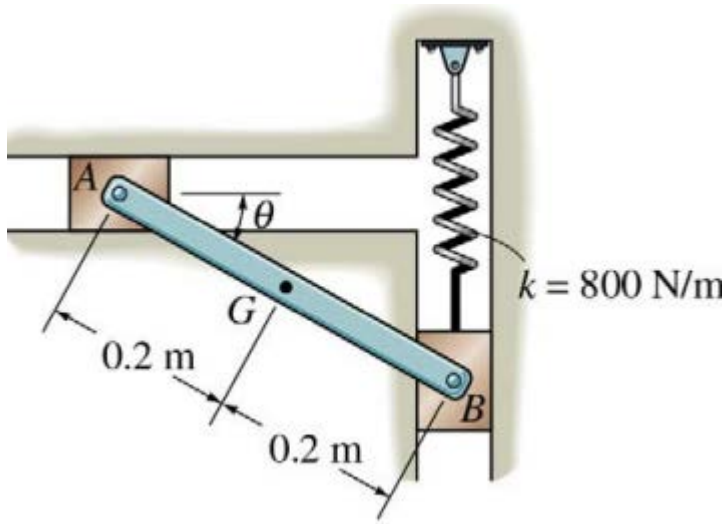
D.3.3a denklemden normal ivme:

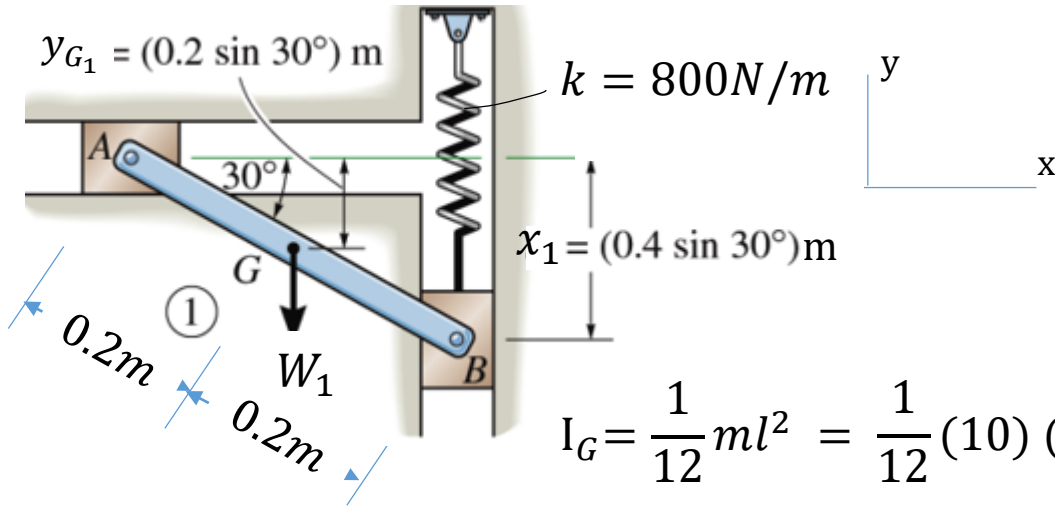
$$a_{n_2} = r \cdot \omega_2^2 = 1 \cdot \omega_2^2 = \omega_2^2$$

$$\Sigma F_n = ma_{n_2} \rightarrow A_n + W_n = m \omega_2^2 \rightarrow A_n + 12 \sin 30^\circ = \frac{12}{10} 7.74^2 \rightarrow A_n = 65.89 \text{ N}$$

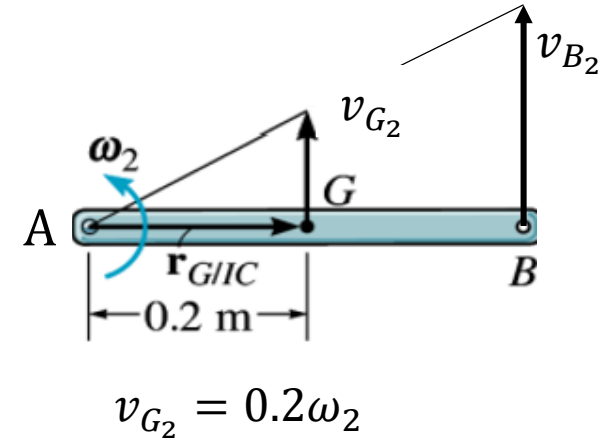
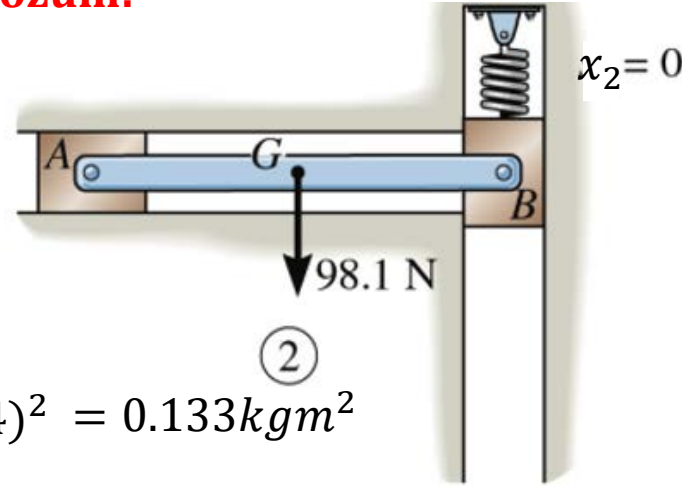
**Örnek 4.2.7**

10kg kütleli homojen AB çubuğuna, sürtünmesiz kanallar içerisinde hareket edebilen A ve B kayar elemanları bağlanmıştır. B kayar elemanına ayrıca katsayısı 800N/m olan bir yay bağlıdır. Sistem  $\theta = 30^\circ$  konumunda hareketsiz iken harekete terk ediliyor. Buna göre  $\theta = 0^\circ$  konumundan geçerken AB çubuğunun açısal hızını hesaplayınız. ( $\theta = 0^\circ$  konumunda yay uzamasız duruma gelmektedir.)

**Çözüm..>>**

**Çözüm:**

$$I_G = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} (10) (0.4)^2 = 0.133 \text{ kgm}^2$$



Öncelikle hareketi zihninizde canlandıralım: 2 konumuna kadar A elemanı sola doğru kayarken tam 2 konumunda A'nın hızı sıfır olacak; 2 konumundan sonra, yayın maksimum şıkışma konumuna kadar A elemanı sağa hareket edecek, B yukarı doğru kaymaya devam edecektir. 2 konumunda A noktası çubuğun ani dönme merkezidir ve çubuk durağan değildir.

İş yapan kuvvetler sadece ağırlık ve yay kuvvetleridir. Bu sebeple sistemin enerjisi korunur:  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$  (I)

1nci konumda:

Sistem hareketsiz olduğundan kinetik enerji:  $T_1 = 0$

Potansiyel enerji:  $V_1 = V_{g_1} + V_{e_1} = -W_1(y_{G_1}) + \frac{1}{2} k x_1^2$

$$V_1 = -10(9.81)(0.2 \sin 30^\circ) + \frac{1}{2} 800(0.4 \sin 30^\circ)^2 \rightarrow V_1 = 6.19 \text{ Nm}$$

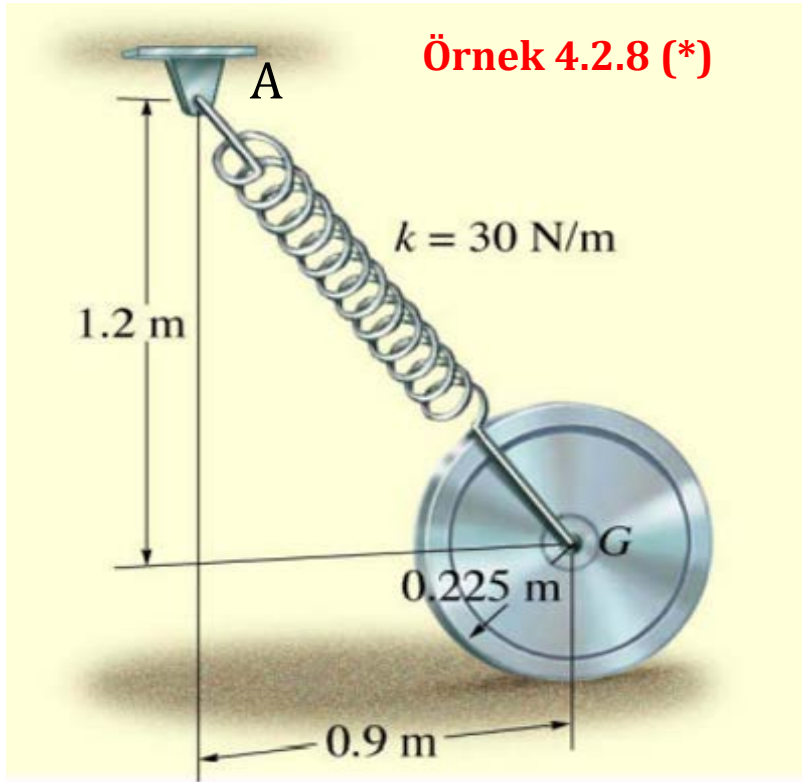
2nci konumda:

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2 = \frac{1}{2} 10 (0.2 \omega_2)^2 + \frac{1}{2} 0.133 \omega_2^2$$

$$\rightarrow T_2 = 0.267 \omega_2^2$$

$$V_2 = V_{g_2} + V_{e_2} = W_2(y_{G_2}) + \frac{1}{2} k x_2^2 \rightarrow V_2 = 0$$

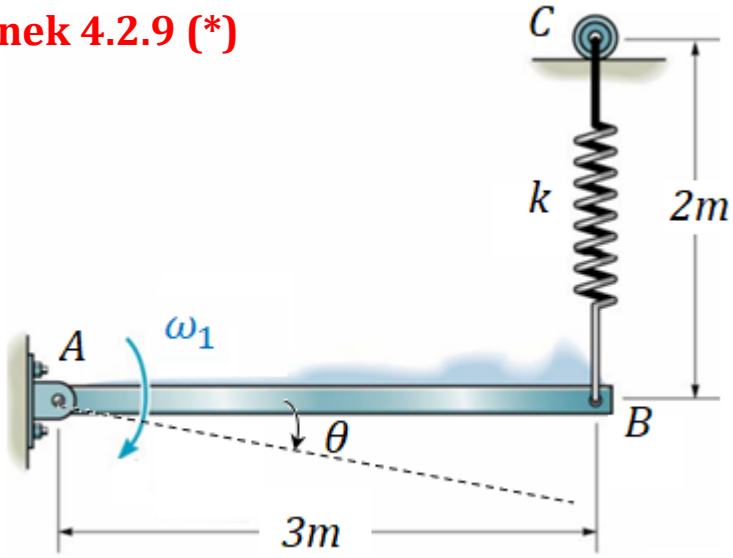
(I) denkleminde değerleri yerine koyarsak:  $0 + 6.19 = 0.267 \omega_2^2 + 0 \rightarrow \omega_2 = 4.81 \text{ rd/s}$



Atalet yarıçapı  $K=0.18\text{m}$  ve ağırlığı  $150\text{N}$  olan diskin ağırlık merkezine; uzamamış boyu  $0.3\text{m}$ , katsayısı  $30\text{N/m}$  olan bir yay bağlanmıştır. Şekildeki konumda hareketsiz tutulan sistem, aniden harekete terk ediliyor. Sola doğru  $3\text{m}$  yol aldığı anda diskin hızını hesaplayınız. Disk kaymadan yuvarlanmaktadır. ( $g=10\text{m/s}^2$ )

**Cevap:**  $\omega_2 = 3.89\text{rd/s}$

27.10.2023

**Örnek 4.2.9 (\*)**

50N ağırlığındaki çubuk A noktası etrafında saat ibreleri yönünde

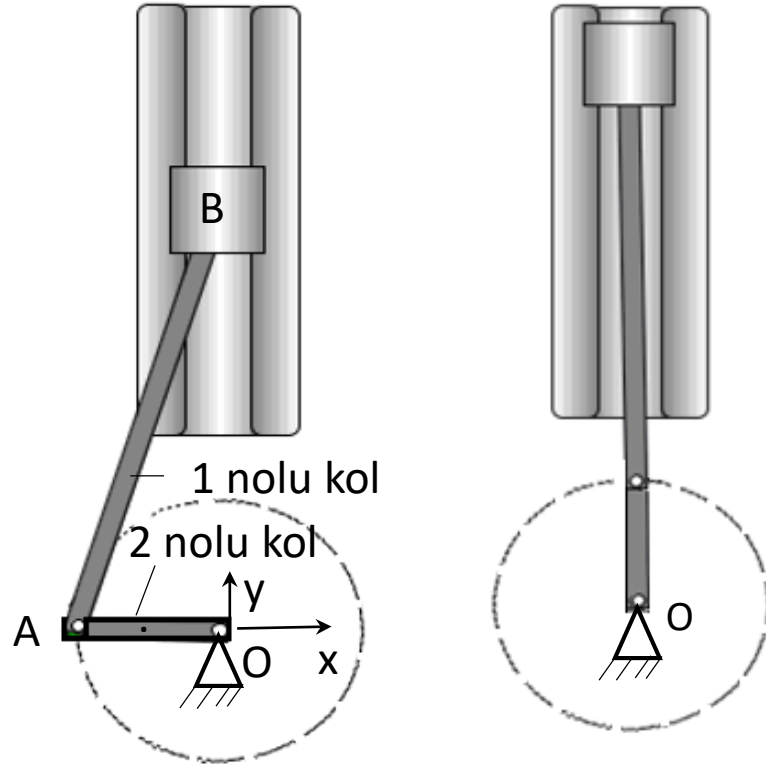
$\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ lik açısal hıza sahip iken şekildeki yatay konumdan geçtiği anda serbest bırakılıyor. Çubuğa katsayısı

$k = 10 \text{ N/m}$  olan bir yay bağlı olup bu yayın uzamamış boyu 2m dir.  $\theta = 30^\circ$  konumundan geçerken Çubuğun B uç noktasının hızını hesaplayınız.

( $g=10 \text{ m/s}^2$  kabul ediniz)

**Cevap:** -8.22m/s





### Örnek 4.2.10 (\*) [\(video 4.2.b – örnek 4.7\)](#)

Şekildeki otomobile ait krank biyel mekanizmasında, 25cm uzunluğundaki saat ibreleri yönünde dönen 2 nolu OA kolu 18rd/s lik açısal hızla yatay konumdan geçerken, Mekanizmayı tahrik eden güç kaynağı kesiliyor. Mekanizma kendi enerjisi ile harekete bir müddet daha devam ediyor. 65 cm lik AB koluna bağlı, B pistonu üst noktaya ilk kez geldiğinde 1 ve 2 nolu kolların açısal hızlarını tespit ediniz. O yatağına  $M=8\text{kNm}$  lik bir sürtünme momenti, B pistonuna ise  $F_s=10\text{N}$  luk bir sürtünme kuvveti hareket boyunca etki etmektedir.

**Verilenler:**  $\omega_2 = 18\text{rd/s}$ ,  $W_1=16\text{N}$ ,  $W_2=6\text{N}$ ,  $W_B=6\text{N}$ ,  $F_s=10\text{N}$ ,  $M_s= 8\text{Nm}$ ,  $AB=65\text{cm}$ ,  $OA=25\text{cm}$ ,  $g=10\text{m/s}^2$

**Sorulanlar:**  $\omega_1'=?$ ,  $\omega_2'=?$  (En üst nokta için açısal hızlar nedir?)

**Cevaplar:**  $\omega_1' = 3.38\text{rd/s}$  ,  $\omega_2' = -8.8\text{rd/s}$





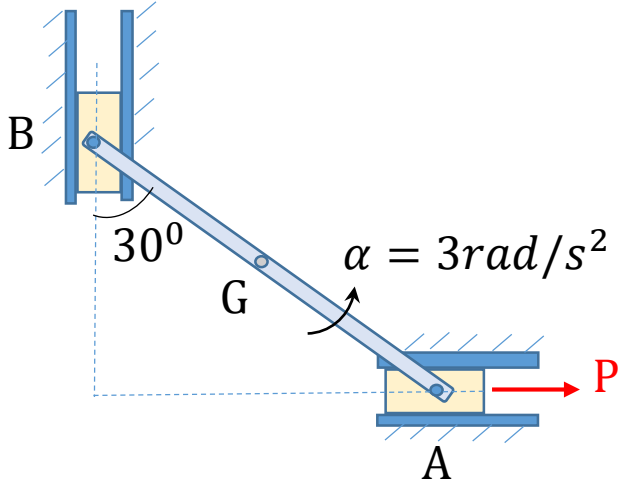


# 4.3

## 4.Bölüm (Rijid Cismin Düzlemsel Kinetiği)

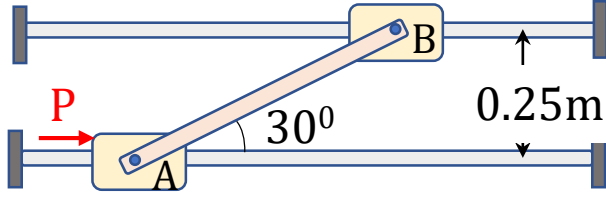
ile İlgili

**Cevaplı Sınav Soruları**



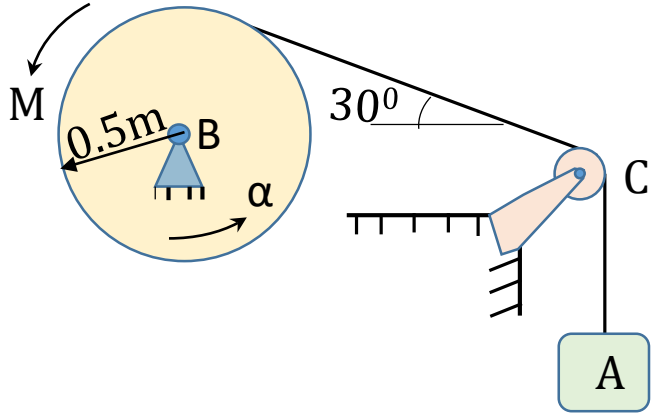
**Soru 4.3.1)** Boyu 1 m, ağırlığı 5 N olan ince ve düzgün bir AB çubuğunun uçlarına bağlı olan ve kütleleri ihmal edilebilen iki blok yatay ve düşey iki kanal içerisinde sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Çubuk A elemanına uygulanan yatay bir P kuvveti ile çekilmekte olup saat ibrelerinin tersi yönünde  $3 \text{ rad/s}^2$  lik bir açısal ivme kazanmıştır. Şekilde gösterilen konumda,  $\vec{a}_G = 0.3\vec{i} - 2.48\vec{j} \text{ m/s}^2$  olduğuna göre; P kuvvetinin şiddetini, A ve B deki reaksiyon kuvvetlerini ve yönlerini bulunuz.

**Cevaplar:**  $N_A = 3.73 \text{ N} \uparrow$ ,  $N_B = 1 \text{ N} \rightarrow$ ,  $P = 0.85 \text{ N} \leftarrow$



**Soru 4.3.2)** Ağırlığı 25 N olan bir AB çubuğu ağırlıksız iki bileziğe bağlanmış olup bunlar aynı bir düşey düzlemde bulunan sabit yatay çubuklar üzerinde serbestçe kaymaktadır. A bileziğine 5 N şiddetinde yatay bir P kuvveti etki ederse; a-) AB çubuğunun ivmesini, b-) A ve B deki reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız.

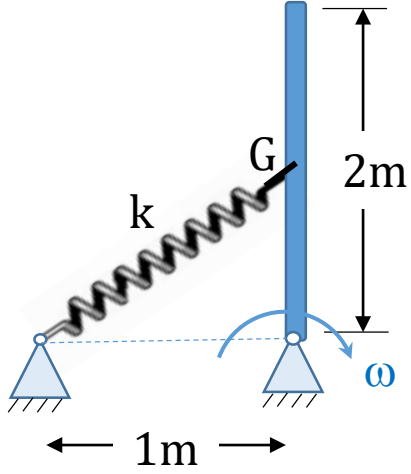
**Cevaplar:**  $a_{AB} = 1.96 \frac{m}{s^2} \rightarrow$ ,  $N_A = 14.94N \uparrow$ ,  $N_B = -11.06N \downarrow$



**Soru 4.3.3)** Bir ip, 0.5m yarıçaplı, 30kg kütleli B makarasından ve ağırlığı ihmal edilen C makarasından geçirilmiş ve ipin diğer ucuna 10kg ağırlığında bir A kütlesi bağlanmıştır. B Makarasına uygulanan bir M dış momenti ile bu makara  $\alpha = 2 \text{ rad/sn}^2$  lik bir açısal ivme kazanmıştır. Bu durumda ipteki kuvveti, M dış momentini ve B mafsalındaki reaksiyon kuvvetini hesaplayınız.

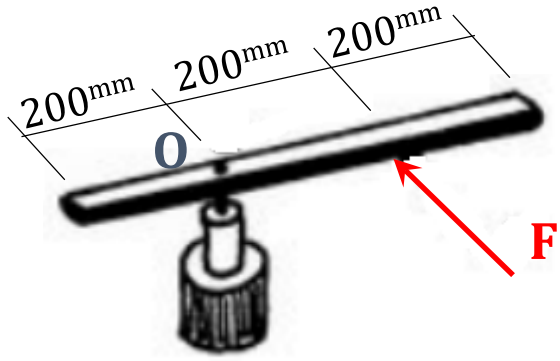
**Cevap:**  $T=108.1\text{N}$ ,  $M=61.55 \text{ N}$ ,  $R= 361.14 \text{ N}$



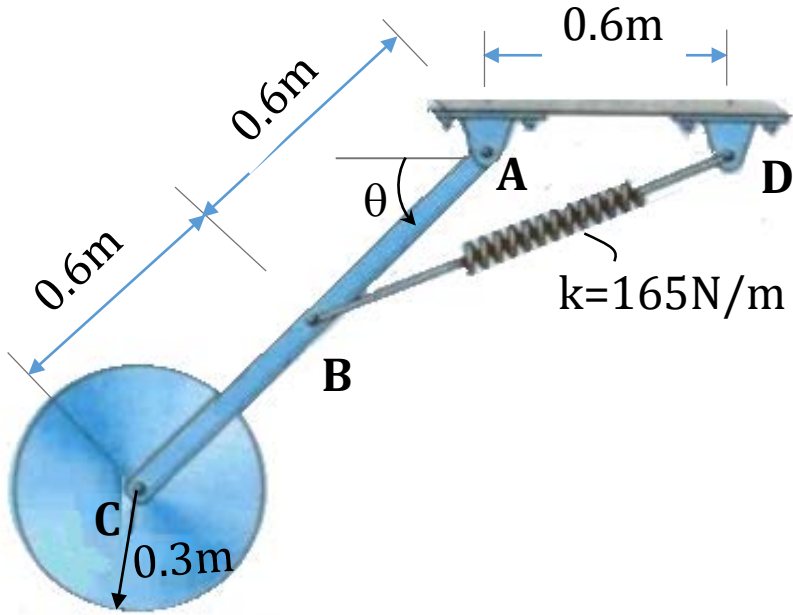


**Soru 4.3.4)** Şekildeki sistemde çubuk düşey konumda iken saat ibreleri yönünde  $\omega$  açısal hızına sahiptir ve yay uzamamış boyundadır. Çubuğun yatay konuma geldiği zaman durması için  $\omega$  açısal hızı ne olmalıdır ?

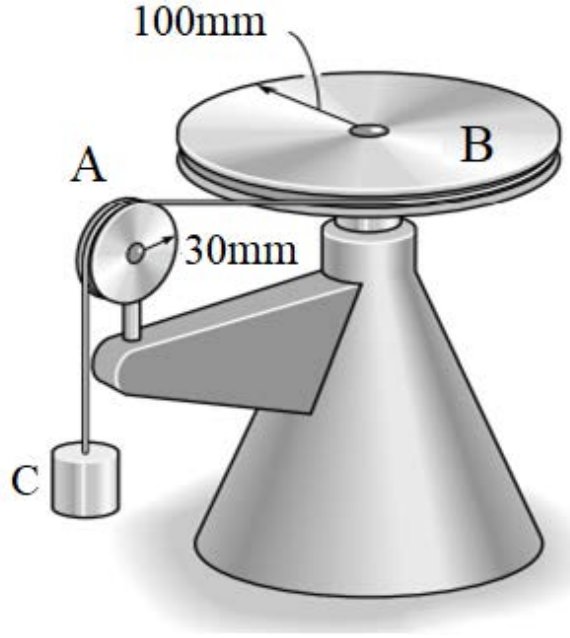
$I_G = ml^2/12$  ,  $m = 3 \text{ kg}$  ,  $k = 200 \text{ N/m}$  , **Cevap:**  $\omega = 1.567 \text{ rad/sn}$



**Soru 4.3.5)** 600 mm uzunluğunda ince bir çubuk, 10 kg kütleye sahiptir ve O dan geçen düşey eksen etrafında serbestçe dönecek şekilde mafsallanmıştır. Çubuk dengede iken, başlangıç değeri 150 N olan bir yatay F kuvveti çubuğa uygulanmaktadır. O daki reaksiyon kuvvetinin başlangıç değerinin yatay bileşenini hesaplayınız. (**Cevap:** 75N)



**Soru 4.3.6)** Şekildeki Sistem, 25N'luk AC çubuğu ve ona mafsallanmış 60N luk bir C diski ve uzamamış boyu 0.3m olan BD yayından oluşmaktadır. Sistem  $\theta = 0^\circ$  yatay konumuna getiriliyor ve bu konumda C diski saat ibreleri tersi yönünde 3 rd/sn lik sabit bir açısal hız veriliyor. Sistem bu yatay konumundan serbest bırakılıyor. Sürtünmeleri ihmal ederek,  $\theta = 90^\circ$  düşey konumdan geçerken AC çubuğunun açısal hızını belirleyiniz. **Cevap:** 5.07 rad/s

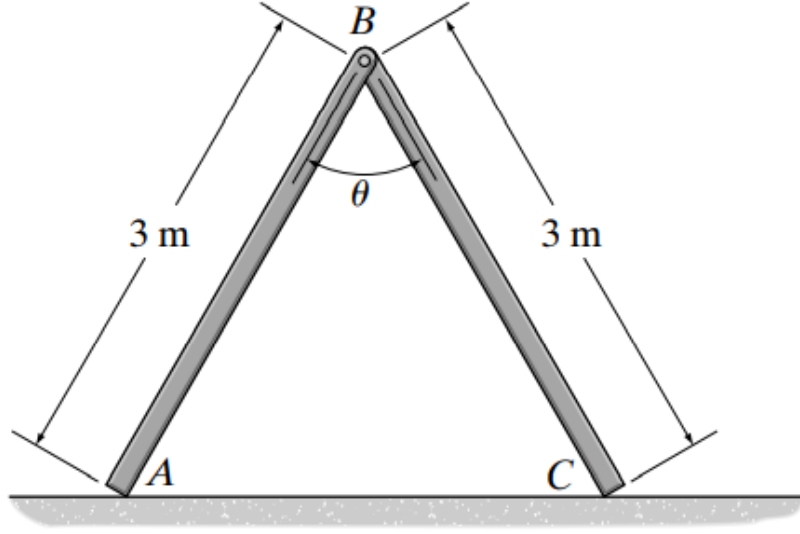


**Soru 4.3.7)**

Şekildeki sistem A ve B kasnakları; bu kasnaklara bağlı bir ip ve ipe bağlı bir C kütlesinden oluşmaktadır. Sistem durağan halden harekete terk ediliyor. 0.5m aşağıya indiği zaman C kütlesinin hızını hesaplayınız. İpin kütlesi ve sürtünmeler ihmal edilecek, ipin kaymadığı ve kasnakların ince diskler olduğu kabul edilecektir.

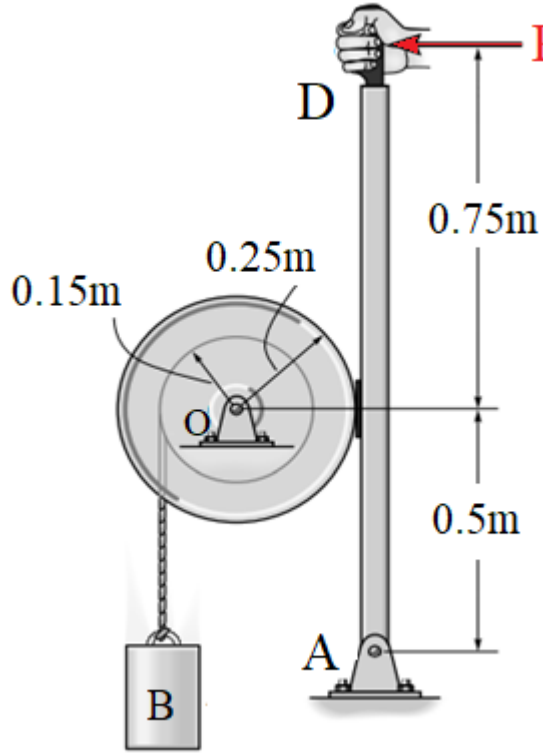
Verilenler ( $m_A = 3\text{kg}$ ,  $m_B = 10\text{kg}$ ,  $m_C = 2\text{kg}$  dır. Yarıçaplar şekilde belirtilmiştir.)

**Cevap:**  $v_C = 1.52\text{m/s}$



**Soru 4.3.8)**

Herbirisi 3 metre uzunluğunda ve 10kg kütleyle sahip olan iki eşit çubuk B noktasından dönmeye izin veren bir menteşe ile bağlıdır. Sistem  $\theta=60^0$  konumundan harekete tetkilirse,  $\theta=90^0$  konumundan geçerken çubukların açısal hızlarını hesaplayınız. (Sürtünmeleri ihmal ediniz.) **Cevap:**  $\omega = 1.25\text{rad/s}$

**Soru 4.3.9)(\*)**

Şekildeki sistemde O merkezli kasnağa bir B bloğu asılmıştır. Blok aşağı doğru 3m/s hızla hareket ederken, AD el frenleme mekanizması devreye giriyor ve  $P=100\text{N}$  luk el kuvvetiyle C deki fren balatası kasnağa sürterek belli bir süre sonra sistemin durması sağlanıyor. Balata ile kasnak arasındaki kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k=0.5$  olduğuna göre, frenlemeden itibaren sistem durana kadar B bloğunun ne kadar aşağı ineceğini hesaplayınız.

(kasnak için  $m_O = 50\text{kg}$  , atalet yarıçapı:  $k_O = 0.23\text{ m}$ , B kütlesi  $m_B = 15\text{kg}$  ) **Cevap:** 9.75m



## **Referanslar**

- 1- Vector Mechanics for Engineers, Dynamics, Ferdinand P.Beer, E Russel Johnston, Jr.
- 2- Enginnering Mechanics: Dynamics, J.L. Meriam, L.G. Kraige
- 3- Enginnering Mechanics: Dynamics, R.C. Hibbeler
- 4- <http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~pphongsa>
- 5- <http://charnnarong.me.engr.tu.ac.th/charnnarong>
- 6- [http://faculty.mercer.edu/jenkins he/](http://faculty.mercer.edu/jenkins_he/)